



广义相对论

冯麟保 刘雪成 刘明成

内 容 简 介

本书是研习广义相对论的入门书,书中简明扼要地讲述了广义相对论的基本理论,并以突出物理思维的方式介绍广义相对论中重要概念的提出、理论的建成、以及其在物理和天文各个不同领域上的应用和发展。

本书共分八章,内容包括广义相对论的基本原理、黎曼几何和张量分析、黎曼时空中的物理定律、引力场方程、中心对称的引力场、引力波、引力坍缩与黑洞、宇宙学。

本书可作为高等院校高年级大学生和研究生的教材,也可供对广义相对论有兴趣的读者和有关专业的研究人员参考。

引 言

在相对论前的经典物理学中,万有引力的力学理论和电动力的电磁场理论全都建立在绝对空间和绝对时间的概念上;因此,尽管二者有着实质性的差别,但彼此并不矛盾。然而,在对麦克斯韦方程变换性质的分析导致了狭义相对论的建立以后,这两种理论就不再相容了。这里的“狭义”一词表示时空坐标变换只限于在惯性系之间进行。在狭义相对论中,洛伦兹变换取代了伽利略变换,空间和时间都不再具有绝对性,而是共同构成一个统一的四维连续区;在几何学上表现为四维赝欧几里得空间的所谓闵可夫斯基平坦时空里,不存在任何超距作用,一切作用或信息只能以有限的速度传播。在伽利略变换下保持形式不变的牛顿引力定律,在洛伦兹变换下显然不再具有协变性;因此,必须从场的观点重新审查牛顿理论的基本假设,以便把它改造成符合相对论要求的引力理论。

爱因斯坦于1905年提出狭义相对论以后,他就一直试图把狭义相对性原理中惯性运动的相对性概念推广到加速运动。爱因斯坦认为:在描述物理现象上,作任意运动的参考系全都应当“平权”;也就是说,物理方程在任意的坐标变换下都必须是协变的。这就是所谓广义相对性原理,亦称广义协变原理。为了赋予广义协变性以具体的物理内容,爱因斯坦从物体的惯性质量与引力质量等价这一经验事实出发,提出了引力场与惯性力场(或称加速场)局域等效的所谓等效原理。爱因斯坦在马赫的时空性质是由物质分布决定的这一思想的影响下,结合上述两个基本原理,采用黎曼几何来描述有引力场存在时的时空;给出引力场中的物理规律,并以纯推理的方式导得一个比牛顿引力定律精确得多和更为合理的引力场方程,从而奠定了广义相对论的基础。广义相对论保留了狭义相对论引出的四维时空整体性;但这个新的相对论引力理论是场

与物质运动的理论,是人们对物质、时空与引力场之间的关系在认识上的进一步深化和统一,出色地证实了物质运动和空间时间的不可分割性。与狭义相对论的平坦时空不同,有引力场存在时的四维时空是弯曲的,而在引力场方程中确定这一弯曲性质的是在该时空中缩并了的黎曼-克里斯托弗曲率张量,即里契张量。广义相对论认为时空的“度规场”与“引力场”是等价的,质点在引力场中沿弯曲时空的短程线运动;这种把引力场“几何化”的物质运动理论在深度和广度上都比牛顿引力理论大为拓宽和发展。然而,在弱场近似下,爱因斯坦引力场方程将退化为牛顿引力势满足的拉普拉斯方程;在作高速运动的质点的短程线方程里,也包括狭义相对论的质速关系的特点,而光在弯曲时空中的传播径迹则是零短程线。广义相对论精确地说明了牛顿理论未能解释的水星近日点的剩余旋进,并且预言了在太阳引力场中光线传播路径的偏折以及从引力场辐射出的光谱线向红端移动等现象。所有这些,都是爱因斯坦用了整整十年时间对引力理论的探索和研究取得的成果;他在1916年发表的题为《广义相对论基础》的文章,就是这项划时代的伟大工作的全面总结。由于理论的严谨和完美,而且其预言又已得到观测上的证实,广义相对论很快就为物理学界普遍接受,被一致认为这一关于引力和时空的新理论是经典理论物理学中最卓越的理论。

