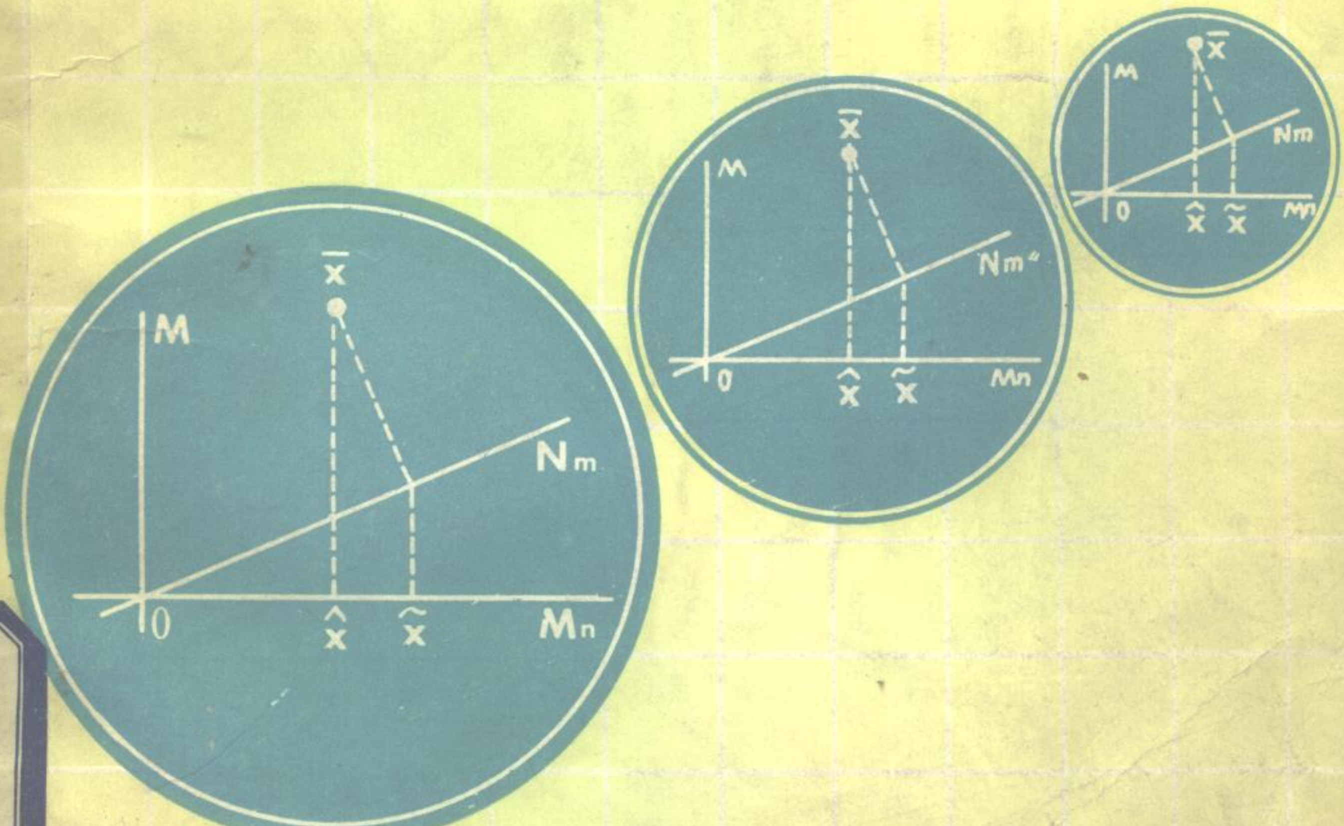
向敬成　刘醒凡　编著

信号理论



成都电讯工程学院出版社

信号理论
向敬成　刘醒凡　编著
学院出版社

信 号 理 论

向敬成　刘醒凡　编著

成都电讯工程学院出版社
· 1988 ·

内 容 提 要

本书采用信号空间理论及泛函分析的方法，分析和研究了时域连续信号、时域离散信号、规则信号与随机信号等各种信号及其各种变换。全书内容包括信号集及其映射，信号空间的基本概念，信号空间的线性泛函，信号的离散表示法及信号的积分变换表示法，线性系统的算子表示法，信号的数字特征和信号系统的极值问题。

本书不仅可作为电子系统专业师生的教材，也可供地球物理、气象、天文、测量专业及有关科研人员参考。

信 号 理 论

向敬成　刘醒凡　编著

•

成都电讯工程学院出版社出版

四川石油管理局印刷厂印刷

四川省新华书店经销

•

开本 787×1092 1/16　印张 11.125　字数 260千字

版次 1988年9月第一版　印次 1988年9月第一次印刷

印数 1-2500册

中国标准书号：ISBN 7-81016-080-X/TN·26

(15452·54)　　定价：3.00

目　录

序言

第一章　信号集及其映射 …… (4)

§1·1　引言 …… (4)

§1·2　常用的信号集 …… (5)

§1·3　信号集的运算 …… (6)

§1·4　信号集的划分与等价关系 …… (7)

§1·5　信号集的映射 …… (11)

§1·6　信号集的泛函 …… (15)

§1·7　信号的时域离散处理 …… (17)

习题 …… (20)

第二章　信号空间的基本概念 …… (22)

§2·1　距离空间 …… (22)

§2·2　距离空间的特性 …… (26)

§2·3　线性空间 …… (31)

