

高等学校教材

现代谱估计

—原理与应用

肖先赐 编

哈尔滨工业大学出版社

现代谱估计——原理与应用

哈尔滨工业大学出版社

TN911.23

X42

354621

现代谱估计

—原理与应用

肖先赐 编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书经机械电子工业部无线电技术与信息系统教材编审小组审定为高等学校教材,可作为电子类专业以及其他专业研究生和高年级本科生课程的教材或教学参考书,也可供从事信号处理方面工作的广大科技人员参考。

本书主要介绍现代谱估计的各种方法及其应用。包括谱估计的直接方法、最大熵方法、ARMA模型方法、矩阵特征结构分析以及其他方法。读者通过学习本书可以比较快地进入现代谱估计这一分支学科的前沿领域。

DV46/11

现 代 谱 估 计

——原理与应用

肖先赐 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨建筑工程学院附属印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张12.625 字数288 000

1991年8月第1版

1991年8月第1次印刷

印数 1—2000

ISBN 7-5603-0216-5 /TN·16 定价3.65元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校，中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的有关七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986~1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践，师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部电子类教材办公室

前 言

本教材系按机械电子工业部的工科电子类专业教材1986~1990年编审出版规划,由无线电技术与信息系统教材编审委员会电子系统编审小组征稿,推荐出版,责任编辑丁子明。

本教材由成都电子科技大学(即原成都电讯工程学院)肖先赐编,哈尔滨工业大学刘永坦、孟宪德和北京航空航天大学郑玉簋担任主审。

本教材是作者对国内外各种刊物上发表的谱估计方法进行归纳、总结,并在教学和科研实践的基础上而编写成的。

本课程的参考学时数为50学时,其主要内容有六章:第一章讨论了谱估计的直接方法,即根据平稳随机过程的功率谱密度与相关函数之间的傅立叶变换对的关系,利用快速傅立叶变换(FFT)算法实现的谱估计方法。第二章讨论了最大熵谱估计方法,即AR模型谱估计方法。第三章讨论了ARMA模型谱估计方法。ARMA模型比AR模型更具有一般性。与AR模型方法相比,ARMA模型谱估计还没有公认的成熟适用的算法。本章介绍了三种算法,各有其特点,适用于不同的情况。第二、三章所讨论的谱估计方法都归结为模型参考估计问题。第四章对这一研究方向的情况作了概括介绍,并给出了几种典型算法。第五章介绍了几个典型例子,同时也介绍了在谱估计发展过程中有过重要影响的极大似然算法。第六章是应用举例,分别介绍了谱估计方法在语音处理、雷达杂波谱估计、测向以及地球物理勘探方面的应用情况。附录中给出了几种谱估计算法的计算机程序,可供读者直接使用。

阅读本书,需要一定的基础知识。主要是线性代数、随机过程与统计检测、计算方法以及信号和系统等方面的基础知识。这些知识,理工科许多专业的高年级大学生和研究生一般都具备。

由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编者

1989年9月

目 录

第一章 功率谱估计的直接方法	(1)
1.1 相关函数和功率谱	(1)
1.2 相关函数的估计	(3)
1.3 功率谱估计	(5)
1.4 改进措施	(10)
1.5 本章小结	(17)
习题	(17)
参考资料	(19)
第二章 最大熵功率谱估计	(20)
2.1 最大熵功率谱密度估计	(20)
2.2 线性最小均方误差估计	(25)
2.3 Levinson-Durbin算法	(30)
2.4 AR模型谱估计方法	(35)
2.5 格型预报滤波器的性能	(42)
2.6 AR模型估值器阶数的确定	(46)
2.7 最大熵谱估值器的统计特性	(47)
2.8 改进算法	(49)
2.9 本章小结	(53)
习题	(54)
参考资料	(55)
第三章 ARMA模型谱估计	(56)
3.1 有限参数系统模型	(56)
3.2 MA模型谱估计	(60)
3.3 两步法ARMA模型功率谱估计	(61)
3.4 ARMA模型谱估计的迭代算法	(67)
3.5 采用递推极大似然算法的ARMA模型谱估计	(75)
3.6 功率谱估计值的方差下界	(81)
3.7 本章小结	(87)
习题	(87)
参考资料	(88)