几十年来,广义相对论不断取得进展,并得到新的应用和验证。在纯理论方面,爱因斯坦及其合作者于30年代末发展并完成了广义相对论的运动理论,他们采用后牛顿近似的方法,从引力场方程直接导出了质点系的运动方程;运动方程包括在场方程之内而无需另行设定,是广义相对论不同于其他物理理论的一个重要特点。60年代,彭罗斯和霍金等人建立了奇性理论,他们证明:在广义相对论的理论框架内,本性奇点(不论是宇宙的初始奇点还是星体引力坍缩的最终奇点)是不可避免的。与此同时,他们还开展了有关黑洞和引力坍缩方面的研究,并取得积极成果。80年代,丘成桐等人运用大范围微分几何的方法,证明了引力束缚系统的总

能量或质量总是正定的所谓正能定理(亦称正能猜想)。所有这些都充实了广义相对论的理论基础,提出了许多有待探索的课题和开辟了不少新的研究领域。60年代以来,广义相对论在天体物理学方面得到了广泛的应用。理论上预言的行星近日点旋进、光路偏折、引力红移和雷达回波延迟(夏皮罗,1964)等所谓四大经典检验,都先后得到了观测或实验上高精度的证实。类星体(1963)、脉冲星(1967)和微波背景辐射(1965)的相继发现,证实了以广义相对论为基础的中子星理论(1939)和大爆炸宇宙学(1948)中的若干预言和推测。70年代,泰勒等人对脉冲双星所作的长期观测,为有关引力波存在提供了可信的证据。此外,尽管爱因斯坦在其后半生奋力探索的统一场论没有获得成功,但是人们近30年来在建立引力(因而时空)的量子理论以及把引力同其他相互作用统一起来等方面的研究已经取得进展。虽然所有这些尝试直到目前还未臻成熟,特别是一个自洽的量子化的引力理论尚未建成;然而,我们已看到有那么多的世界第一流物理学家不断地积极投入,可以预期,经过一至两代人的不懈努力,最终取得量子引力理论方面的突破以及实现爱因斯坦统一场论的这一宏伟理想,即使不是指日可待,也应为期不远。

很明显,对作为时空结构和物质运动理论基础的广义相对论本身及其在物理学和天文学中所产生的影响作进一步的深入探讨,无疑是一件意义重大的工作。特别是在涉及到大尺度时空的结构和特征以及奇点附近的所有物理过程方面(包括天体晚期演化和早期乃至甚早期宇宙的研究等等),广义相对论作为不可或缺的理论基础,在经过了一度沉寂的40—50年代以后,又重新焕发出新的生命力;随着观测手段和实验技术的不断更新和发展以及可资采用的数学工具的日益增多,我们相信,广义相对论本身不仅可以得到进一步的充实和完善,而且它还将在与之有关的众多科学领域继续发挥极其重要的作用。

本书是为有意研习广义相对论的高等院校高年级师生编写的

一本基础教材。书中简明扼要但较为全面地讲述了广义对论的基本理论及其近期的进展；我们以尽可能简略的数学工具并以侧重突出物理思维的方式，介绍了广义相对论中重要概念的提出、理论的建成及其在物理学和天文学各个不同领域的应用和发展。

全书共分八章。前两章讲述广义相对论的物理和数学基础。第一章遵循爱因斯坦最初的思路，详细介绍广义相对论据以建立的两个基本原理：广义相对性原理和等效原理；在讲述必需的数学技巧之前，先从等效引力场中时空性质的特征出发，提供一个明确的物理框架，使读者在初步掌握了与引力密切相关的弯曲时空的某些知识基础上，可以不感困难地阅读下一章黎曼几何和张量分析。在不影响理解广义相对论中主要物理现象的前提下，我们把第二章的数学内容压缩到最低限度，例如略去基林矢量、标架、李微商、张量密度、以及张量积分等不讲；然而，从最简单的坐标变换起直到判定时空弯曲与否的黎曼张量止，所有有关张量及其运算、黎曼度规、协变微分、短程线等概念的引入和导出，都系统地给出了详细的分析和论证。

接下来的三章是本书的核心部分。第三章探讨了引力场的存在对物理规律的影响，内容包括质点力学、电动力学和流体力学三个方面，阐明以协变微商取代偏微商这一数学技巧所取得的效果；在这里所有有关物理量（特别是物质的能量动量张量）的四维表示全都先从狭义相对论开始，然后过渡到广义相对论，因此不要求读者具备多少预备知识。第四章，通过严密的逻辑推理和详尽的数学导证得出爱因斯坦引力场方程，并讨论了场方程的牛顿近似和弱场近似。第五章的内容是中心对称引力场。我们在这里详细地推导出广义相对论引力场方程的第一个精确解：史瓦西度规；然后给出广义相对论四大经典检验的理论计算，并扼要叙述了近期对它们的观测现状和实验结果。

