

计算流体力学导论

Chuen-Yen Chow 著

孙祥海 周文伯 杜振凡 顾尔祚 译

郑国桦 校核

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书为美国科罗拉多 (Colorado) 大学周春堰教授积多年科研教学的经验之著。内容包括:理想流体和粘性流体;不可压缩流体和可压缩流体;数值计算方法,包括有限差分,有限基本解和迦辽金方法。书中从流体力学的基本方程出发,深入浅出地进行阐述,数学处理与物理概念并重。全书各章节都配有例题和习题,并编有可用的FORTRAN-IV 程序。本书可作为高年级大学生及研究生教材,也可供力学、航空、造船、气象、水利、土木、机械、应用物理及应用数学等专业工程技术人员参考。

计算流体力学导论

上海交通大学出版社出版

(淮海中路 1984 弄 19 号)

新华书店上海发行所发行

商务常熟分厂印装

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 14.5 字数 369000

1987 年 2 月第 1 版 1987 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—4000

统一书号: 13324.35 科技书目: 132—257

定价: 2.45 元

译者序

电子计算机的问世,对科学研究和社会生活,都产生了广泛的影响和深刻的变化。随着它的飞速发展和不断完善,已使许多科学领域得以完成过去所不敢想象的工作,甚至由此而衍生出许多新的学科分支。它已经并正在不断地为人类创造出新的奇迹。

流体力学的数值计算,也借助于电子计算机而得到了很大的发展,形成了一门新的计算流体力学。有关这方面的文献资料,为数相当可观;但作为系统的著作,相对于各种流体力学书籍来说,则显得太少;若与当前国内各高等院校和科研机构对这方面教材的需求情况来看,则更感匮乏。

译、校者在自己的教学、科研工作中,对已看到过的计算流体力学各种版本的教材和专著,作了选择,我们认为美国科罗拉多(Colorado)大学周春堰教授编著的这本书是一本比较理想的教科书。首先,此书是作者从事计算流体力学的教学、科研工作,积多年之经验,萃取其精华撰写而成的。其次,全书还有下列几个特点:

1. 由流体力学基本方程出发,采用适当的数值方法,对各类问题进行处理。全书叙述思路清晰,深入浅出,结合实际应用,注重物理概念,易于理解。

2. 各章节均配有适当例题示范,以呼应所述的理论内容。许多计算结果与解析解或实验进行了比较分析。

3. 全部例题都是计算机程序运算的,全书共有三十个已编就的程序,可供计算使用。有助于克服对流体力学感到抽象不易掌握的困难。这是本书的独到之处。

4. 除了例题和程序之外,各章节还附有一定数量的习题,这对选作教材来说,更是难得的。

5. 全书选题范围广泛,内容具有实用意义。包括有理想与粘性流体,不可压缩与可压缩流体,数值计算方法包括有限差分、有限基本解和迦辽金方法。

我们希望此书能对高等院校力学、航空、造船、气象、水利、土木、机械、应用物理及应用数学等专业的高年级学生和研究生,以及从事于有关这方面工作的工程技术人员有所裨益。

本书由上海交通大学工程力学系部分教师翻译、校核定稿,具体分工:孙祥海译作者序及第二章第2.1节至第2.10节;周文伯译第一章、第四章第4.6节及附录和文献目录;杜振凡译第二章第2.11节至第2.14节及第四章第4.1节至第4.4节;顾尔祚译第三章及第四章第4.5节。最后由孙祥海对全部译文统一整理峻稿,郑国桦对全书作了校核。

由于译者水平有限,若有错误和不当之处,希不吝批评指正。

关于程序使用的一点说明:由于版面所限,本书与原著中所附源程序的行数不能完全一一对应,但为了尽量不改动原来的程序格式,故当源程序中的较长行在本书需要换行时,一律加一接续号“→”或“→#”,输入程序时,只要把上述符号后的字符紧接上一行即可,其中有符号“#”者,表示接续在上行行末时要空一个字符。