第四章 基于特征结构分析的谱估计方法	(90)
4.1 Pisarenko正弦波提取法	(90)
4.2 矩阵奇异值分解方法在谱估计中的应用	(96)
4.3 MUSIC算法	(103)
4.4 本章小结	(110)
习题	(110)
参考资料	(111)
第五章 谱估计的其他方法	(113)
5.1 最大似然谱估计方法(Capon)	(113)
5.2 Prony谱密度及谱线估计方法	(116)
5.3 最小交叉熵谱估计方法	(121)
5.4 采用 l_1 范数最小化的谱估计方法	(129)
5.5 本章小结	(134)
习题	(135)
参考资料	(135)
第六章 谱估计的应用	(137)
6.1 语音的线性预测编码(LPC)	(137)
6.2 雷达杂波谱估计	(145)
6.3 空间谱估计测向方法	(148)
6.4 谱估计方法在地震信号处理中的应用	(152)
6.5 本章小结	(158)
参考资料	(158)
附录 谱估计的计算机程序	(160)
A1. Levinson算法	(160)
A2. 最大熵谱估计Burg算法	(161)
A3. AR模型谱估计Marple算法	(164)
A4. 矩阵奇异值分解(SVD) 算法	(169)
A5. ARMA模型谱估计CDE迭代算法	(176)
A6. MUSIC算法	(185)

第一章 功率谱估计的直接方法

功率谱和相关函数之间的关系是一对傅立叶变换,从观测数据直接估计相关函数,根据估计出来的相关函数,求它的傅立叶变换,就可以得到功率谱的估计值。这一章我们要讨论的就是这种直接方法的原理、性能分析和实用算法以及它的主要问题。

1.1 相关函数和功率谱

实际待处理的信号都是具有随机性质的。一方面信号本身可能就是随机的,例如语音信号、雷达回波、声纳信号、地震勘探信号……等等都是如此。另一方面,即使是确定性信号,当将它作数字处理时,量化过程就要引入噪声,使得输入数字信号处理器的信号也是确定性信号加白噪声的形式。

随机信号可用其多维概率分布函数,或者在许多情况下也可以用其各阶矩全面地描述其统计特性。但对于许多理论和工程上的实际问题,人们所关心的主要是其一阶和二阶统计特性。这就是均值(一阶矩)和相关函数(二阶原点矩)。

进行数字处理时,信号是一随机序列,它可能是一连续信号的取样,也可能是存放在某一数据文件中的数据。以下的讨论将主要针对离散序列来进行。有时为了分析方便,也要用到连续信号,由于连续信号的傅立叶变换和离散信号的傅立叶变换是对偶的,因此可以将一个域中的分析结果直接应用到另一个域中去,这样,我们就可以避免做许多重复性工作。

设 $\{x(n), n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 为一随机序列。其均值 $m_x(n)$ 和相关函数 $r_{xx}(n_1, n_2)$ 分别定义如下

$$m_x(n) = E\{x(n)\} \quad (1.1)$$

$$r_{xx}(n_1, n_2) = E\{x(n_1)x^*(n_2)\} \quad (1.2)$$

式中“*”上标表示复共轭值。若有另一随机序列 $\{y(n), n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$,则可定义互相关函数 $r_{xy}(n_1, n_2)$ 如下

$$r_{xy}(n_1, n_2) = E\{x(n_1)y^*(n_2)\} \quad (1.3)$$

以上诸式中, $E\{\xi\}$ 表示对随机量 ξ 求数学期望值。

若 $m_x(n) = m_x = \text{常数}$, $r_{xx}(n_1, n_2) = r_{xx}(n_1 - n_2)$, 则称 $\{x(n)\}$ 为广义平稳序列。若 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 均为广义平稳序列,且 $r_{xy}(n_1, n_2) = r_{xy}(n_1 - n_2)$, 则称 $\{x(n)\}$ 和 $\{y(n)\}$ 为广义联合平稳序列。

广义平稳随机序列 $\{x(n)\}$ 的相关函数 $r_{xx}(m)$ 和它的功率谱 $S_x(\omega)$ 之间是傅立叶变换对的关系,即

$$S_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) e^{-j\omega m} \quad (1.4)$$

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) e^{j\omega m} d\omega \quad (1.5)$$