最后三章探讨近三、四十年发展起来的理论应用新领域。内容包括：引力波、黑洞和宇宙学；它们依次隶属于弱场近似、强引力场和大尺度时空结构三个不同层次。第六章主要讲述平面引力波；侧

重谈它的特性:偏振态和螺旋度,而对波的能流密度只计算出其必要的近似表示。对引力波的辐射特性和发射机制的讨论比较全面;关于引力波的探测,也以足够的篇幅予以阐述,尽管从理论的角度上看它或许不及前两节那么重要。第七章引力坍缩与黑洞:从史瓦西度规的坐标奇点和本性奇点开始,依发展顺序逐一介绍了勒梅特收缩和膨胀度规、爱丁顿内行和外行坐标、以及最完备的克鲁斯卡度规;从引力坍缩角度讨论了史瓦西黑洞以及粒子和光在黑洞附近的行为。对于属于天体物理范畴的天体晚期演化及其临界质量方面,我们只作了概括性的介绍。最后,我们较全面地介绍了引力场方程的另一个精确解:稳态的轴对称克尔度规(尽管旋转黑洞这一部分只是作为选读的内容而编进的)。第八章相对论宇宙学:先讲宇宙运动学,从宇宙学原理出发,由大尺度时空的几何特性导出适用于描述均匀各向同性宇宙的罗伯逊-沃克度规,讨论了哈勃定律以及视星等与红移的关系,其中涉及到的天文学上的概念和公式则采用最简洁的方式予以引进和阐明。接下来讨论宇宙动力学,在引进宇宙项后的引力场方程的基础上,以理想流体作为宇宙物质的模型导出著名的弗里德曼微分方程;详细计算了该方程的无压尘埃宇宙解,得出在不同动力学条件下的所谓标准宇宙模型,包括静态的、空虚的、宇宙学常量 $\Lambda=0$ 和 $\Lambda\neq 0$ 的各种宇宙。最后的宇宙演化学则扼要讨论了大爆炸宇宙在过去不同时期宇宙组分的变化中发生的重大事件,其内容包括微波背景辐射、早期宇宙的中微子退耦与原初核合成以及稍后的轻原子复合和物质与辐射的退耦、甚早期宇宙及重子数的起源等等。所有这些都反映了相对论宇宙学在探讨宇宙热历史(不同阶段的特征与过程)时不可避免地近代物理(例如粒子物理、原子核物理、等离子体物理、原子物理、天体物理等)彼此渗透、相互交融;大爆炸宇宙学在提供宇宙信息方面,远比牛顿宇宙学和早期仅及于动力学的相对论宇宙学的内容要广泛和丰富得多。至于暴胀宇宙和星系形成等课题,则以目前尚无定论和限于篇幅而未予编入。奇性理论和运动理论固然重要,但因所需的数学过于艰深,超出了本书的范围而无法纳进;对

此有兴趣的读者,可以参看这方面的有关专著或文献。

本书作为研习广义相对论的入门,编者力求作到取材适度,内容完整,论述严谨,导证详尽;希望既有利于课堂讲授或读者自学,又能为进一步阅读引力和时空这一领域的专著和文献奠定必要的理论基础。书中较深的部分和与后继章节关系不大的内容,均标以星号(*)或用小号字排印,初读时可以跳过,讲授时也可根据具体情况适当删减,这对研习书中其余部分的内容不会产生影响。为了充实和加深对所论课题的理解,每章之末都配以一定数量的习题,其中有些可以熟练运算的技巧,还有些则是为了扩大视野;较难部分用星号(*)标出,或者提供其出处。本书适合于作为高等院校高年级本科生和研究生的教材,也可供对广义相对论有兴趣的读者自学和有关专业的研究人员参考。