译 者

1986年1月

作 者 序

真实流体的运动，是以非线性偏微分方程组来描述的。即使对于象均流流过沿流向放置的平板这样一个最简单的流动问题，也需要许多复杂的数值方法才能求得其解析解。在一般流体力学的教科书里，通常都作了各种各样的假定。如：忽略流体的粘性或压缩性，或者简化物体的几何形状。这样，才能对某些理想化的问题得到闭式解。通过这些高度简化或线性化的问题，学生们可学到流体运动的一般规律；但是由于他们的分析能力有限，毕竟还不能较深地掌握教科书之外的内容。对于能够用解析方法求解的一些问题，很快地都被解出来了，而那些具有重要实际意义的问题，由于它们或者是非线性的，或者涉及到复杂的几何形状，或者两者兼而有之，对初学者来说，求解这些问题实在太困难了。

根据我对高年级大学生和一年级研究生进行计算流体力学课程教学的经验，得到的结论是，借助于数值方法，这种状况是能够大为改善的。在这些课程中，先介绍求解特殊类型的常微分或偏微分方程的数值方法，然后，通过一些具有代表性的计算机程序，来说明这种方法在流动问题中的应用。有了这些计算方法和流体力学基础知识，就能够很容易地把学生引入更深入和更实际的问题中去，包括那些用解析方法简直是不可能对付的问题。

这本书是根据我多年使用并不断修订的课堂讲义，修改形成的，它适用于高年级大学生和研究生的水平。应该认为这些学生已经掌握了流体力学的基础知识，而且是熟悉 FORTRAN-IV 语言的。书中所有数据都采用国际单位制。

本书的章节安排，是把常微分方程放在偏微分方程的前面。由于这个缘故，所以把势流放在粘性流体动力学之后，学生将不至于

感到意外。

这是一本流体力学书，而不是一本数值计算的书。书中所涉及的流动问题，或者用数值方法求解，或者借助于数字计算机使一些流动问题大大简化。数值计算方法在这里仅仅是作为求解物理问题的一个工具；至于这些方法的详细分析和评论，本书将不作探究。通常，求解同一类型的微分方程的数值方法，往往不止一种。由于本书属于导论性质，故这里所采用的数值方法，只不过是比较简单或常用的，而决不是齐全的。

书中共有三十个计算机程序，都用实例说明了如何把各种有限差分格式转换为 FORTRAN 语言，并说明了各种不同的打印或绘制输出数据的方法。所用的两个绘图用的子程序是：打印机绘图用的 PLOTN 和胶印绘图用的 EZPLOT。这两者都在科罗拉多 (Colorado) 大学的计算机系统中使用过。在运用这些子程序之前，学生必须先校核当地的计算机程序库。因为，为同一用途而编写的子程序，在不同学校可以有不同的方案。倘若得不到这些子程序，学生则可以参照第 2.13 节中程序 2.10 前面所叙的方法，自己编写用于打印绘图的子程序。

我尽量把课题的范围选得广泛些，所讨论的问题，包括有经典的空气动力学和水动力学问题，也包括有弹道学、气象学、水力学、气体动力学、磁流体动力学和对流问题；很多例子和航空有关。事实上，第 2.4、2.8、3.3 和 3.4 节都是对基西和周春堰 (Kuethe and Chow)* 合著的空气动力学教材的补充，因为在那本书里，对数值方法没有详细讨论，或者说对相应问题的求解没有使用数值计算方法。

本书适用于两学期的计算流体力学课程。如果删去某些较深的课题内容，可用作为一学期导论课程的教材。此书也可以作为各种水平的流体力学课程传统教材的补充。为各种专门用途所编

* 参见书后的《文献目录》，书中所有文献的引援都以相同形式出现。

制的许多子程序，已经得到广泛的使用。对那些有助于求解别的相关问题的程序，根据它们的用途加以分类，并列于附录中。

我对科罗拉多大学罗伯特 D. 里奇特迈尔(Robert D. Richtmyer)教授审阅本书部分内容表示感谢，对俄亥俄州莱特-帕特森(Wright-Patterson)空军基地计算空气动力学组汤马斯 E. 米勒(Thomas E. Miller)上尉和威尔伯·汉基(Wilbur Hankey)博士审阅本书手稿，并提供了宝贵的意见和建议表示感谢，我感谢我的所有计算流体力学班级的学生，他们不断地帮助我改进手稿，尤其是库尔特 M. 奥兰德(Kurt M. Olender)先生所给予的富有成效的帮助。我特别感激我的妻子朱莉安娜·蕙施(Julianna Huei Shek)，她的有益的讨论，编制程序的熟练技术和经常的鼓励，才使这本书的出版成为可能。

