

工程塑性理論基礎

O·霍夫曼 G·沙克斯 著

乔 端 孙 梁 譯



中国工业出版社

52.55
788



工程塑性理論基礎

O·霍夫曼 G·沙克斯 著

乔 端 孙 梁 譯

中国工业出版社

本书根据 O. 霍夫曼和 G. 沙克斯1953年合著的“工程塑性理論基础”一书譯出。书中扼要地总结了 1953 年以前塑性理論基本原理及其在工程应用上的一些重要成就；介绍了塑性理論的基本定律，主要学說，理想塑性与应变硬化材料的塑性流动，以及塑性稳定等問題；尤其着重地討論了金属压力加工中的大变形問題，对于各种压力加工方法进行了較为系統、全面而又扼要的討論。书中包括了作者之一 G. 沙克斯及其合作者的工作成就。

本书文字簡练，內容扼要，尽量使用較为浅近的数学工具。为了我国讀者閱讀方便，在中文譯本中已将原书中的英制图表改換成 1957 年俄文譯本中的公制图表。可作为高等工业学校金属压力加工、冶金机械、机械制造等专业“塑性理論”或“金属壓力加工”課程的教学参考书，也可供固体力学等专业及有关工程技术人员参考。

O.Hoffman, G.Sachs
INTRODUCTION TO
THE THEORY OF PLASTICITY
FOR ENGINEERS
MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.

1953

* * *

工程塑性理論基础

乔 端 孙 梁 譯

*

冶金工业部工业教育司編輯 (北京猪市大街78号)

中国工业出版社出版 (北京復興路丙10号)

(北京市书刊出版事业許可證出字第 110号)

中国工业出版社第三印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本850×1168 1/32 · 印张10³/8 · 字数269,000

1964年2月北京第一版 · 1964年2月北京第一次印刷

印数0001—1,400 · 定价 (10-7) 1.75元

*

统一书号：K15165 · 2544(冶金-433)

作者序言

本书介紹塑性理論的基本原理及其在工程技术上最重要的应用。連續介质力学的这个分支——研究延展性金属超过弹性阶段后性态的塑性理論，历史还比較短。在 1868 年到 1875 年間，当屈雷斯卡 (Tresca)、圣維南 (Saint-Venant) 和列維 (Lévy) 等人首次嘗試建立較能令人滿意的塑性变形理論公式时，研究弹性阶段性态的弹性理論，不論在基本原理方面，或者在它的应用方面，都已經发展到相当高的水平。塑性理論迈出了重要的第一步后，出現了約 40 年左右的停滞期。一直到卡尔曼 (von Kármán)、哈尔 (Haar) (1909 年) 和密悉司 (von Mises) (1913 年) 等人重新开拓这个領域，并推动了第一次世界大战后塑性理論的巨大发展。

几年前，作者們感到需要对近三十年来塑性理論方面所作的工作加以总结，同时对塑性理論的基本原理和它在工程上的重要应用，能够以深入浅出的叙述方式和較严谨的结构层次加以阐述。

本书的第一篇叙述連續介质的力学基础和塑性理論的几个主要学說。这一篇的內容是为看懂本书以后各篇所必需的。在应用方面着重介紹工程問題的实际解法及其与實驗結果的比較。第二、三篇討論几个塑性經典問題，包括小塑性变形，即与弹性变形同数量級的塑性变形問題。第三篇的最后一章和整个第四篇討論大塑性变形問題，而第四篇专门討論工程技术上很重要的金属压力加工的各种方法。

因为本书計劃作为高等工业学校高年級学生的教科书，以及工程技术人员的参考书，作者們根据多年讲授这門課程的經驗，采用最适合这些讀者的叙述方法。所使用的数学工具，只須讀者們具备微积分学的运用知識，而这是現代工程师訓練中的一个重