§2·4　线性赋范空间 …… (35)

§2·5　内积空间 …… (37)

§2·6　有限维内积空间中信号的表示法 …… (41)

习题 …… (44)

第三章　信号空间的线性算子及线性泛函 …… (47)

§3·1　线性算子的基本概念 …… (47)

§3·2　线性变换的性质 …… (48)

§3·3　线性泛函的基本概念 …… (52)

§3·4　希尔伯特空间上的线性泛函 …… (53)

习题 …… (57)

第四章　信号的离散表示法 …… (58)

§4·1　能量有限信号的数值表示法 …… (58)

§4·2　能量有限信号的归一化完备正交集逼近 …… (66)

§4·3　信号的分解实现 …… (71)

习题 …… (76)

第五章　信号的积分变换表示法 …… (78)

§5·1　信号的连续表示法 …… (78)

§5·2　基核和对偶基核 …… (78)

§5·3　积分变换举例 …… (82)

§5·4 带通信号的表示法 …… (85)
习题 …… (96)
第六章 线性算子的表示法 …… (99)
§6·1 有限维空间上线性变换的表示法 …… (99)
§6·2 L^2 (T) 空间上算子的表示法 …… (102)
§6·3 线性算子的分类 …… (105)
§6·4 L^2 (T) 的有限维子空间上算子的近似表示法 …… (109)
§6·5 L^2 (T) 空间上的算子逼近 …… (112)
§6·6 退化算子的实现 …… (116)
§6·7 算子的谱表示法 …… (120)
习题 …… (127)
第七章 信号的数字特征 …… (129)
§7·1 引言 …… (129)
§7·2 双线性泛函与二次泛函 …… (132)
§7·3 伴随算子、正定算子和酉算子 …… (134)
§7·4 信号分析中常用的二次泛函 …… (137)
§7·5 信号理论中的变分问题 …… (138)
§7·6 无约束最佳问题应用举例 …… (142)
习题 …… (146)
第八章 信号与系统的极值问题 …… (147)
§8·1 引言 …… (147)
§8·2 信号的最佳问题 …… (150)
§8·3 算子的最佳问题 …… (156)
§8·4 广义不定性原理 …… (159)
§8·5 码间干扰问题 …… (164)
§8·6 信号空间的近似维数 …… (166)
习题 …… (172)
参考书目 …… (173)

序　言

信号是一个十分广泛的概念，广义说来，任何载荷着一个物理系统状态信息的量都可称为信号。信号是信息的携带者、传送者，因此，信号理论的应用，早已超出了传统的无线电通讯、雷达、测量技术和自动控制的范围，扩大到地球物理、天文、气象、基本粒子和生物工程等学科。天文信号载荷着天体运动的信息，气象信号携带着天气变化的信息，雷达信号载荷着飞行体及其环境的信息，而声音信号则载荷着发声系统状态的信息。由此可知，不同的学科都涉及到信号的提取、处理、分析等相同的任务，而信号理论正是研究信号的分析和综合的一门具有广泛应用的科学。

物质世界的多样性决定了信号的多样性。从信号的物理特性来讲，可以有电信号、声信号、光信号、机械信号和化学信号。由于各种物理特性的信号可以通过换能器互相转换，而电信号是当今最易处理的信号形式，因此今后我们主要研究电信号而不失一般性。

从信号的数学特性来讲，信号可以分为时域连续信号和时域离散信号，也可按其统计特性分为规则信号与随机信号。最常见的信号表示法是信号的函数表示法，即用$x(t)$表示给定一个t_i，有一个数值$x(t_i)$与之对应。信号函数表示法的实质是用数偶$\{t, x(t)\}$的所有元素的集合表示信号。信号的第二种表示法是如图0·1所示的图形法。显然，这两种表示法本质上完全一致。对于时域连续信号$x(t)$，$t\in R$（实数集合），信号表示为二维空间(即R^2空间）无限多个点的集合。由于这种表示法涉及太多的点，不便于数值分析与处理。

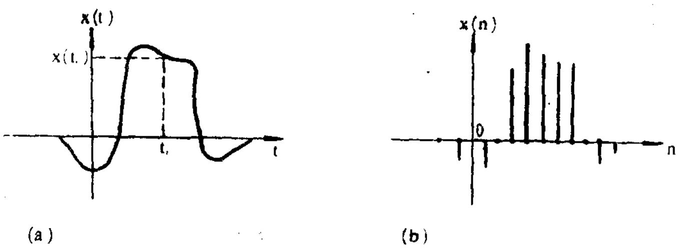


图0·1　信号的图形表示法　(*a*) 时域连续信号；(*b*) 时域离散信号

时域离散信号定义为$x(t)$，$t\in I$（整数集合）。由于计算机技术的飞速进展，数字信号（幅度离散的时域离散信号）处理技术得到广泛应用。在信号的函数表示法和图形表示法中，数字信号可看作R^2空间中的有限个或可数无限个点的集合。

为了简化问题的分析与处理，用一种统一的方法来表示各种类型的信号是十分必要的。本书采用信号的第三种表示法，即信号空间表示法。在这种方法中，信号不再看成一个简单结构的空间（R^2空间）中的一系列点的集合，而看成是更高结构化的一个复杂