非常感谢科罗拉多大学计算机中心所提供的计算机机和计算服务工作。

周春堰

目 录

第一章 流体介质中运动物体的动力学

1.1	常微分方程的数值解——初值问题	1
1.2	圆球体的自由下落运动	5
1.3	某些约束运动的计算机模拟	20
1.4	计算物体在流体中二维运动的四阶龙格-库塔方法	40
1.5	球体的抛射特性	43
1.6	雨滴与云层微滴的碰撞	62
1.7	滑翔机的飞行轨迹——一种图象显示法	75

第二章 无粘性流体的流动

2.1	不可压势流	84
2.2	二阶常微分方程的数值解——边值问题	88
2.3	分布源汇所形成的径向流动	93
2.4	反方法 I: 基本解的迭加	99
2.5	线涡的运动学和向量运算	114
2.6	回转体绕流的近似解——冯卡门方法	125
2.7	反方法 II: 保角变换	140
2.8	面元法	158
2.9	二阶偏微分方程的分类	180
2.10	解椭圆型偏微分方程的数值方法	183
2.11	管道中势流或绕物体势流的不规则边界条件和导数边界条件	197
2.12	双曲型偏微分方程的数值解	220
2.13	小振幅波的传播和反射	226

2.14 有限振幅波的传播——激波的形成·····	239
---------------------------	-----

第三章 粘性流体的流动

3.1 粘性流动的主管方程·····	255
3.2 平面激波的构造·····	257
3.3 自相似层流的边界层流动·····	269
3.4 平板温度计问题——含有导数边界条件的常边值问题·····	285
3.5 管道和明渠流动·····	296
3.6 解抛物型偏微分方程的显式方法——广义瑞利问题·····	305
3.7 解抛物型偏微分方程的隐式方法——渠道中的起始流·····	313
3.8 重调和方程的数值解——斯托克斯流·····	323

第四章 二次流和流动不稳定性

4.1 有限雷诺数下绕圆球的流动——迦辽金方法·····	337
4.2 有限翼展机翼尾涡面的卷起·····	362
4.3 速度间断面的赫姆霍尔兹不稳定性·····	377
4.4 迎风差分和人工粘性·····	389
4.5 旋转电磁力场引起的二次流·····	395
4.6 贝纳德和泰勒不稳定性·····	421
附录 一些重要子程序及其用途·····	448
文献目录·····	451

第一章 流体介质中运动物体的动力学

本章研究初值问题的数值解,其中包括非线性常微分方程的解法。在1.1节中介绍一些求解一阶和二阶方程的数值方法,特别是龙格-库塔法。在1.2节中,应用这些方法求解球体在空气中的自由下落运动。在1.3节中,应用这些方法模拟单摆运动和一个空气弹性系统的运动。

为了将应用于一维运动的公式推广到二维运动,在1.4节中推导了解二阶联立方程的龙格-库塔公式。在计算了球体在流体中的抛射运动以后,把1.5节的数值积分方法与半间隔法相结合求解这个物体的最大射程。1.6节讨论了一个雨滴与云中微滴相碰撞的气象学问题。最后,在1.7节中计算滑翔机的轨迹时,利用绘图法在计算机的打印机上绘制出计算结果。

1.1 常微分方程的数值解——初值问题

现研究一阶常微分方程的最简单的情况,其一般形式为

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1.1.1)$$

这里 f 是一个解析函数。如果在起始点 $t = t_0$, 函数 x 有一个给定的值 x_0 , 欲求满足方程(1.1.1)和上述初始条件的 $x(t)$, 其中 $t \geq t_0$, 这样一个问题叫做常微分方程的初值问题。