本书是我们多年来在三所高等师范院校为物理系本科生选修课和理论物理专业研究生必修课讲授“广义相对论”课程的四次自编讲义(冯麟保,1960,1980;冯麟保、刘雪成、李有成,1982;冯麟保、刘明成、武占成,1990)的基础上重新整理修订后写成的;在内容的选定和安排上作了较大的改动、充实和更新。本书的具体分工是:刘明成撰写第一、第二两章,刘雪成撰写第三至第五章,冯麟保撰写第六至第八章;我们三人相互审校了初稿,最后由冯麟保统一定稿。书中所有插图全由袁伟先生精心绘制,李冀先生在这项工作的安排和整理上给予了大力襄助,本书的封面设计是在陈际芝和李旭敏两位女士协助下完成的,刘英先生和常瑞香女士在本书付印前参加了部分整理工作;对此一并表示由衷的谢忱。由于我们的水平有限,书中缺点和错误在所难免,希望读者多加批评指正。

河北师范大学 冯麟保

首都师范大学 刘雪成

河北师范学院 刘明成

1995年4月

目 录

引言

- 一 广义相对论的基本原理..... (1)
 - 1 广义相对性原理和等效原理 (1)
 - 2 广义相对论的空间和时间 (9)
 - 3 时空度规与引力场..... (12)
 - 4 时空度规的确定..... (16)
- 二 黎曼几何和张量分析 (28)
 - 5 坐标与坐标变换..... (28)
 - 6 张量代数..... (32)
 - 7 黎曼度规..... (36)
 - 8 短程线..... (42)
 - 9 协变微分..... (47)
 - 10 短程坐标 矢量的平行移动 (53)
 - 11 曲率张量 (59)
- 三 黎曼时空中的物理定律 (68)
 - 12 质点力学 (68)
 - 13 电动力学 (72)
 - 14 流体动力学 (78)
- 四 引力场方程 (84)
 - 15 引力场方程 (84)
 - 16 牛顿引力定律 (89)
 - 17 弱引力场的线性近似 (92)
 - 18 引力场的变分原理 (96)
- 五 中心对称的引力场..... (103)
 - 19 中心对称的引力场方程及其解..... (103)

| | | |
|----------|----------------------|-------|
| 20 | 中心对称引力场中的运动与行星近日点的旋进 | (110) |
| 21 | 光在中心对称引力场中的传播 | (115) |
| 六 | 引力波 | (124) |
| 22 | 弱引力波 | (124) |
| 23 | 引力波的发射 | (128) |
| 24* | 引力波的探测 | (136) |
| 七 | 引力坍缩与黑洞 | (146) |
| 25 | 史瓦西度规的奇异性 | (146) |
| 26 | 克鲁斯卡度规 | (151) |
| 27 | 引力坍缩与黑洞的形成 | (161) |
| 28* | 旋转黑洞 | (169) |
| 八 | 宇宙学 | (182) |
| 29 | 宇宙运动学 | (182) |
| 30 | 宇宙动力学 | (191) |
| 31 | 标准宇宙模型 | (194) |
| 32* | 宇宙演化学 | (206) |
| | 参考书目 | (222) |

— 广义相对论的基本原理

1 广义相对性原理和等效原理

广义相对性原理 为了描述物理现象和给出自然规律的表述,必须选定一个适当的参考系.参考系一词表示的是一个空间坐标系和一个时间尺度二者的结合.牛顿(Newton,1687)在参考系的选定上作出了明确的限制:运动定律所研究的物体在相互作用的影响下都将产生加速度,这个量在作相互运动的任意两个参考系内应取同样的值;在两个参考系相互不作加速运动的情况下这一要求得到满足.牛顿万有引力定律表明引力的大小决定于相互作用的两个物体之间的距离,这个距离对所有的观察者来说必须表现为同一的;也就是说,在两个参考系内这两个物体之间的距离在同一时刻必须表现为取同样的值.因此,满足牛顿第一定律的参考系是容许的参考系;不受力作用的物体作匀速直线运动(或静止);这种参考系叫做惯性系.显而易见,相对于某一惯性系作匀速直线运动的参考系也是惯性系,因为物体相对于后一些参考系,除了速度不同之外,也在作惯性运动.在所有的惯性系中,空间距离和时间间隔都是不变量,从而导致了关于时空关系的伽利略坐标变换;在这种坐标变换下,力学运动定律和万有引力定律在所有惯性系中都取相同的形式.这就是说,从力学的角度来看,所有惯性系都是平权的;亦即在所有惯性系中我们不能通过任何力学实验来证实这个惯性系本身的运动.这个原理叫做力学相对性原理或伽利略相对性原理(Galileo Galilei,1632),这一原理在数学上表现为牛顿力学的基本方程在伽利略变换下是不变的或(更严格些称)协变的,所谓“协变性”是指物理定律的表示形式不因坐标系的不同选择而有所改变.