这一关系式常称为维纳-欣钦定理。

如果说, 相关函数 $r_{xx}(m)$ 表示随机序列 $\{x(n)\}$ 的二阶“时域”的统计特性, 那么, 功率谱 $S_x(\omega)$ 表示的就是频域的统计特性, 它有明显的物理意义, 由 (1.5) 式可见, 当 $m=0$ 时, $R_{xx}(0)$ 等于 $\{x(n)\}$ 的功率, 等号右边为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) d\omega$$

显然, $S_{xx}(\omega)$ 为序列 $\{x(n)\}$ 的功率沿频率轴的分布, 即序列的功率密度, 也就是功率谱密度。

由相关函数和功率谱密度的定义, 不难得出它们的一些基本性质, 主要有:

1. 当 $\{x(n)\}$ 为复序列时, $r_{xx}(-m) = r_{xx}^*(m)$; 若 $\{x(n)\}$ 为实序列, 则相关函数为偶函数, 即 $r_{xx}(-m) = r_{xx}(m)$ 。
2. 相关函数的极大值出现在 $m=0$ 处, 即 $|r_{xx}(m)| \leq r_{xx}(0)$ 。
3. 若 $x(n)$ 含有周期性分量, 则 $r_{xx}(m)$ 也含有同一周期的周期性分量, 否则, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $r(m) \rightarrow 0$ 。
4. 当 $x(n)$ 为实序列时, $S_x(\omega)$ 为非负实对称函数, 即 $S_x(-\omega) = S_x(\omega)$ 和 $S_x(\omega) \geq 0$ 。

当一平稳随机序列 $\{x(n)\}$ 通过一线性非时变系统时, 其输出也是一平稳随机序列 $\{y(n)\}$ 。两个序列的相关函数、功率谱密度和系统的冲击响应函数 $h(n)$ 或频率响应特性 $H(\omega)$ 间的关系如下

$$r_{yy}(m) = r_{xx}(m) * \rho(n) \quad (1.6)$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |H(\omega)|^2 \quad (1.7)$$

其中

$$\rho(n) = h(n) * h(-n) \quad (1.8)$$

上述关系对以后讨论谱估计问题是很有用的。

上面我们定义的均值和相关函数都用到了求数学期望值的运算 $E\{\cdot\}$ 。对于平稳随机序列, 可以证明, 在满足一定的条件下, 上述求数学期望值, 即集合平均运算与时间平均运算等效, 亦即

$$E\{x(n)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) \quad (1.9)$$

$$E\{x(n)x^*(n-m)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)x^*(n-m) \quad (1.10)$$

满足 (1.9) 式的随机序列称为具有均值遍历性的随机序列; 满足 (1.10) 式的随机序列则称为具有自相关遍历性的随机序列。

对于具有遍历性的随机序列, 我们可以用时间平均来代替集合平均, 这对实际估计

相关函数和均值是有重要意义的。以下的讨论中我们总是用时间平均来代替集合平均做实际的估值运算。这隐含着假设序列是具有遍历性的，虽然有时验证它是否满足遍历性条件是十分困难的。

1.2 相关函数的估计

我们实际所能得到的随机序列的样本数总是有限的，由有限个样本通过某种运算求出的序列的均值和自相关函数统计特征值叫做它们的估计值。显然，估计值是随机变量，对于不同批次的样本，得出的估计值是不同的。因此也应该设法求出它们的均值、方差等参数，以便衡量估计方法的好坏。下面我们讨论随机序列有限个样本的相关函数的估计问题。

设 $\{x(n), n=0, 1, \dots, N-1\}$ 为实随机序列 $\{x(n)\}$ 的一批样本，即一次实现，共有 N 个值。有时我们就简称之为长度为 N 的随机序列 $x(n)$ 。根据 (1.10) 式，可用下式估计它的自相关函数，即

$$\hat{r}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+|m|)x(n) \quad (1.11)$$

下面求 $\hat{r}(m)$ 的均值和方差。

首先求 $\hat{r}(m)$ 的均值，有

$$\begin{aligned} E\{\hat{r}(m)\} &= \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{x(n+|m|)x(n)\} \\ &= \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} r(m) = r(m) \end{aligned} \quad (1.12)$$