为了对这个问题进行数值求解,通常把自变量的轴分成均匀的小间隔,其宽度为 h , 各间隔的终点位置为

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.2)$$

以 x_i 表示点 t_i 处所求得的解。这样,利用数值方法,连续函数 $x(t)$

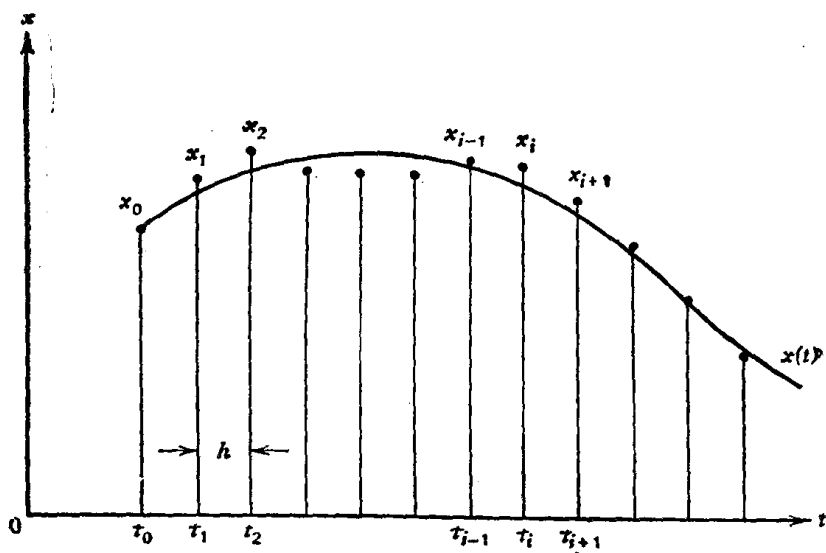


图 1.1.1 常微分方程初值问题的数值解

由一组离散值 $x_i, i=0, 1, 2, \dots$ 来近似, 如在图 1.1.1 中所示。由于 h 是一个小量, 而 f 是一个解析函数, 任意点处的解可由前一点处的泰勒级数展开式得到

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} &\equiv x(t_{i+1}) = x(t_i + h) \\
 &= x_i + h \left(\frac{dx}{dt} \right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_i + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d^3x}{dt^3} \right)_i + \dots \\
 &= x_i + hf_i + \frac{h^2}{2!} f'_i + \frac{h^3}{3!} f''_i + \dots \quad (1.1.3)
 \end{aligned}$$

这里 f'_i 表示在 (x_i, t_i) 的 d^2f/dt^2 。 f 通常是 x 和 t 的函数, 所以可根据下面的公式求得一阶导数

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}$$

高阶导数通过同样的链式法则来获得。

(1.1.3)又可改写为

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad (1.1.4)$$

这里

$$\Delta x_i = hf_i + \frac{h^2}{2!} f'_i + \frac{h^3}{3!} f''_i + \dots \quad (1.1.5)$$

从 $i=0$ 开始, 这时有给定值 x_0 , 而 Δx_0 则由 (1.1.5) 式取任意所需要的项数计算得到, 这样可首先计算得 x_1 的值。然后, 由 (1.1.4) 式令 $i=1, 2$, 等等, 便可依次获得 x_2, x_3 , 等等的值, 从理论上讲, 如果在 (1.1.5) 式中保留的项数无限地增加, 那么从这个逼近格式得到的数值结果接近于精确解。但是, 实际上是不可能这样做的, 这个级数必须在某一有限项数以后被截断。例如, 如果在计算 Δx_i 的 (1.1.5) 式右端保留二项, 则得到的 x_{i+1} 要比精确值小 $(h^3/3!)f_i'' + (h^4/4!)f_i''' + \dots$, 在 h 为小值时, 第一项是主要的。我们可以说, 包含在这种数值计算中的误差的量级为 $h^3 f_i''$, 或者简单地表示为 $O(h^3 f_i'')$ 。这就是截断误差, 它是由于在一个无穷级数中只取了有限项而引起的。

当在 (1.1.5) 式右端仅取一项时, 这就叫欧拉法, 其截断误差为 $O(h^2 f_i')$ 。如果要求计算结果精确的话, 就不应该用这种方法。

如果 f 的导数很复杂, 则使用泰勒级数展开方法是不切实际的。此外, 由于其级数依赖于 f 的导数, 对于这种方法, 不可能编制出通用的计算机程序。而 n 阶龙格-库塔方法是一种通常所用的替代方法。采用这种方法时, 所需计算的是选取适当的自变量的函数 f 而不是 f 的导数; 其精确度相当于在 (1.1.5) 的级数展开式中保留 n 项的情况。二阶龙格-库塔公式为

$$x_{i+1} = x_i + hf \left(x_i + \frac{1}{2} \Delta_1 x_i, t_i + \frac{1}{2} h \right) \quad (1.1.6)$$