要部份。超出了这个范围的张量概念，我們是从应力状态和应变状态的物理概念推导出来的；并以应力或应变的九个分量的矩阵形式来表示张量。为了簡便起見，該矩阵也用一个黑体大写字母（例如，***S***）来代表。这和通常用黑体小字母代表矢量是相似的（例如，***s***）。这个符号使相应张量分量之間的几个綫性关系式（一般为九个）概括为一个单一的关系式，并給出了应力—应变的簡明公式。

克里夫兰，俄亥俄

賽勒庫斯，紐 約

1953年1月

O. 霍夫曼

G. 沙克斯

本书采用的符号

| | | | |
|-----------------|-------------------------|---|---------------|
| a | 内半径 | E | 应变张量 |
| b | 外半径；梁的宽度 | F | 应力函数；拉拔力 |
| e | 自然对数的底 | G | 剪切模量 |
| ϵ | 无旋的相对位移矢量 | I_1, I_2, I_3 | 应力张量的不变量 |
| f | 摩擦系数 | J_1, J_2, J_3 | 应变张量的不变量 |
| \mathbf{f} | 力矢量 | K | 体积模量 |
| h | 梁的高度；带材的厚度 | L | 平板的长度 |
| k | 应力—应变关系中的系数 | M | 弯距 |
| \mathbf{l} | 点的位置矢量 | P | 作用于柱状杆上的轴向载荷 |
| m | 应变硬化指数 | R | 半径；面积减缩率 |
| n | 单位法线矢量 | S | 纵列连续式拉拔时模孔的间距 |
| r | 径向距离 | s | 应力张量 |
| σ | 应力矢量 | T | 扭矩 |
| t | 时间 | U | 单位体积内的弹性应变能 |
| u_x, u_y, u_z | 位移分量 | W | 单位体积内的塑性变形功 |
| w | 轧制理论中的参数 | γ | (条件) 剪应变 |
| x, y, z | 直角坐标 | $\tilde{\gamma}$ | 对数剪应变 |
| A | 面积；应力—应变关系中的常数；轧制理论中的常数 | $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ | 直角坐标系中剪应变分量 |
| B | 应力—应变关系中的常数；线材拉拔理论中的常数 | γ_8 | 八面体剪应变 |
| C | 积分常数 | ϵ | (条件) 线应变 |
| D | 密度；线材或棒材的直径 | $\tilde{\epsilon}$ | 对数线应变 |
| E | 杨氏模量 | | |

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ——直角坐标系中的
綫應變
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ——主應變
 $\epsilon_{11}, \epsilon_{111}, \epsilon_{1111}$ ——最大的, 中間
的, 最小的主應變
 ϵ_m ——平均應變
 ϵ_8 ——八面體綫應變
 ϑ ——單位長度扭轉角
 λ ——聖維南塑性流动定律中
的系数
 μ ——粘性系数; 羅德应力參
量
 ν ——泊松比; 羅德應變參量
 ρ ——彈塑性交界處的半徑
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ——直角坐标系中
的正應力

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ——主應力
 $\sigma_1, \sigma_{11}, \sigma_{111}$ ——最大的, 中間
的, 最小的主
應力
 σ_m ——平均應力
 σ_8 ——八面體正應力
 σ_0 ——拉伸屈伏极限
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ——直角坐标系
中的剪應力
分量
 τ_8 ——八面體剪應變
 φ ——摩擦角 ($\tan^{-1} f$)
 ω ——角速度
 Δ ——(条件) 体應變
 $\bar{\Delta}$ ——对數体應變