即相关函数的估计值 $\hat{r}(m)$ 的数学期望值等于序列 $\{x(n)\}$ 的相关函数真实值。因此 $\hat{r}(m)$ 是相关函数 $r(m)$ 的无偏估计。

其次求 $\hat{r}(m)$ 的方差。根据方差的定义，有

$$\text{Var}\{\hat{r}(m)\} = E\{(\hat{r}(m))^2\} - (E\{\hat{r}(m)\})^2$$

将 (1.11) 式代入上式等号右边第一项中，得

$$E\{(\hat{r}(m))^2\} = \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \sum_{l=0}^{N-|m|-1} E\{x(n+|m|)x(n)x(l+|m|)x(l)\}$$

这表明，为能求出相关函数估值 $\hat{r}(m)$ 的方差，必须知道随机序列 $\{x(n)\}$ 的四阶矩。为了能求得相关函数估值 $\hat{r}(m)$ 的方差的解析表达式，同时也考虑到在多数情况下，序列 $\{x(n)\}$ 是正态的，这时它的各高阶矩都可以用其一阶和二阶矩来表示。实际上，若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 为四个零均值正态随机变量，则有

$$E\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\} = E\{\xi_1\xi_2\}E\{\xi_3\xi_4\} + E\{\xi_1\xi_3\}E\{\xi_2\xi_4\} + E\{\xi_1\xi_4\}E\{\xi_2\xi_3\} \quad (1.13)$$

将(1.13)式代入 $E\{(\hat{r}(m))^2\}$ 表达式中, 得

$$E\{(\hat{r}(m))^2\} = \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \sum_{l=0}^{N-|m|-1} [r^2(m) + r^2(n-l) + r(n-l+|m|)r(n-l-|m|)]$$

代入 $\text{Var}\{\hat{r}(m)\}$ 式, 注意到

$$(E\{\hat{r}(m)\})^2 = r^2(m)$$

并更换求和变量, 令 $k = n - l$, 分别对 n 和 k 求和, 得

$$\text{Var}\{\hat{r}(m)\} = \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{k=-|m|}^{N-|m|-1} (N-|m|) \cdot [r^2(k) + r(k+|m|)r(k-|m|)] \quad (1.14)$$

由于相关函数的最大值不超过 $r(0)$, 且序列的功率有限, 即 $|r(m)| \leq |r(0)| < \infty$, 显然, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\text{Var}\{\hat{r}(m)\} \rightarrow 0$, 因此这种相关函数的估计算法是渐近一致的, 即当 m 为有限值时 $\hat{r}(m)$ 是 $r(m)$ 的一致估计。

有限长度序列 $\{x(n), n=0, \dots, N-1\}$ 的相关函数 $r(m)$ 的另一种估计方法可表示为

$$\hat{r}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+|m|)x(n) \quad (1.15)$$

上式与(1.11)式的唯一不同之处在于对 $N-|m|$ 项和取平均时不是用 $N-|m|$ 去除, 而是用 N 去除。可以想见, 当 $N \gg |m|$ 时, 这两种方法的差别应当是不大的。

现在求(1.15)式所定义的相关函数估值的数学期望值

$$\begin{aligned} E\{\hat{r}(m)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{x(n+|m|)x(n)\} \\ &= \frac{N-|m|}{N} r(m) \end{aligned} \quad (1.16)$$

可见, 它是相关函数 $r(m)$ 的有偏估计, 其偏置 b 为

$$b = r(m) - E\{\hat{r}(m)\} = \frac{|m|}{N} r(m) \quad (1.17)$$

但是, 当 $N \rightarrow \infty$, 且 $|m| \ll N$ 时, $b \rightarrow 0$, 即(1.15)式所定义的相关函数的估计值是渐近无偏估计。

估计方差也可以用同样的方法求出, 注意(1.15)和(1.11)式的唯一差别在于一个除数因子。因此可以把前面的结果直接搬过来用, 这样, (1.15)式所定义的相关函数估计值的方差为

$$\text{Var}\{\hat{r}(m)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=-N+|m|-1}^{N-|m|-1} (N-|m|-|k|) \times [r^2(k) + r(k+|m|)r(k-|m|)] \quad (1.18)$$