空间中的一个点，表示为$\overline{x}$。采用这种处理方法的好处，不仅在于把信号理论建立在近代数学的基础上，而且可以把各种信号，包括时域连续与时域离散信号，规则信号与随机信号，纳入统一的处理方法，从而形成统一处理各种信号的信号空间理论。本教材的目的正是逐步引入信号空间理论的各种基本概念，从而打下进一步学习“信号处理”、“信息论”、“信号检测理论”等课程的基础。

如前所述，信号可以看作是对所观察的物理系统进行测量的结果，而这个测量的仪器就是信号处理器。信号处理器的作用是把原始测量数据进行加工，通过去粗取精，去伪存真，由表及里的处理过程，并以观察者易于接受的方式提供使用。信号处理系统由于其用途不同，其具体结构也是各不相同的。但是，抽去这些具体处理系统的物理细节，我们可以建立图0·2所示的信号处理系统的一般模型。

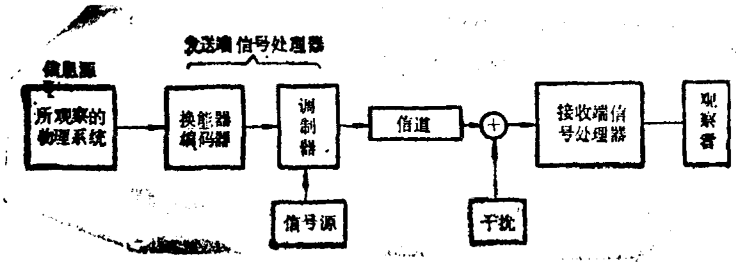


图0·2　信号处理系统的一般模型

图 0·2 中，换能器把所观察的物理量（可能是机械、电、光、声、热或化学等形式的量）变换成便于以后处理的形式，通常为电信号。例如，电视是把光信号变换为电信号，电话是把声信号变换为电信号等等。编码器的作用是改变信号的格式，以便强调重要的信息，消除或减弱次要的信息。调制器的作用是把信号变换为与信道相匹配的形式。如果信号的观察者处于很远的地方，则传输信道，如波导、无线电波、光纤等是必不可少的。这些信道常常具有色散性或者窄频带的性质，因而要求把信号调制到信道传输性能最好的载频上。例如，无线电通讯要求把信号调制到无线电波上，而光纤通讯则是把信号调制到光波上。接收端信号处理器包括解调器、解码器及换能器，完成上述过程的反过程，以便给观察者提供易于接收的信号形式。接收端信号处理器还应包含滤波器，以便最大限度地抑制信道引入的干扰。

我们在此详细叙述信号处理系统一般模型的目的，在于再次强调信号形式的多样性。在信号理论中，我们将不再强调信号的物理本质，而只强调信号的数学结构。在数学上，信号可表示为一个或几个独立变量的函数。如语音信号可表示为时间变量的函数，而图象信号可表示为两个空间变量的亮度函数。但本书中，我们习惯上把信号数学表达式的独立变量看作时间，这并不失分析的一般性。

还应说明，信号处理系统中的各个环节，不外乎是信号的变换。在信号理论中，信号看作是信号空间的点，而信号的变换就是信号空间的映射，这就理所当然的要求助于泛函分析中的算子理论。

本书是为一年级研究生课程“信号理论”所编写的教材，只能涉及信号理论的基本

方面。有关信号空间理论在随机信号处理、检测与估值等方面的应用，应当是信号理论的基本内容之一，但由于一学期课程的时间限制，不能在此进一步讨论，打算今后再编写一本“随机信号空间理论”的教材。我们主要从事雷达、通讯方面的教学与科学研究工作，因此，本教材的背景材料大多来源于电子工程领域。但是，由于本课程内容的通用性，本教材对地球物理、气象、天文、测量等专业的研究生、大专院校教师、研究人员和工程师，也有一定的参考价值。

本教材共分八章。第一章信号集及其映射，首先把信号分析建立在集合论的基础上。第二章信号空间的基本概念，逐步引入距离空间，线性空间及内积空间，并广泛引用实例，说明这些概念在信号理论中的应用。第三章信号空间的线性算子与线性泛函，用算子理论初步分析信号处理系统，并得出线性泛函一系列在信号分析中十分有用的特性。第四章信号的离散表示法及第五章信号的积分变换表示法，应用前面阐述的信号空间基本概念详细分析了信号的离散表示法和连续信号的积分变换表示法。在信号空间理论中，这两种表示法有着本质上完全一致的特性。第六章线性系统的算子表示法，详细分析了信号处理线性系统，其中包括非时变线性系统和时变线性系统。第七章信号的数值特征和第八章信号与系统的的极值问题，是用变分法解决信号理论中一些最优化问题。

学习本书的读者只需有“信号分析”及“高等代数”的基础，并不要求学习过“泛函分析”。有关泛函分析的内容本书将结合信号空间理论自成系统。当然，熟悉“实变函数”与“泛函分析”的读者将发现本书更便于学习。学习“信号空间理论”最好的方法是应用它，特别是把有关基本理论应用于简单的实例，将会有助于加深对基本概念的掌握。

本书第一、二、七、八章由向敬成编写，第三、四、五、六章由刘醒凡编写。全书经成都电讯工程学院电子工程系黄振兴教授和数学系李正良副教授审阅，提出了不少有价值的改进意见。在编写过程中，得到顾德仁教授和张有正教授的支持和帮助。本书是在1984年底和1985年初成都电讯工程学院出版的同名讲义的基础上改写的，原讲义在成都电讯工程学院研究生教学中使用过四届，同学们在使用过程中也提出了不少修改意见。在此对他们表示衷心感谢。我们特别感谢作者的导师L.Franks教授，在本书编写过程中，广泛参考了他美在国麻州大学讲课时作者所作的笔记以及习题解答。