由于电动力学的麦克斯韦电磁场方程(Maxwell,1864)和在

电磁场中点电荷受到洛伦兹力(Lorentz, 1894)的所谓有质动力方程在伽利略坐标变换下并不保持形式不变,即它们不是协变的. 这些关于电磁学的基本规律只能在众多的惯性系中的一个(即所谓真正的惯性系或绝对静止空间)之内成立,特别是电磁波在真空中的传播速度只是在和仅在这一特别优越的惯性系(常称以太参照系)中才是各向同性的并且取同一的量值 c . 爱因斯坦(Einstein, 1905)从新的空间和时间观念出发,发展了伽利略相对性原理,使之不再局限于力学定律;他提出的狭义相对性原理可表述为:物理定律(包括力学的和电动力学的)在相互作用匀速直线运动的惯性系中具有相同的形式. 他进一步提出光速不变原理:在所有的惯性系中,光在真空中的传播速度是各向同性而且恒定的. 在由这两个原理导出的洛伦兹变换(1904)下,时间和空间构成一个统一的四维时空整体,而不像牛顿所设想的那样:时间和空间的存在是互不相关和彼此独立的;在这个所谓的闵可夫斯基时空(Minkowski, 1908)中,只有光速与事件间隔(或固有时间隔)这两个基本量是不变的,而量尺的长度和时钟的时率则不再是不变量. 可以证明,在狭义相对论中一切电磁规律对洛伦兹变换都是协变的,而牛顿运动方程的形式在以固有时取代绝对时间后得以保留. 这就是说,修正后的相对论性力学的基本方程在洛伦兹变换下也是协变的. 然而,在伽利略变换下保持形式不变的牛顿引力定律,则因质量有静止的和运动的之分以及二物体间的空间距离并不具有不变性质而在洛伦兹变换下将没有可能保持其协变性;特别是牛顿引力是一种超距作用,这一点也与狭义相对论不相容,因为真空中的光速是一切物理作用传播速度的极限,而在整个物理领域内洛伦兹变换排除了瞬时超距作用的可能性. 由此可见,必须从场的观点来建立相对论性的引力理论.

狭义相对性原理乃至狭义相对论中的“狭义”一词,表示时空坐标之间的变换只限于在各惯性系之间进行. 从真正的相对论观点出发,对于描述自然现象的物理定律的建立,在选择参考系方面加以任何限制其实是没有什么理由的. 然而,狭义相对论尚须在所

有可采用的参考系中区分出某些特定的所谓惯性系；尽管观察者在惯性系中一般要比在非惯性系中对物理现象进行描述来得简单，但从物理学的角度考虑，似乎没有理由认为在表述物理现象的基本定律上位于不同参考系中的观察者会有所不同。因此，参考系运动状态仅能是相互作用匀速直线运动的这种局限性，在要求物理定律具有更广泛的协变性上，有必要予以破除和扩展。

看来，预为判断作任意变速运动的参考系在描述自然现象上之与惯性参考系等价，并不是显而易见的。例如，对于受有已知作用力的物体，在它相对于惯性系的运动速度远小于光速的情况下，使用牛顿力学的基本方程，就能够对该物体的运动作出足够精确的描述。然而，在运动的描述上，若选用了作加速运动的参考系，那么就必须要引进惯性力或称虚拟力〔离心力、科里奥利力(Coriolis, 1831)等〕；这些力与物体本身的任何物理性质无关，它们取决于对惯性系作变速运动的参考系的加速度。