这样, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\text{Var}\{\hat{r}(m)\} \rightarrow 0$, 即 (1.15) 式的 $\hat{r}(m)$ 也是 $r(m)$ 的一致估计。

相关函数的傅立叶变换是功率谱密度函数。人们很自然地会想到用相关函数估计值的傅立叶变换作为功率谱密度的估计, 这就是各种谱估计直接方法的基础。用这种方法作谱估计时, 通常有 $N \gg m$, 即数据长度远大于相关函数的延迟量 m , 因此分别由 (1.11) 和 (1.15) 式给出的估计值相差不大。而且, 下面还将看到, 对 (1.15) 式所定义的相关函数取傅立叶变换求功率谱估计时, 在计算上有某些方便之处, 以后的讨论中, 如不作特别申明, 将采用这种有偏估计表示式求相关函数的估计值。

1.3 功率谱估计

相关函数和功率谱密度函数是一对傅立叶变换关系, 功率谱估计的直接方法就是将相关函数的估计值取傅立叶变换作为功率谱的估值, 即

$$\hat{S}(\omega) = \sum_{m=-M}^M \hat{r}(m) e^{-j\omega m} \quad (1.19)$$

这也叫做布莱克曼-图基(Blackman-Tukey)谱估计方法, 或简称为BT方法。

将 (1.15) 式代入 (1.19) 式, 得

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n+|m|) x(n) e^{-j\omega m} \quad (1.20)$$

由于我们仅有随机序列 $\{x(n)\}$ 的 N 个观测值 $x(0), \dots, x(N-1)$, 相关函数估值的表示式 (1.15) 中求和上限取 $N-|m|-1$ 就是为了在求和式中使 $x(n)$ 只取这 N 个值之一。这实际上意味着用一窗函数 $p_N(n)$ 将随机序列 $\{x(n)\}$ 取出 N 个样本来, 有关的运算都是对这 N 个值进行。如果我们将这 N 个样本值通过窗函数 $p_N(n)$ 表示, 则令

$$x_N(n) = p_N(n) x(n) \quad (1.21)$$

其中

$$p_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1.22)$$

同时, 取 $M = N-1$ 。若令 $k = n - m$ 进行变量代换, 则 (1.20) 式变为

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_k \sum_n x_N(n) x_N(k) e^{-j(n-k)\omega}$$

显然这时可以分别对 n 和 k 求和, 且由于有条件 (1.22) 式的约束, 因此求和范围可以包含整个数据长度, 即从 0 到 $N-1$, 故有

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-j\omega n} \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_N(k) e^{j\omega k} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right) \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\omega k} \right)^* \\
&= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \\
&= \frac{1}{N} |X(\omega)|^2
\end{aligned} \tag{1.23}$$

式中 $X(\omega)$ 为 $x(n)$ 的离散傅立叶变换, 即

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \tag{1.24}$$

或者简记为

$$x(n) \longleftrightarrow X(\omega)$$

(1.23) 式通常称为周期图(Periodogram)。可以看出, 它是对观察数据直接作傅立叶变换, 然后取其平方值作为功率谱密度的估计值。这种方法就是功率谱估计的周期图法。

周期图法的一个最大的优点是可以直接利用FFT算法求功率谱, 也许这就是该方法(修改后的)得到广泛应用的一个重要原因。

以上两种谱估计的直接方法, 其原理是十分简单明了的, 也有计算简便的优点。但性能并不理想, 只有采取某些修正措施之后才有实际使用价值。下面我们先讨论它的均值和方差。因为两者都是以(1.19)式为基础的, 所以以下的分析就以它为依据。

首先求功率谱估计值 $\hat{S}(\omega)$ 的均值, 有

$$E\{\hat{S}(\omega)\} = \sum_{m=-M}^M E\{\hat{r}(m)\} e^{-j\omega m}$$

若 $\hat{r}(m)$ 为 $r(m)$ 的无偏估计, 则有

$$\begin{aligned}
E\{\hat{S}(\omega)\} &= \sum_{m=-M}^M r(m) e^{-j\omega m} \\
&= \sum_{m=-M}^M p_{2M}(m) r(m) e^{-j\omega m} \\
&= \frac{1}{2\pi} P_{2M}(\omega) * S(\omega)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