第一章　信号集及其映射

§1·1　引　　言

在研究信号空间之前，我们先把任一特定的信号看作是信号集中的一个元素。这样，便容易地把信号看作是信号空间中的一个点的概念过渡。

在日常生活中常用到集合的概念：多面体的面的集合，教室里听众的集合，直线上点的集合，自然数的集合……。作为数学领域的集合概念，是数学上最广泛和最基本的概念，不能直接给出定义，只能用公理法展开。我们这里只能依赖我们的直观来描述这一概念。按照Cantor的说法，集合是由“确定的、各别的对象m组成一个整体（记为M），而这些对象是我们感觉到的或我们想象到的。”用来形成集合的对象称为该集合的元素或元。因此，集合可以理解为“元素的汇合”，“元素的总体”等等。显然，这些说法只不过是集合的同义语而已。

一般说来，用大写字母A、B、C、S……表示集合，用小写字母a、b、c、x表示集合的元素。我们可以用两种方式表示一个集合的元素是什么。如果一个集合的元素不多，可以直接列出它的全部元素。例如，7到9的自然数集可表示为$A=\{7、8、9\}$。如果集合的元素很多，我们可以用写出集合全体元素都满足的共同性质的办法来表示集合。例如，上例中的集合可表示为$A=\{x;\ x$是大于6小于10的整数$\}$。用这个办法来表示信号集$S_p=\{x;\ p\}$，就意味着Sp是所有具有特性p的信号x的集合。

某元是一个集合的元素可以写作，例如，$8\in A$的形式。读作“8是集合A的元素”或“8属于A”。如果一个元素不属于该集合，可以记为，例如$6\notin A$的形式，读作“6不属于A”，或“6不是A的元素”。

如果对于每一个$x\in A$都有$x\in B$，则称集合A是集合B的子集，或称B包含A，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。例如，整数集便是实数集的一个子集。若$A\subseteq B$与$B\subseteq A$均成立，则集合A与B的元素完全相同，记为$A=B$。如果$A\subseteq B$，但$A\neq B$，即B里至少有一个元素不属于A，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$。

不包含任何元素的集合叫空集，记为$\varnothing$。例如，考察方程式根的集合，如果该方程无根，则其根的集合为空集。注意，空集$\varnothing$与数0是完全不同的。0是一个元素，如方程式唯一的根是0，此时根的集合不是空集。显然，任何集合包含空集$\varnothing$作为其子集。在信号理论中，常遇到零信号$\{0\}=\{x;\ x(t)=0,\ t\in R\}$，零信号是信号集中的一个元素，与空集的概念完全不同。

有了上述关于集合的基本概念，就很容易地了解任一信号不过是特定信号集中的一个元素，而最常用的信号集如下节所述。

§1·2 常用的信号集

1. 矩形信号集S_t可表示为

$$S_t=\left\{x;\ x(t)=A\Pi\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right),\ t_0\in R,\ A,\ \tau>0\right\} \tag{1·1}$$

式中，
$$\Pi(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant ½\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{1·2}$$

显然，A为矩形信号幅度，τ为信号持续期，t_0为矩形信号中心位置。给定A、τ、t_0值，则得到矩形信号集中的一个元素。矩形信号的傅里叶变换为

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$=A\int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0+\frac{\tau}{2}}e^{-j2\pi ft}dt$$

$$=A\tau\cdot\mathrm{sinc}(f\tau)\cdot e^{-j2\pi ft_0} \tag{1·3}$$

式中，sinc函数定义为

$$\mathrm{sinc}\ z=\frac{\sin\pi z}{\pi z} \tag{1·4}$$

2. 正弦信号集S_s表示为

$$S_s=\{x;\ x(t)=\mathrm{Re}[e^{\alpha+j(2\pi ft+\theta)}],\ \alpha,\ \theta,\ f\in R\} \tag{1·5}$$

式中e^{α}，f，θ分别表示正弦信号的幅度，频率和相位，显然正弦信号集S_s包含所有可能的幅度，频率和相位的正弦信号，

3. 对称信号集可分为偶对称信号集S_{ev}，

$$S_{ev}=\{x;\ x(t)=x(-t),\ -\infty<t<\infty\} \tag{1·6}$$

和奇对称信号集S_{od}

$$S_{od}=\{x;\ x(t)=-x(-t),\ -\infty<t<\infty\} \tag{1·7}$$

偶对称信号之傅里叶变换只有实部，即

$$\mathrm{Im}X_{ev}(f)=0 \tag{1·8}$$

而奇对称信号之傅里叶变换只有虚部，即

$$\mathrm{Re}X_{od}(f)=0 \tag{1·9}$$

4. 周期信号集$S_p(T)$是所有周期为T之信号的集合，它可表示为

$$S_p(T)=\{x;\ x(t+T)=x(t)\} \tag{1·10}$$

周期信号具有离散的傅里叶谱，可用傅里叶级数表示：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}},\ -\infty<t<\infty \tag{1·11}$$

式中，$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt$ (1·12)