目 次

作者序言

本书采用的符号

第一篇 基本定律和主要学说

| | |
|----------------------|----|
| 第一章 应力状态 | 1 |
| § 1.1 一点的应力 | 1 |
| § 1.2 应力张量 | 4 |
| § 1.3 主应力 | 5 |
| § 1.4 应力张量的不变量 | 8 |
| § 1.5 球形应力张量和应力偏量 | 9 |
| § 1.6 莫尔的应力状态表示法 | 10 |
| § 1.7 八面体应力 | 16 |
| § 1.8 第一种特殊情况：单向应力状态 | 18 |
| § 1.9 第二种特殊情况：平面应力状态 | 19 |
| 第二章 应变状态 | 23 |
| § 2.1 一点的无穷小应变。应变张量 | 23 |
| § 2.2 主应变 | 28 |
| § 2.3 应变张量的不变量 | 29 |
| § 2.4 球形应变张量和应变偏量 | 30 |
| § 2.5 应变状态的莫尔圆 | 31 |
| § 2.6 八面体应变 | 32 |
| § 2.7 有限变形 | 33 |
| 第三章 材料的弹性 | 38 |
| § 3.1 弹性应力—应变关系 | 39 |
| § 3.2 弹性应变能 | 40 |
| 第四章 强度理论 | 41 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| § 4.1 古典强度理論 | 42 |
| § 4.2 屈伏条件或“塑性条件” | 45 |
| § 4.3 赫艾一卫斯特哥阿德应力空間 | 47 |
| § 4.4 屈伏曲面 | 48 |
| 第五章 塑性应力一应变关系 | 52 |
| § 5.1 拉伸試驗 | 52 |
| § 5.2 应变硬化金属的普遍应力一应变关系 | 54 |
| § 5.3 圣維南塑性流动理論 | 56 |
| § 5.4 柔埃斯弹—塑性变形理論 | 60 |
| § 5.5 汉基小塑性变形理論 | 61 |
| § 5.6 塑性变形功 | 62 |
| 第六章 實驗資料 | 65 |
| § 6.1 塑性条件 | 65 |
| § 6.2 薄壁管在軸向載荷和內压力联合作用下的實驗 | 66 |
| § 6.3 薄壁管在軸向拉伸和扭轉联合作用下的實驗 | 68 |
| § 6.4 圣維南塑性流动理論的實驗驗証 | 69 |
| § 6.5 关于塑性實驗的評論 | 71 |
| § 6.6 关于摩擦力的實驗資料 | 75 |

第二篇 理想塑性体的塑性流动問題

| | |
|---------------------------------|-----------|
| 第七章 在內压力作用下厚壁的球形壳体 | 79 |
| § 7.1 不可压缩的空間径向流动 | 79 |
| § 7.2 平衡微分方程式 | 82 |
| § 7.3 不可压缩的弹性壳体 | 83 |
| § 7.4 开始屈伏的条件 | 85 |
| § 7.5 弹塑性壳体中的应力 | 86 |
| § 7.6 弹塑性壳体的变形 | 89 |
| 第八章 在內压力作用下的厚壁管 | 92 |
| § 8.1 平面的径向流动 | 92 |
| § 8.2 平衡微分方程式 | 93 |
| § 8.3 不可压缩的弹性管 | 95 |
| § 8.4 开始塑性变形的条件 | 98 |

| | |
|-------------------------------|------------|
| § 8.5 平面应变条件下弹一塑性管中的应力 | 99 |
| § 8.6 平面应变条件下弹一塑性管的变形 | 103 |
| § 8.7 广义平面应变条件下的完全塑性管 | 104 |
| § 8.8 平面应力条件下的完全塑性管 | 108 |
| 第九章 旋轉的圓柱体和圓盤 | 111 |
| § 9.1 弹性的旋轉圓柱体 | 111 |
| § 9.2 塑性状态下的旋轉圓柱体 | 114 |
| § 9.3 弹性旋轉圓盤 | 115 |
| § 9.4 塑性状态下的旋轉圓盤 | 117 |
| § 9.5 弹性旋轉圓环 | 118 |
| § 9.6 塑性状态下的旋轉圓环 | 119 |
| 第十章 扭轉和弯曲 | 121 |
| § 10.1 实心圆截面杆的扭轉 | 121 |
| § 10.2 狹矩形截面杆的弯曲 | 126 |
| 第十一章 平面塑性流动問題 | 130 |
| § 11.1 不可压缩的平面流动 | 130 |
| § 11.2 “平面应变”条件下塑性材料中的应力 | 136 |
| § 11.3 在任意直角坐标系中的平衡方程式 | 141 |
| § 11.4 以滑移綫为参考系的平衡方程式 | 144 |
| § 11.5 最简单的滑移綫场 | 148 |
| § 11.6 例題 I：介于二粗糙平行平板間的板条压縮問題 | 151 |
| § 11.7 例題 II：半无限体上作用着条形載荷 | 154 |