其中

$$p_{2M}(m) = \begin{cases} 1 & -M \leq m \leq M \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{1.26}$$

为矩阵窗函数, $P_{2M}(\omega)$ 为它的傅立叶变换, 即

$$p_{2M}(m) \longleftrightarrow P_{2M}(\omega) \tag{1.27}$$

(1.25) 式中的最后一个等式是利用线性非时变系统中的卷积定理得出的。

设 $x(n) \longleftrightarrow X(\omega)$, $y(n) \longleftrightarrow Y(\omega)$, $h(n) \longleftrightarrow H(\omega)$, 则当 $y(n) = h(n) * x(n)$ 时, $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$; 当 $y(n) = h(n)x(n)$ 时, 有 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)/2\pi$ 。

由 (1.25) 式可见, 谱估计 $\hat{S}(\omega)$ 的均值等于真实谱 $S(\omega)$ 和窗谱 $P_{2M}(\omega)$ 的卷积, 除非 $P_{2M}(\omega)$ 为 δ 函数, 否则该卷积不等于 $S(\omega)$ 。也就是说用直接法求得的谱估计值是有偏的。注意到当 $M \rightarrow \infty$ 时, $P_{2M}(\omega) \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$, 可见 (1.19) 式得出的谱估计是渐近无偏的 (这一点也可以直接从 (1.25) 式的第一个等式看出)。

谱估计值 $\hat{S}(\omega)$ 的方差的计算要麻烦得多。而且只是在一定的假定条件下作了某些近似之后, 才能得出明确的结果。这里主要参照 A. V. Oppenheim 等著的《数字信号处理》一书中所用的方法进行分析, 更严格一些的方法请参阅 A. Papoulis 所著《信号分析》一书的第三部分。

讨论用周期图方法求得的谱估计值的方差时, 先求在 ω_1 和 ω_2 处 $\hat{S}(\omega_1)$ 和 $\hat{S}(\omega_2)$ 的协方差, 据协方差的定义, 不难写出

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{\hat{S}(\omega_1), \hat{S}(\omega_2)\} &= E\left\{\left[\hat{S}(\omega_1) - E\{\hat{S}(\omega_1)\}\right]\right. \\ &\quad \left.\times \left[\hat{S}^*(\omega_2) - E\{\hat{S}^*(\omega_2)\}\right]^*\right\} \\ &= E\left\{\hat{S}(\omega_1)\hat{S}^*(\omega_2)\right\} \\ &\quad - E\{\hat{S}(\omega_1)\}E\{\hat{S}^*(\omega_2)\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

上式中最后一个等号右边的最后一项是在两个频率 ω_1 和 ω_2 处的谱估计均值的乘积, 其值我们已经求出。现在要做的工作就是计算右边第一项, 将 (1.23) 式代入, 得

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{S}(\omega_1)\hat{S}^*(\omega_2)\right\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} E\{x(k)x(l)x(m)x(n)\} \\ &\quad \times \exp[-j(k-l)\omega_1 - j(m-n)\omega_2] \end{aligned} \quad (1.29)$$

这里又涉及到求序列 $\{x(n)\}$ 的四阶矩的问题。和前面一样, 假定 $\{x(n)\}$ 为零均值的正态序列, 这样, 四阶矩就可以用其二阶矩表示出。将 (1.13) 式所表示的四阶矩和二阶矩的关系代入 (1.29) 式, 得

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{S}(\omega_1)\hat{S}^*(\omega_2)\right\} &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l,m,n=0}^{N-1} [r(k-l)r(m-n) \\ &\quad + r(k-m)r(l-n) + r(k-n)r(l-m)] \\ &\quad \times e^{-j[(k-l)\omega_1 + (m-n)\omega_2]} \end{aligned}$$

还知道序列 $\{x(n)\}$ 的相关函数的确切表达式才能求出进一步的结果。为了得出一定的结果, 设 $\{x(n)\}$ 为白高斯噪声, 则有

$$r(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$$

其中 $\delta(m)$ 为 Kronecker δ 函数, 即

$$\delta(m) = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

代回原式, 得

$$E\{\hat{S}(\omega_1)\hat{S}(\omega_2)\} = \frac{1}{N^2} \left[N\sigma_x^2 N\sigma_x^2 + \sigma_x^4 \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(m-n)(\omega_1+\omega_2)} \right. \\ \left. + \sigma_x^4 \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{+j(m-n)(\omega_1-\omega_2)} \right]$$