5．幅度有界信号集$S_m(K)$表示信号幅度的瞬时值总不大于某一正实数K之信号集合，它可表示为

$$S_m(K) = \{x;\ |x(t)| \leqslant K,\ K>0\} \tag{1·13}$$

显然，如果$K_2 \geqslant K_1$，则

$$x \in S_m(K_1) \Rightarrow x \in S_m(K_2)$$

6．能量有限信号集$S_e(K)$可表示为

$$S_e(K) = \{x;\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \leqslant K\} \tag{1·14}$$

能量有限信号又称为平方可积信号。

7．时限信号集表示在区间$-T \leqslant t \leqslant T$之外信号为零的所有信号的集合，其数学表达式为

$$S_d(T) = \{x;\ x(t) = 0,\ 如\ |t| > T\} \tag{1·15}$$

显然，如$T_2 \geqslant T_1$，则

$$x \in S_d(T_1) \Rightarrow x \in S_d(T_2)$$

8．带限信号集$S_b(B)$表示信号频谱在区间$-B \leqslant f \leqslant B$之外为零的所有信号之集合，其数学表示式为

$$S_b(B) = \left\{x;\ X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = 0,\ 如|f| > B\right\} \tag{1·16}$$

9．时域离散信号集$S_s(\tau)$，表示采样周期为τ的所有时域离散信号的集合，其数学表示式为

$$S_s(\tau) = \left\{\{x(t);\ \begin{array}{l} 当t = n\tau,\ n \in I,\ 则x(t) = x(n\tau) = x(n) \\ 当t \neq n\tau,\ x(t)无定义 \end{array}\right\} \tag{1·17}$$

§1·3　信号集的运算

信号集的运算是指巳知若干信号集，通过运算得到新的信号集。集的基本运算有三种。第一种运算是集合的并，定义为

$$A \cup B = \{x;\ x \in A或x \in B\} \tag{1·18}$$

并集$A \cup B$由属于集合A或属于集合B的一切元素组成。第二种运算是集合的交，定义为

$$A \cap B = \{x;\ x \in A与x \in B\} \tag{1·19}$$

交集$A \cap B$由既属于集合A又属于集合B的一切元素组成。例如A表示偶数集，B表示能被3整除的数集，则$A \cup B$为被2或被3整除的一切整数的集合，而$A \cap B$为被6整除的一切整数的集合。

集合的并与交运算，有交换律，即

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

结合律，即

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

以及分配律

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

第三种集合的运算是集合的差，定义为

$$S=A-B=\{x;\ x\in A\text{且}x\notin B\} \tag{1·20}$$

差集$A-B$由属于集合A但不属于集合B的一切元素构成的集合。例如，A是整数集，B是奇数集，则$A-B$表示偶数集。

在研究集合（包括信号集）时，采用集合之间的关系图，即Euler-Venn图是有帮助的。通常将基础集合画成一个大的矩形，用U表示，而把所讨论的集合画在矩形内。图1·1给出了并集、交集和差集的Euler-Venn图。

下面举出两个信号集运算的例子。

例1·1　已知信号集S_a为

$$S_a=\left\{x_n(t);\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\right\} \tag{1·21}$$

式中　$x_n(t)=ne^{-nt}$，$t\geqslant 0$

$\qquad\qquad=0\qquad$，$t<0$

试求出　$S=S_a\cap S_m(12)\cap S_e(3)$

由式(1·21)有$\max|x_n(t)|=n$，且$\int_{-\infty}^{\infty}x_n^2(t)dt=\frac{n}{2}$

显然，因$S_m(12)$要求$n\leqslant 12$，$S_e(3)$要求$\frac{n}{2}\leqslant 3$，故有$n\leqslant 6$，则

$$S=\{x_n(t);\ n=1,\ 2,\ \cdots 6\}$$

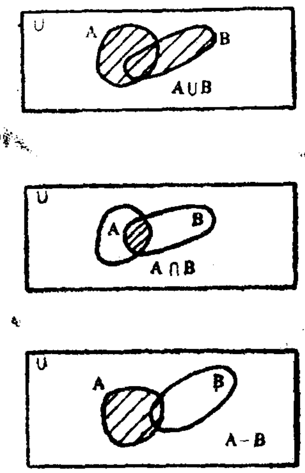


图1·1　两集合的并集、交集和差集的Euler-Venn图

例1·2　众所周知，一个非零的信号不可能既是带限的又是时限的。这是因为，时限信号的傅里叶变换为

$$\int_{-T}^{T}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

它只能在一些f的孤立点上为零，除非当$|t|\leqslant T$时$x(t)\equiv 0$。也就是说，只有当$|t|\leqslant T$时，$x(t)\equiv 0$，才可能使上述积分在一个f的区间上为零，因此，时限信号中只有零信号才是限带的，即

$$S_d(T)\cap S_b(B)=\{0\}=\{x;\ x(t)=0,\ t\in R\} \tag{1·22}$$

§1·4　信号集的划分与等价关系

为便于掌握一个信号集，常常需要把信号集划分成一些两两互不相交的子集，如图

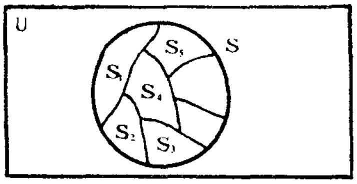


图1·2 信号集的划分

1·2所示。

从数学上讲，把集合S划分为$\{S_1, S_2\cdots\cdots\}$，可表示为

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup\cdots\cdots \qquad (1\cdot 23a)$$