第三篇 应变硬化材料的塑性流动問題

| | |
|--------------------------|------------|
| 第十二章 应变硬化阶段的扭轉和弯曲 | 159 |
| § 12.1 实心圆截面柱体的扭轉 | 159 |
| § 12.2 狹矩形截面杆的弯曲 | 162 |
| 第十三章 压杆的屈曲 | 164 |
| § 13.1 狹矩形截面杆的軸向压縮和弯曲的組合 | 164 |
| § 13.2 压杆的塑性屈曲 | 168 |
| 第十四章 拉伸时的失稳現象 | 170 |
| § 14.1 普遍应力—应变关系的简化 | 171 |

| | |
|-------------------------------|-----|
| § 14.2 拉伸試件的成頸 | 172 |
| § 14.3 两向拉伸作用下平板的成頸 | 174 |
| § 14.4 在内压力作用下薄壁球形壳体的失稳 | 178 |
| § 14.5 在内压力作用下薄壁管的失稳 | 180 |

第四篇 金属加工变形方法的理论

| | |
|---------------------------------------|------------|
| 第十五章 无摩擦的拉拔和挤压 | 187 |
| § 15.1 一般概述 | 187 |
| § 15.2 空间的径向流动 | 187 |
| § 15.3 线材拉拔时的应力 | 190 |
| § 15.4 线材拉拔时的最大减缩率 | 192 |
| § 15.5 圆柱形杆挤压时的应力 | 192 |
| § 15.6 圆柱形杆挤压时的最大减缩率 | 194 |
| § 15.7 平面径向流动 | 194 |
| § 15.8 带材拉拔和挤压时的应力 | 196 |
| § 15.9 带材拉拔和挤压时的最大减缩率 | 199 |
| § 15.10 拉拔和挤压时所消耗的功 | 199 |
| § 15.11 由功的消耗来确定拉拔应力 | 200 |
| 第十六章 圆柱体的拉拔和挤压 | 201 |
| § 16.1 一般概述 | 201 |
| § 16.2 线材拉拔 | 201 |
| § 16.3 后张力的影响 | 206 |
| § 16.4 弹性后张力 | 209 |
| § 16.5 挤压 | 210 |
| § 16.6 应变硬化的影响 | 211 |
| 第十七章 平面应变条件下通过楔形模孔的拉拔和挤压 | 212 |
| § 17.1 一般概述 | 212 |
| § 17.2 带材拉拔时的微分方程式 | 213 |
| § 17.3 带材拉拔时的应力 | 215 |
| § 17.4 管子带心棒拉拔时的微分方程式 | 215 |
| § 17.5 管子的各种拉拔方法的常数B | 218 |
| § 17.6 无摩擦的拉拔 | 219 |