上式等号右边方括号内的后两项各自分别对 m 和 n 求和, 经过简单的代数、三角运算, 得

$$E\{\hat{S}(\omega_1)\hat{S}(\omega_2)\} = \sigma_x^4 \left\{ 1 + \left[\frac{\sin \frac{N(\omega_1+\omega_2)}{2}}{N \sin \frac{\omega_1+\omega_2}{2}} \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin \frac{N(\omega_1-\omega_2)}{2}}{N \sin \frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \right]^2 \right\} \quad (1.30)$$

为了求得高斯白噪声序列谱估计值协方差的表达式, 可将上式代回 (1.28) 式, 并注意到 $E\{\hat{S}(\omega)\} = \sigma_x^2$, 可得

$$\text{Cov}\{\hat{S}(\omega_1), \hat{S}(\omega_2)\} = \sigma_x^4 \left\{ \left[\frac{\sin \frac{N(\omega_1+\omega_2)}{2}}{N \sin \frac{\omega_1+\omega_2}{2}} \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin \frac{N(\omega_1-\omega_2)}{2}}{N \sin \frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \right]^2 \right\} \quad (1.31)$$

当 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ 时, 代入上式, 就得到谱估计值 $S(\omega)$ 的估计方差

$$\text{Var}\{\hat{S}(\omega)\} = \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin(N\omega)}{N \sin \omega} \right)^2 \right] \quad (1.32)$$

这就是对高斯白噪声谱估计值方差的解析表达式。

这一结果表明, 谱估计值的方差正比于 σ_x^4 , 即序列 $x(n)$ 的功率的平方。随着序列长度 N 的增加, 比例系数将从2下降到1, 但和 σ_x^4 成正比这一关系不变。也就是说, 即使 $N \rightarrow \infty$, 谱估计值的方差也不小于序列的功率的平方, 即 σ_x^4 。这是一个非常重要的结果。现在我们将此结果加以推广。

我们知道, 一个平稳随机序列通过一线性非时变系统时, 其输出序列功率谱与输入序列功率谱和系统的频率响应函数之间的关系如 (1.7) 式所示。我们可将这个关系从另一个角度加以解释, 即一个序列的待求功率谱, 可以看作是高斯白噪声的功率谱 σ_x^2 与一线性非时变系统的频率响应函数的平方相乘, 后者除了一常数因子外, 与序列的功率谱

形状相同。这样，用周期图的方法作谱估计时，观测序列 $\{x(n)\}$ 的周期图 $\hat{S}_x(\omega)$ 可以近似看作高斯白噪声序列的周期图 $\hat{S}_n(\omega)$ 与系统的频率响应函数的平方的乘积，而后者就是序列的真实功率谱，即 $|H(\omega)|^2 = S_n(\omega)/\sigma_n^2$ ，即有

$$\hat{S}_x(\omega) \approx S_n(\omega) \cdot \frac{\hat{S}_n(\omega)}{\sigma_n^2}$$

这里，我们已将 $S_n(\omega)/\sigma_n^2$ 近似地当作确定量处理，因此有

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{S}_x(\omega)\} &\approx \left[\frac{1}{\sigma_n^2} S_n(\omega)\right]^2 \text{Var}\{\hat{S}_n(\omega)\} \\ &\approx S_x^2(\omega) \left[1 + \left(\frac{\sin N\omega}{N\sin\omega}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (1.33)$$