和

$$S_i\cap S_j=\varnothing,\ i\neq j \qquad (1\cdot 23b)$$

例如，在人口统计中，按出生年把成都市的居民进行编组，即得出居民集合中一系列互不相交的子集，以便掌握人口的年龄结构。又如，三维空间点的集合，可以划分为不同半径的球面组成的子集。总之，集合划分的目的是为了便于处理集内的元素，对信号集划分的目的，也是为了产生一系列便于处理的信号子集。例如，通常一个信号集内包含了不可数无限多个元素。如果我们把这个集合划分成可数个，甚至有限个子集，则处理这些信号就方便得多。下面我们将给出一些在工程上常用的划分信号集的例子。

为了给出集合M的一个划分，其规则不可能是任意的。通常，一个划分是由集内元素的等价关系产生的。两个元素a，b等价记为$a\sim b$，必须要下述三个公设成立：

1．自反性：$a\sim a$；$a\in M$

2．对称性：$a\sim b\Rightarrow b\sim a$；$a$，$b\in M$ $\qquad (1\cdot 24)$

3．传递性：$a\sim b$和$b\sim c\Rightarrow a\sim c$；$a$，$b$，$c\in M$

例如，在实数集合中不能定义$b>a$作为$b\sim a$。因为$a\not>a$，故$a\sim a$不成立，无自反性。同时，$b>a\Rightarrow a\not>b$，$a\sim b$不成立，无对称性。因此，用$b>a$作为等价关系是不成立的，也不能形成一种划分。又如，是否能把成都市的居民按互相认识作为等价关系？a认识a，意味着a认识a，a认识b意味着b认识a，所以有自反性和对称性。但如a、b互相认识，b、c互相认识，并不意味着a、c互相认识，无传递性，故不能用互相认识作为等价关系，因而也不能形成一种划分。

不难证明（本章习题1·5），任何一个划分（1·23）产生一个等价关系，反之，任何一个等价关系（1·24）产生一个划分。因此，一个划分就是把集合S分解为互不相交的等价子集，其中每一个等价子集可表示为

$$S_x=\{y;y\sim x\} \qquad (1\cdot 25)$$

也就是说，一种划分的每个子集内各元素等价，反之，等价元素组成之集合为一种划分的一个子集。

划分与等价关系在信号理论中有着广泛的用途，下面是一些十分有用而且有趣的例子。

例1·3 在数论中，通常把整数集合$\{n;\ n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots\}$划分为有限个（$m$个）等价集：

$$S_i=\{n;\ n=pm+i\},\ i=0,\ 1,\ 2\cdots m-1 \qquad (1\cdot 26)$$

式中，p为任意整数。此时，等价关系就是模m同余，即$n_1\sim n_2\Rightarrow n_1-n_2=pm\Rightarrow n_1=n_2$（模$m$）。例如模2同余把整数集划分为奇数和偶数两个等价子集，而模3同余把整数集划分为与0，1，2三个数同余的三个子集，后者如图1·3所示。

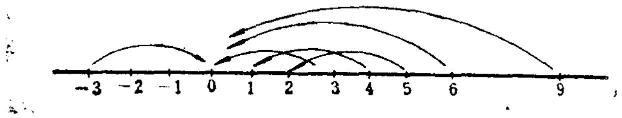


图1·3 模3同余的等价关系示意图

例1·4 对于信号集S，我们可以建立等价关系$x(t_0)\cdot y(t_0)>0\Rightarrow x\sim y$，即$x(t)$与$y(t)$在$t_0$时刻同号，则认为$x$，$y$等价。按此等价关系，可把信号集$S$划分为如下两个等价集：

$$\begin{aligned}S_+&=\{x;\ x(t_0)>0\}\\S_-&=\{x;\ x(t_0)<0\}\end{aligned}\tag{1·27}$$

上述划分排除了$x(t_0)=0$的情况，因为$x(t_0)$恰好为零的概率极小。如果把$x(t_0)=0$的情况考虑在内，则可把它附加在S_+或S_-的等价集内，此时，（1·27）式可改写为如下形式：

$$\begin{aligned}S_+&=\{x;\ x(t_0)\geqslant 0\}\\S_-&=\{x;\ x(t_0)<0\}\end{aligned}\tag{1·28}$$

这种划分广泛地应用于二进制数据传输系统，此时，S_+集合中的所有信号看作是由发射端的$x_1(t)$信号产生，而S_-集合中的所有信号看作由发射端的$x_2(t)$信号产生。图1·4给出这种系统的典型框图。