| | |
|--|------------|
| § 17.7 带材拉拔和管子带顶头拉拔时的最大减缩率 | 220 |
| § 17.8 管子带可动心棒的拉拔 | 222 |
| § 17.9 管子带可动心棒拉拔时的最大减缩率 | 223 |
| § 17.10 管子带可动心棒拉拔时的拉拔力 | 224 |
| § 17.11 实验结果 | 227 |
| § 17.12 纵列連續式拉拔 | 229 |
| 第十八章 平面应变条件下通过圆柱形固定工具间的拉拔 和挤压 | 233 |
| § 18.1 一般概述 | 233 |
| § 18.2 微分方程式 | 233 |
| § 18.3 微分方程式的一般解 | 236 |
| § 18.4 固定模具间的拉拔 | 237 |
| § 18.5 固定模具间的挤压 | 239 |
| § 18.6 工具弹性压扁的影响 | 240 |
| 第十九章 平面应变条件下薄板和带材的轧制 | 242 |
| § 19.1 一般概述 | 242 |
| § 19.2 无张力轧制 | 242 |
| § 19.3 无张力轧制的极限 | 245 |
| § 19.4 带前后张力的轧制 | 246 |
| § 19.5 惯性轧辊间的拉拔 | 247 |
| 第二十章 平面应变条件下圆形工具间的非对称塑性流动 | 250 |
| § 20.1 一般概述 | 250 |
| § 20.2 通过不同约束的工具间的金属流动 | 251 |
| § 20.3 一个驱动辊和一个惯性辊的轧制问题 | 252 |
| § 20.4 用一个轧辊和一个固定的模具进行加工变形 | 256 |
| § 20.5 工具的圆半径不相同时的基本方程式 | 257 |
| § 20.6 用圆半径不相同的工具进行加工变形 | 258 |
| § 20.7 用固定的模具和固定的心棒进行管子拉拔 | 259 |
| § 20.8 用辊模和固定的心棒进行管子拉拔 | 260 |
| § 20.9 使用固定的心棒进行管子轧制 | 261 |
| § 20.10 用固定的模具和可动的心棒进行管子拉拔 | 262 |
| § 20.11 用辊模和可动的心棒进行管子拉拔 | 264 |

| | |
|--|------------|
| §20.12 使用惰性可动的心棒进行管子轧制 | 265 |
| §20.13 加工变形时二接触表面上摩擦系数不相同的基本关系式 | 265 |
| §20.14 接触表面上摩擦系数不同的各种加工变形方法 | 266 |
| §20.15 用一个固定的和一个飘动的工具的加工变形問題 | 267 |
| 第二十一章 鍛压 | 270 |
| § 21.1 一般概述 | 270 |
| § 21.2 平面应变条件下等厚度平板的鍛压微分方程式 | 270 |
| § 21.3 平面应变条件下金属与模具間用庫伦摩擦关系的 平板鍛压問題 | 271 |
| § 21.4 平面应变条件下金属与模具間用粘着关系的平板鍛压問題 | 273 |
| § 21.5 平面应变条件下用混合摩擦关系的平板鍛压問題 | 274 |
| § 21.6 平面应变条件下变厚度板的鍛压問題 | 277 |
| § 21.7 等厚度圆盘的鍛压問題 | 278 |
| 第二十二章 薄壁壳体的加工变形 | 280 |
| § 22.1 一般概述 | 280 |
| § 22.2 軸对称壳体的平衡方程式 | 282 |
| § 22.3 通过圆錐形模孔空心（无心棒）拉拔管子时的应力 | 284 |
| § 22.4 通过圆錐形模孔空心（无心棒）挤压管子时的应力 | 287 |
| § 22.5 用圆錐形模孔将管子收口时应力的其他解法 | 289 |
| § 22.6 用圆形模孔将管子收口时的应力 | 291 |
| § 22.7 无摩擦空心拉拔和挤压时的应力和应变 | 292 |
| § 22.8 在变壁厚条件下无摩擦的空心拉拔和挤压 | 294 |
| § 22.9 无摩擦深冲过程的应力和应变 | 296 |
| 第二十三章 平板的弯曲 | 300 |
| § 23.1 一般概述 | 300 |
| § 23.2 平衡微分方程式 | 301 |
| § 23.3 宽平板承受弯曲时的应力 | 302 |
| § 23.4 宽平板弯曲时的应变 | 304 |
| 俄文参考书目 | 308 |
| 人名索引 | 310 |
| 内容索引 | 312 |

第一篇 基本定律和主要学說

第一章 应力状态

在本章中，根据以后讲述塑性体力学的需要，推导和介绍連續介质处于平衡时的关系式。这些关系式，并不限定只适用于某些具有特殊力学性质的介质，而是普遍地适用于所有連續介质。