而

$$\Delta_1 x_i = hf(x_i, t_i) \quad (1.1.7)$$

为了获得较好的计算结果, 经常采用下面的四阶龙格-库塔公式

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6} \left(\Delta_1 x_i + 2\Delta_2 x_i + 2\Delta_3 x_i + \Delta_4 x_i \right) \quad (1.1.8)$$

上式中的增量按下列次序计算求得:

$$\Delta_1 x_i = hf(x_i, t_i)$$

$$\Delta_2 x_i = hf \left(x_i + \frac{1}{2} \Delta_1 x_i, t_i + \frac{1}{2} h \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 x_i &= hf \left(x_i + \frac{1}{2} \Delta_2 x_i, t_i + \frac{1}{2} h \right) \\ \Delta_4 x_i &= hf(x_i + \Delta_3 x_i, t_i + h) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

这些公式的推导,例如,可见 Kuo (1972, p. 137)。在这个四阶方法中,其截断误差的主要项是 $(h^5/5!)f_i^{(5)}$ 。如果解的斜率不是很陡, h 取得适当的小时,则可得到满意的结果。对龙格-库塔方法的稳定性和步长大小的控制,读者可参阅 Carnahan, Luther, and Wilkes (1969, p. 363), 这里不作讨论。

龙格-库塔法可推广应用于求解高阶的或联立的常微分方程。现在研究二阶方程的一般形式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F \left(x, \frac{dx}{dt}, t \right) \quad (1.1.10)$$

当 $t = t_0$ 时,初始条件为 $x = x_0$ 和 $dx/dt = p_0$ 。令一阶导数为一个新的变量 p , 则可以把方程(1.1.10)写成两个联立的一阶方程

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p \\ \frac{dp}{dt} &= F(x, p, t) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

其初始值为 $x(t_0) = x_0$ 和 $p(t_0) = p_0$ 。从 t_i 变到 t_{i+1} , 其四阶龙格-库塔公式为

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 x_i + 2\Delta_2 x_i + 2\Delta_3 x_i + \Delta_4 x_i) \\ p_{i+1} &= p_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 p_i + 2\Delta_2 p_i + 2\Delta_3 p_i + \Delta_4 p_i) \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

上式中各项按下列次序计算得:

$$\begin{aligned} \Delta_1 x_i &= h p_i \\ \Delta_1 p_i &= h F(x_i, p_i, t_i) \\ \Delta_2 x_i &= h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_1 p_i \right) \\ \Delta_2 p_i &= h F \left(x_i + \frac{1}{2} \Delta_1 x_i, p_i + \frac{1}{2} \Delta_1 p_i, t_i + \frac{1}{2} h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_3 x_i &= h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_2 p_i \right) \\
 \Delta_3 p_i &= h F \left(x_i + \frac{1}{2} \Delta_2 x_i, p_i + \frac{1}{2} \Delta_2 p_i, t_i + \frac{1}{2} h \right) \\
 \Delta_4 x_i &= h (p_i + \Delta_3 p_i) \\
 \Delta_4 p_i &= h F(x_i + \Delta_3 x_i, p_i + \Delta_3 p_i, t_i + h)
 \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

1.2 圆球体的自由下落运动

作为龙格-库塔方法的首次应用,先研究一个球体的自由下落运动。这是一个如果不使用数值方法就不能获得其解的例子。据说加俐略曾在比萨斜塔上同时放下两个大小不同的物体,发现两个物体在同一时刻落到地面。如果加俐略确实做了这样的实验,那么这个故事中所说的结论是否正确呢?当然,在真空中是正确的。但是在空气中,物体受到周围空气对它的作用力,这是由物体的大小和物体的运动所决定的。因而那个结论似乎是值得怀疑的。如果这个结论不正确,那么哪个物体先落到地面呢?是大的还是小的?