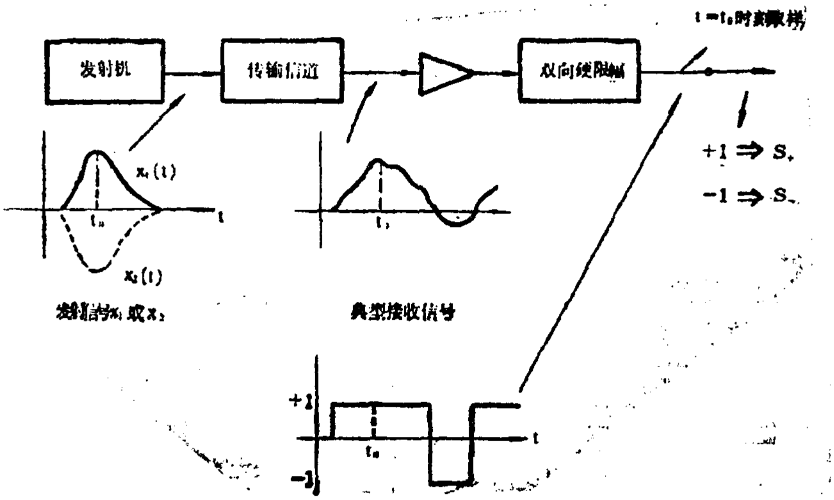


图1·4 二进制数据传输系统

从图1·4可看出，虽然发射机仅可能发射两种信号x_1或x_2，但由于信道对信号的畸变及各种干扰的影响，在接收机输入端的信号是不可预计的，有无限多种可能的波形。信号处理系统就是对这些接收波形进行划分，从而推测发射波形是x_1或x_2。如果接收信号是属于集合S_+，则判决发射端信号为x_1，反之，如接收信号是属于集合S_-，则判决发射端信号为x_2。显然，这种判决会出现错误，如何选择判决准则和计算其错误概率，那是检测理论所要解决的问题。这里我们要指出的是，象“检测”这样的信号处理问

题，本质上就是对接收信号集进行一种特定的划分。

例1·5 一种抗干扰性能较好的二进制数据传输系统是采用相关接收机把接收信号划分为二个子集S_1和S_2。同上例一样，接收信号$y(t)$属于S_1或S_2表明对发射端信号为x_1或x_2的判决。此时，集合S_1和S_2可写为：

$$S_1=\left\{y;\ \int_0^T y(t)\varphi(t)dt\geqslant K\right\}$$
$$S_2=\left\{y;\ \int_0^T y(t)\varphi(t)dt<K\right\} \tag{1·29}$$

式中，$\varphi(t)$为参考信号，K为某一预置门限，完成（1·29）式的运算设备可由一乘法器、积分器、取样器和门限设备构成，如图1·5所示。

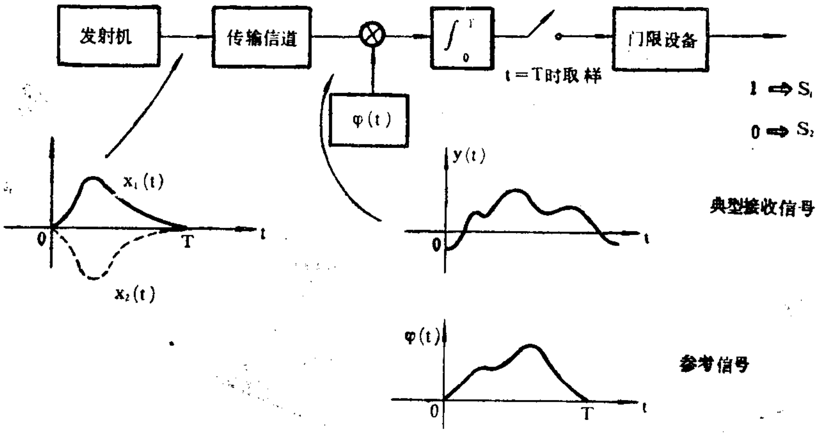


图1·5 使用相关接收机的二进制数据通信系统

显然，这个系统本质上是对接收信号进行相关运算，并与一门限进行比较，从而把接收信号集划分为两个子集，以便判决发射信号是x_1或x_2。有关最佳地选择$\varphi(t)$和K的问题是信号检测理论的重要课题。这里只需说明，如果选择$\varphi(t)=x(T-t)$，相关接收就完全与匹配滤波接收等效。

例1·6 如果我们事先给出一个函数集$\{\varphi_i;\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n\}$，今后将会看到，这个函数集内的元素通常是线性无关的，则我们可定义函数x，y的等价关系为

$$x\sim y\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\varphi_i(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\varphi_i(t)dt,$$
$$i=1,\ 2\cdots\cdots n \tag{1·30}$$

显然，（1·30）式可以改写为

$$x\sim y\Rightarrow x-y\in M\Rightarrow x=y\ (\mathrm{mod}M) \tag{1·31}$$

式中，M定义为一个函数子集

$$M=\left\{z;\ \int_{-\infty}^{\infty}z(t)\varphi_i(t)dt=0,\ i=1,\ 2\cdots n\right\} \tag{1·32}$$

即M中的元素$z(t)$与$\varphi_i(t)$乘积之积分均为零，后面一章的分析中将会看到，这是指$z(t)$与$\varphi_i(t)$正交。在（1·31）式中，我们实质上已定义$x-y\in M$为x，y模M广义同余，

因为（1·31）式在形式上与例1·3中$n_1-n_2=pm\Rightarrow n_1=n_2$（模$m$）完全一致。

按（1·30）式形成的每个等价子集中，可以挑选出一个典型元素$\hat{x}$，

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(t) \tag{1·33}$$

则每个等价子集可表示为

$$S_{\hat{x}}=\{x;\ x\sim\hat{x}\}=\{x;\ x=\hat{x}+z,\ z\in M\} \tag{1·34}$$

这个表示法的重大意义在于，只要选定的集合$\{\varphi_i\}$满足一定条件，则可在等价子集$S_{\hat{x}}$和一个n元有序数组$\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots a_n\}$之间建立一一对应关系，因而每个等价子集$S_{\hat{x}}$可以看作$n$维向量空间中的一个点。注意，这里$n$元有序数组是指$n$个有序的数的集合，今后简称为$n$维数组。当然，要完全解决这个问题，必须进一步学习信号空间理论中一系列其他基本概念，但这里至少可看出，这种等价集的表示法，允许我们更方便地表示和处理信号。