§ 1.1 一点的应力

同工程上的习惯用法一样，术语“应力”在这里用来表示内力的强度，該內力作用于被假想平面截开的物体质点之間。

我們在物体内取一点，并假想它被很小的封闭曲面包围着；在封闭曲面上的每一个平面单元 dA 上作用着力 df ，或者說，每一个平面单元上作用着其值为 df/dA 的应力（应力即是单位面积上的力）。

上述一点的应力状态，今后将认为它是均匀的应力状态。均匀应力状态由下述特性所定义：即在均匀应力状态下，应力与平面单元 dA 的形状和实际大小无关，和 dA 到给定点所取的微小距离也无关；但与平面单元的方位有关，平面单元的方位则由該平面单元外法线方向的单位矢量 n 来确定❶。对于一点的应力状态，如给出点上任意指定的单位法线矢量 n ，相应的应力矢量

$$\mathbf{s}_n = \frac{df}{dA}$$

已知时，则一点的应力状态就确定了。下标 n 表示应力与平面单

❶ 这里所说的均匀应力状态是指封闭曲面每一平面单元上的应力是均匀分布的，而不是說每一平面单元上的应力值都相等——譯者。

元的外法綫方向 \mathbf{n} 有关。

在直角坐标系的三个坐标軸 x 、 y 、 z 上 \mathbf{n} 的三个分量为：

$$n_x = \cos(n, x);$$

$$n_y = \cos(n, y);$$

$$n_z = \cos(n, z),$$

其中 (n, x) 是矢量 \mathbf{n} 与 x 軸之間的夹角，余类推。 \mathbf{s}_n 的分量为：

$$s_{nx};$$

$$s_{ny};$$

$$s_{nz}.$$

根据本书采用的符号系統，应力的直角坐标分量的記号有两个下标：其中第一个表示应力作用面的法綫方向；第二个表示应力分量的方向。另外，当单位矢量 \mathbf{n} 和三个坐标軸中某一个坐标軸重合时，常应用特別符号：应力的法向分量以字母 σ 表示，并只用一个下标；切向分量用字母 τ 来表示。图1·1表示一个小平行六面体，各个面垂直于 x 、 y 、 z 軸，而

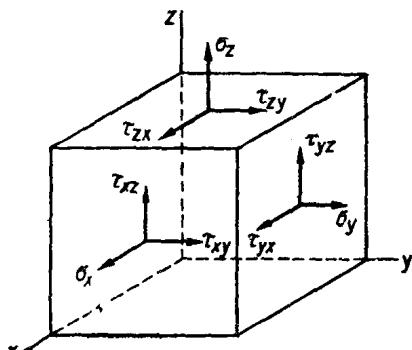


图 1·1 作用于单元体上的应力分量

应力作用于靠近讀者的面上①。均匀应力状态，要求作用于距讀者較远的面上的应力分量，同靠近的面上相应的应力分量大小相等方向相反。

下表为两种符号系統之間的对应关系：

| \mathbf{n} 的方向: | x | y | z |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| x 分量: | $s_{xx} \equiv \sigma_x$ | $s_{yx} \equiv \tau_{yx}$ | $s_{zx} \equiv \tau_{zx}$ |
| y 分量: | $s_{xy} \equiv \tau_{xy}$ | $s_{yy} \equiv \sigma_y$ | $s_{zy} \equiv \tau_{zy}$ |

① 指六面体的正面、右面、上面三个面——譯者。

$$z \text{ 分量: } s_{xz} \equiv \tau_{xz}, \quad s_{yz} \equiv \tau_{yz}, \quad s_{zz} \equiv \sigma_z$$