为了回答这些问题,我们不必在实验室中重复其实验,而可以首先列出物体运动的方程式,在式中要考虑到周围流体所引起的力,然后在数字电子计算机上做数值实验。由于球体的阻力数据是现成的,因此我们最好用圆球体进行分析研究。

我们选取重力加速度 g 的方向为 z 轴方向,其原点与球在 $t=0$ 时的球心相重合,如图 1.2.1 所示。在 $t>0$ 时,直径为 d , 质量为 m 的圆球距离原点为 z , 并具有速度 v 。球体周围的流

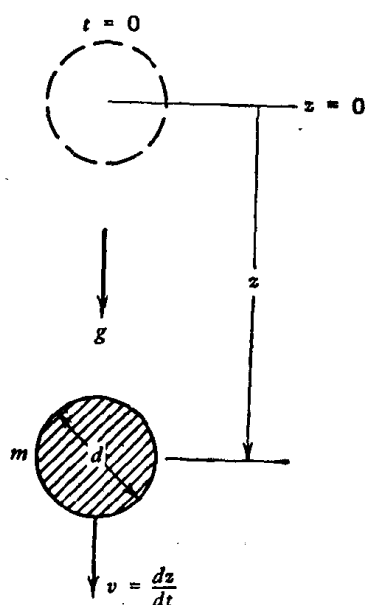


图 1.2.1 自由下落球体

体密度为 ρ_f , 运动粘性系数为 ν 。在真空中, 作用在这物体上的外力仅是沿 z 轴正向的地球引力 mg 。而当在流体中运动时, 有下列其他力作用在该球体上。

1. 浮力 根据阿基米德原理, 浮力大小等于由物体所排开的流体的重量, 其表达式为 $-m_f g$, 其中

$$m_f = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho_f \quad (1.2.1)$$

式中负号表示力的方向与 z 轴相反。

2. 作用在一个加速物体上的力 当一个浸没在静止流体中的物体突然起动时, 在流体中诱导起一个流场。流体运动的动能是由“做功”或者克服阻力使物体运动而引起的。即使流体是无粘性的, 这种阻力也存在, 其值为 $-\frac{1}{2} m_f dv/dt$, 这可用无粘性理论导得 (Lamb, 1932, p.124)。

3. 由粘性引起的力 在真实流体中运动物体的周围, 紧贴物体表面存在一个速度变化很快的区域。物体表面上的速度梯度引起切应力; 沿整个物体表面积分切应力而获得的力叫做表面摩擦力。此外, 在粘性流体中物体尾部的压力低于头部的压力。这压力差在物体上产生一种压差或形状阻力。总的粘性力, 即表面摩擦力与形状阻力之和, 有时以无量纲形式的阻力系数来表示。阻力系数是物体形状和雷诺数的函数。除了某些简单的形状和非常低的雷诺数之外, 要找到这个函数的解析形式是很困难的, 通常通过实验来决定。图 1.2.2 表示了一个典型的光滑球体的阻力系数 c_d 与雷诺数关系的实验曲线 (Goldstein, 1938, p.16)。图中阻力系数 c_d 定义为总粘性力除以 $\frac{1}{2} \rho_f v^2 \frac{1}{4} \pi d^2$, 雷诺数 Re 定义为 vd/ν 。