应当指出，等价关系是一种特殊的关系，即满足（1·24）三公设的关系。一般的在集合A上的关系，可定义为序偶$\{a,\ b\}$所形成的一个集合，此处，$a\in A$，$b\in A$，一般常用R表示关系，用aRb表示序偶$\{a,\ b\}$是关系集合的元素。注意，这里序偶是指一对有序的元素。用这个观点来解释等价关系，则意味着xRx（自反性），$xRy\Rightarrow yRx$（对称性），xRy和$yRz\Rightarrow xRz$。

还应说明，如果两个集合的元素之间可以建立一一对应关系，则称它们互相等势。如果一个集合的某个子集与正整数集等势，则称这个集合是无限集。如果一个集合本身与正整数集等势，则称之为可数无限集的。不是无限的集合称为有限的。有限集与可数无限集统称为可数的。不是可数的集合称为不可数无限集。我们前面所讨论的信号集，大多数是不可数无限集。

§1·5　信号集的映射

前一节我们用等价关系和划分来表征一个信号集中元素的特性，本节我们将用元素间更一般的关系形式，即映射来表征信号。映射是函数概念的拓广。在数学分析里，函数关系是这样的，即设A，B为实数集合R中的两个子集，如果对每一个元素$x\in A$，有一个确定的$y=f(x)$，$y\in B$与之对应，则在集A上定义了一个函数f，A为函数的定义域，B为函数取值的集合，叫函数的值域。但是，信号集的元素并不一定是一个实数，它可能是一个实数序列（时域离散信号），也可能信号本身就是一个时间函数（时域连续信号）。把函数的概念推广到一般的集合，就是一个集合的元素到另一个集合的元素的映射。从数学上讲，设A，B为两个非空集，如果存在一个规则f，使A中任一元素x，在规则f下，确定B里的一个元素y与之对应，即f：$A\to B$，则称此规则为映射。映射也可记为

$$y=f(x);\ x\in A\text{和}y\in B \tag{1·35}$$

并称元素y为元素x（在映射f下）的象，称集A为映射f的定义域，所有元素x的象y的全体记为B'，$B'\subseteq B$，称之为映射f的值域。如果$B'=B$，则称f为A到B上的映射。若$B'\subseteq$

B，则称f为A到B中的映射。

注意，映射总是单值的，即A中的每一个x，只有唯一的一个象y与之对应。但反过来，并不要求所有x一定对应于不同的y。如果可能有多个x的象为同一个元素y，则称该映射是多对一的，如果A集中不同元素的象为在B集中的不同的元素，则称该映射为一对一映上。如果集A到集B的映射f为一对一的映射，即集A与集B的元素存在着一一对应关系，则可定义f的逆映射f^{-1}：$B\to A$。

映射是数学中的基本概念之一，例如，实变函数是实数集到实数集的映射，积分可以看作是可积函数集到数集上的映射，求导可以看成是可导函数集到函数集中的映射。广义说来，任何一种运算也可以看成是一种映射。信号处理系统就是对信号进行某种运算，因此信号处理系统的任何一个环节，都可以看成是一种信号集到信号集的映射。例如，采样过程是时域连续信号集到时域离散信号集的映射。幅度量化过程就是实数集到有限状态集的映射。前面所述相关接收机是输入信号集到相关系数（实数集）的映射。总之，任何一个信号处理系统可以看成如图1·6所示的系统，其输入为$x\in X$，输出为$y\in Y$，则它们可表示为一种映射f：$X\to Y$。应当指出，上述框图中集合X和Y，可以是时域连续信号集，也可以是时域离散信号集或者有限状态的码组，因此，它的应用是十分广泛的。

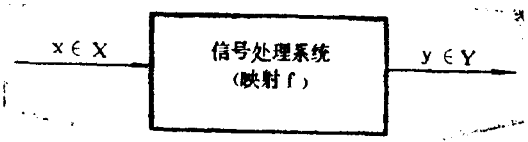


图1·6　信号处理系统

一个信号处理系统可能包括二个或多个子系统，此时，用复合映射的观点来分析系统是十分方便的，如图1·7所示。显然映射f：$X\to Z$是由两个映射f_1：$X\to Y$和f_2：$Y\to Z$复合而形成，可记为$f=f_2f_1$，它表示

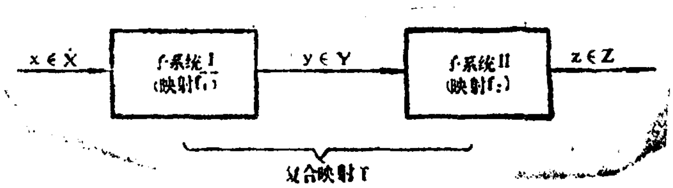


图1·7　复合系统看作复合映射

$$f\text{：}X\to Z\Rightarrow z=f_2(y)=f_2[f_1(x)]=f(x),\quad x\in X \tag{1·36}$$

为了进一步说明复合映射概念在信号处理中的应用，我们回到例1·5所讨论的使用相关接收机的二进制数据通讯系统。此时，图1·7中的子系统I完成相关运算，即f_1为输入信号集Y到数集R的映射：

$$f_1\text{：}Y\to R \tag{1·37}$$

式中，

$$Y=\{y;\ y(t),\ t\in R\}$$