上面列成一个表的九个分量，是描写围绕一点的封闭面上的应力最少的数据。下面将证明，已知九个分量就能计算任意方位平面上的，也即任意单位矢量 \mathbf{n} 上的应力 s_n 。为此，围绕这一点取一个四面体作为单元体，它的三个面垂直于相应的坐标轴，而第四个面垂直于给定的单位矢量 \mathbf{n} （见图1·2）。根据单元体的静力平衡，可以分别写出沿 x 、 y 、 z 三个方向的平衡方程式：

$$s_{nx} A_{ABC} - \sigma_x A_{OBC} - \tau_{yx} A_{OAC} - \tau_{zx} A_{OAB} = 0;$$

$$s_{ny} A_{ABC} - \tau_{xy} A_{OBC} - \sigma_y A_{OAC} - \tau_{zy} A_{OAB} = 0; \quad (1 \cdot 1)$$

$$s_{nz} A_{ABC} - \tau_{xz} A_{OBC} - \tau_{yz} A_{OAC} - \sigma_z A_{OAB} = 0,$$

其中， A_{ABC} =三角形ABC的面积

$$A_{OBC}=\text{三角形}OBC\text{的面积}=A_{ABC}\cos(n, x)$$

$$A_{OAC}=\text{三角形}OAC\text{的面积}=A_{ABC}\cos(n, y)$$

$$A_{OAB}=\text{三角形}OAB\text{的面积}=A_{ABC}\cos(n, z)$$

将 A_{OBC} 、 A_{OAC} 、 A_{OAB} 的表达式代入方程式 (1·1)，整理后，则得到作用于法线为 \mathbf{n} 的平面单元上的应力分量：

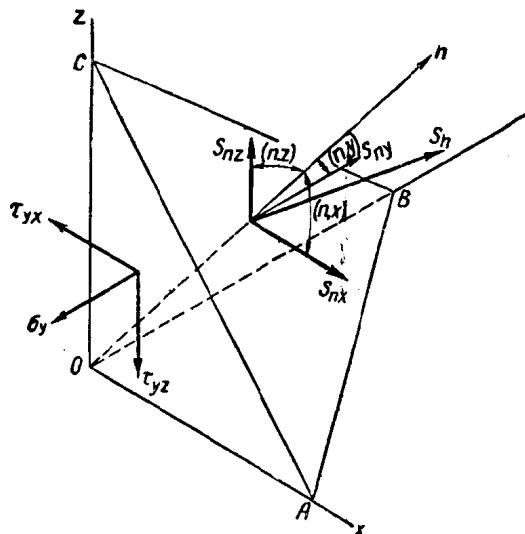


图 1·2 作用于四面体单元上的应力

$$\begin{aligned}s_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) \\s_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) \quad (1 \cdot 2) \\s_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z)\end{aligned}$$

对于如图1·1所示单元体上的应力，还可以写出三个表示所有力对于三个坐标轴的力矩等于零的平衡方程式。把这三个方程式整理后，即可得到所謂剪应力互等定理的下列三个关系式：

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \quad (1 \cdot 3) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}$$

归結起来，当六个分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 已知后，一点的应力状态便确定了。

§ 1.2 应力张量

三个綫性方程式 (1·2) 表示由任意給定的矢量 n 到另一个矢量 s_n 的变换；方程式(1·2) 的九个系数构成一个数学上的整体，称为张量，并且由于方程式 (1·3) 表明剪应力互等，所以它还是一个对称张量。系数 $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ 称为应力张量的分量，它们的值决定于参考系的选择。

为方便起見，可以用一个（黑体）字母来表示张量，或者，为了更清楚起見，用分量的矩阵来表示它。因此可以选取下面符号中的一种来表示应力张量：

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

从 x, y, z 坐标系变到另一个 x', y', z' 坐标系，这些分量的新值，可以根据它們的物理意义分两个步驟計算。現在來計算 $\sigma_{x'}$ 和 $\tau_{x'y'}$ ，其余分量的計算公式和这两个分量的計算公式是相同的。所以有这两个計算的例子就足够了。

第一步，使 n 和 x' 軸重合，应用方程式 (1·2) 求出法綫方向为 x' 軸的平面单元上应力矢量的 x, y, z 分量，为：