4. 波阻力 当在流体介质中物体的速度接近于音速时, 可能会在物体的头部或者前方产生激波, 从而引起波阻力。

如果我们仅考虑低亚音速, 那么可不考虑波阻力。对于一个球体, 当考虑上述所有的力时, 其牛顿运动定律有如下形式

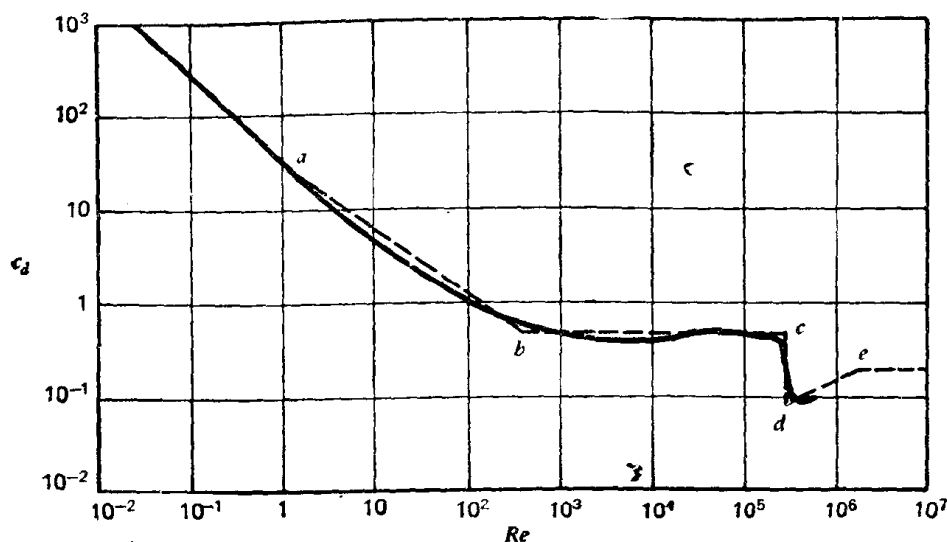


图 1.2.2 光滑球体的阻力系数

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m_f g - \frac{1}{2} m_f \frac{dv}{dt} - \frac{1}{2} \rho_f v |v| \frac{\pi}{4} d^2 c_d(v)$$

式中使用 $v|v|$ 而不是 v^2 , 以表明粘性阻力的方向总是与 v 的方向相反。经整理后, 上式可写成

$$\left(m + \frac{1}{2} m_f \right) \frac{dv}{dt} = (m - m_f) g - \frac{\pi}{8} \rho_f v |v| d^2 c_d(v) \quad (1.2.2)$$

上式的左端项表明, 球体在流体中加速运动或减速运动时, 好象它的质量增加了一样。 $\frac{1}{2} m_f$ 这项有时叫做附加质量。把(1.2.1)式和 $m = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho$ (ρ 为该物体的密度)代入(1.2.2)式, 则有

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{A} [B - Cv |v| c_d(v)] \quad (1.2.3)$$

而

$$\frac{dz}{dt} = v \quad (1.2.4)$$

这里 $A = 1 + \frac{1}{2} \bar{\rho}$, $B = (1 - \bar{\rho})g$ 和 $C = 3\bar{\rho}/4d$; $\bar{\rho}$ 表示密度之比 ρ_f/ρ 。这些方程符合(1.1.11)的普遍形式, 我们可以用龙格-库塔法来求解。

在数值计算中,对以实验为基础的函数需要特别注意。为了使 $c_d(v)$ 的形式适合于计算机数值计算,用虚线来代替 $c_d(v)$ 曲线,如图 1.2.2 所示。在 a 点的左边, $Re \leq 1$, 使用斯托克斯公式

$$c_d = \frac{24}{Re} \quad (1.2.5)$$

在雷诺数比 1 小很多时,这公式与实验曲线吻合得很好,而在 a 附近(那里 $Re = 1$, $c_d = 24$)与实验曲线稍有偏离。在双对数坐标图上,在 a 和 b (这里 $Re = 400$, $c_d = 0.5$) 两点之间划一条直线以近似实际的曲线,这直线给出

$$c_d = 24/Re^{0.546} \quad 1 < Re \leq 400 \quad (1.2.6)$$

在 b 和 c (这里 $Re = 3 \times 10^5$) 之间,我们假定阻力系数为一个常值 0.5。在 c 点附近阻力系数产生突变,显示出流动在物体表面分离之前,从层流边界层变成了紊流边界层(参阅 Kuethe and Chow, 1976, Section 17.11)。在 d ($Re = 3 \times 10^5$, $c_d = 0.08$) 和 e ($Re = 2 \times 10^6$, $c_d = 0.18$) 之间划另一根直线。这样

$$c_d = 0.000366 \times Re^{0.4275}, \quad 3 \times 10^5 < Re \leq 2 \times 10^6 \quad (1.2.7)$$

最后,在 e 之外的高雷诺数范围内,可假定阻力系数的值为 0.18。

以上我们采用了一种简单的方法来近似一个复杂的函数。如把这根曲线分成更多的折线,可以预期得到更好的结果。另一种方法,阻力系数可以作为列表函数输入到计算机中去。在任意雷诺数处的阻力系数值可以通过该列表函数内插或外插求得。

现在让我们回到数值实验。假定钢球在海平面处标准大气条件下的空气中下落;我们有 $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f = 1.22 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.49 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 和 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。因为在这个特殊例子中, $\bar{\rho}$ 值很小,正如从(1.2.3)式可以看到,浮力和附加质量可忽略不计。如果实验在水里或者在任何其他其密度和物体密度相差不大的流体中进行时,则浮力和附加质量的影响就显著了。但是为了具有普遍性,这些项仍然保留在我们的计算机程序中。

我们将展示直径为 0.01 m 球的计算结果。将圆球在空气中