这是一个比较一般的结果。由于上式右边方括号中的结果不小于1，故有

$$\text{Var}\{\hat{S}_x(\omega)\} \geq S_x^2(\omega) \quad (1.34)$$

且与数据长度 N 无关。这表明，周期图谱估计值的方差是很大的，且不随 N 的增大而减小至零。也就是说，它不是功率谱的一致估计。

上述的重要结论表明，我们不能寄希望于直接用周期图方法获得良好的谱估计，必须采用适当的修正措施减小估计方差，才能使之成为一种实用的方法。

着手研究改进的方法之前，让我们先来定性地讨论影响谱估计直接方法性能的一些因素。

直接法谱估计是基于对相关函数估计值取傅立叶变换而求得的。不论采用(1.11)式或(1.15)式来作相关函数的估计，当滞后量 m 增大时，参与求和的项减小，因而平均的效果减弱。当 $m = N-1$ 时，求和式中就只有一项了，这就更谈不上平均效果了。这就是说，滞后量 m 较大的那些相关函数估值 $\hat{r}(m)$ 是不太可靠的，它们的估计方差大。周期图方法用了从 $m=0$ 到 $m=N-1$ 的全部相关函数估计值，那些方差大的相关函数估计量通过傅立叶变换反映到谱估计值中，正是它们造成了谱估计值具有较大的方差。BT方法虽然可以通过使相关函数的最大滞后量 M 小于 $N-1$ 来去掉那些不可靠的相关函数估计值，但是采用小的 M 值，意味着将傅立叶变换的求和范围进一步截短，因此变换式本身的近似程度就增大了。显然难以指望这样做会使得谱估计值的性能有太多的改善。

相关函数估计值的数目有限，且大滞后量相关函数估计值不可靠的原因是可用的序列样本数目有限。一个平稳随机序列的样本数目一般应是无限的，而我们所用的只是其中一段共 N 个样本。这可以看作是用一长度为 N 的矩形窗函数与原来无限长的序列相乘的结果，我们知道，时域中两函数相乘对应于频域中它们的傅立叶变换的卷积。窗宽为 N 的矩形时间函数的离散傅立叶变换具有 $\sin \frac{N\omega}{2} / \sin \frac{\omega}{2}$ 的形式，它的主瓣宽度为 $1/N$ ，

且有较高的旁瓣值。若序列 $\{x(n)\}$ 是一单频的纯正弦波，它的傅立叶变换是一个 δ -函数，出现在 $\pm\omega_0$ 处， ω_0 为正弦波的角频率，即它的频谱为单根谱线。但取该序列的 N 个样

本作傅立叶变换时, 单根谱线就展宽成主瓣宽为 $1/N$ 且有较高旁瓣的频率。由此可以想到, 当用周期图方法作谱估计时, 它的谱分辨率约与 N 成反比, 且和信号本身的特征, 例如信噪比等无关。此外, 如果序列是由多个正弦波信号组成的, 而各分量强度不等, 则弱信号分量可能淹没在强信号谱的旁瓣中而无法发现。这种所谓信号能量 (向旁瓣) 泄漏现象如果不设法消除, 也将妨碍谱估计直接方法的应用。

以上, 从物理概念出发对直接法作了定性说明之后, 下面讨论它的一些改进措施。

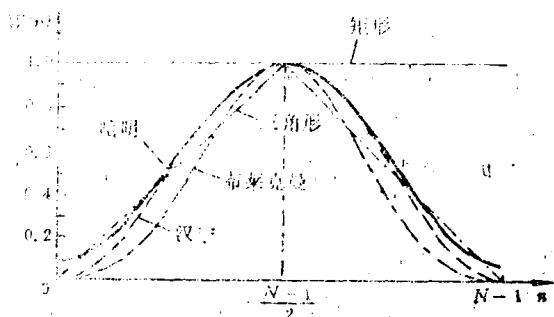
1.4 改进措施

1.4.1 数据窗

谱估计的直接法都是首先对长度为 N 的序列作傅立叶变换 (下面将看到, BT 法也是这样做的)。如前所述, 这样做必然会出现很高的旁瓣, 妨碍它的实际使用。

改进的办法是将长度为 N 的序列 $x(n)$ 乘以一同长度的窗函数 $w(n)$, 即

$$x_w(n) = w(n)x(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.35)$$



把窗函数的顶部缩窄, 同时使窗函数的两端平缓地过渡到零, 就可以降低旁瓣的高度, 但这样做付出的代价是加宽了主瓣, 从而加宽了间断点处的过渡区。图 1.1 画出了几种常用的窗函数, 它们的定义如下:

矩形窗:

$$w(n) = 1 \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.36a)$$

巴特利特 (Bartlett) 窗 (三角形窗):

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (1.36b)$$

汉宁 (Hanning) 窗:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.36c)$$

哈明 (Hamming) 窗:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.36d)$$

布莱克曼 (Blackman) 窗:

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.36e)$$