正是基于这样的理由，牛顿引进了绝对空间的概念，它代表这样一个绝对静止的参考系，在其内物理定律具有最简单的形式。同一定律在对这一参考系作匀速直线运动的参考系中同样能够很好地成立。因此，狭义相对性原理并没有远离牛顿力学，它与力学相对性原理相比较，不同之处仅在把局限于力学过程的描述推广到适用于一切物理现象。按照狭义相对性原理，通过任何物理实验都不能确定哪一个惯性参考系是绝对的；正是这个原理说明了速度的相对性。爱因斯坦曾对在加速参考系中出现的惯性力作了新的解释，代替把这些力作为“匀速运动参考系”与“加速运动参考系”中基本方程之间原则上差别的表示，他认为：在用方程式表述物理学基本定律方面，这两种参考系同样平权，或说全都等价；在这里加速度失去了其绝对意义，惯性系不再占有特殊优越地位，而且把“虚拟”的惯性力按照真实的力同样看待，与任何自然界中其他的力有着同样的基础。在这样的意义上，狭义相对性原理就推广为广义相对性原理或称广义协变原理，其内容可表述为：物理方程在任意的时空坐标变换下都是协变的。按照数学的以及时空性质的观

点,如我们即将看到的那样,所有的坐标系全都等价就意味着:与欧几里得几何学(Euclid,约300B.C.)对应的闵可夫斯基平坦时空必须由一个更为一般的遵从非欧几里得几何学的弯曲黎曼时空或称黎曼空间(Riemann,1854)所取代,后者的弯曲程度直接与引力场的存在密切相关。也就是说,我们可以通过时空的几何结构来对引力进行描述。事实上,正是广义相对论(1916)的建立,不仅进一步废弃了绝对时空的观念,而且认为不存在任何特殊优越的参考系。

牛顿为了论证绝对空间提出过著名的旋转水桶实验:水桶内的半桶水在桶旋转而水静止时水面是平的;当水开始转动时,由于离心力的作用使得水面下凹,直到桶趋于静止但水继续旋转时,水面将保持其抛物面的形状。据此牛顿认为:离心力不能用水与桶间的相对转动来解释,只是在水作相对于绝对空间转动时才因离心力的作用而使得水面下凹。马赫(Mach,1880)对此提出不同看法,他认为:物体的运动,特别是地球的自转,是相对于固定的恒星而不是绝对空间来说的。著名的傅科摆实验(Foucault,1851)结果是由于固定恒星的存在;如果地球是宇宙中唯一的物体,那么运动就没有可能,特别是旋转没有可能。正是宇宙的物体的存在,才产生了上述效应,与牛顿用惯性力作出的解释不同。马赫还提出:不仅惯性力与周围物质的存在和行为有关,物体本身的惯性也并非物体的固有属性,而是源于宇宙中所有其他物质的存在。爱因斯坦把这些概念统称为马赫原理。尽管这一原理迄今还没有取得实验上的确证,而且在理论上还是不很清楚的;但是它在广义相对论的建成上却起过重大作用。事实上,惯性力可以解释为一种引力的动力学效应的观念,导致了引力的相对论性概念:引力场失去了其绝对特征,而变成一个与观察者或选定的坐标系运动状态有关的量,这一点是马赫观点最重要的特征之一,它在形式上导致了广义协变原理。按照这样的观点,出现在加速系中的虚拟力与相对于这些参考系作加速运动的遥远物质有关;从而认为这类虚拟力也是一种万有引力,遥远质量的加速度在所选用参考系中引起了一个“引力

场”。

在惯性系中无从判断遥远质量的加速度能产生引力场的观念,以之与电荷相对静止的惯性系中静电体系没有磁场而在电荷对之作匀速运动的另一些惯性系中有磁场出现的事实相对比,二者十分类似。在“运动”的惯性系中磁场之所以发生,是由于电荷对这些参考系有相对运动,而磁场之出现丝毫不表示在不同的惯性系中电动力学基本方程的形式有所不同。这两种情况之间的主要差别在于:磁场的起因能够在地面上的体系的(即电荷的)运动状态中求得,而在加速系中的万有引力场的来源必须从遥远的天体物质的运动状态中来找到。有关天体质量的影响最初被认为是可以忽略的,然而在我们目前所讨论的物理体系中,却必须把这些遥远质量包括在内。仅当我们选用了特殊的参考系(即惯性系)时,才可以不去考虑它们;这就是惯性系与其他参考系的唯一不同之处。因此,我们可以作出这样的结论:在用方程式“表述”物理学的基本定律这一问题上,所有的参考系全都“平权”;也就是说,物理方程式在任意的坐标变换下都是“协变的”。

等效原理 把惯性力解释为万有引力,是因为它们具有一般引力场的基本特性;引力场的这一特性是:所有自由质点,不论质量大小,只要初始条件相同,它们在场中就将以相同的方式运动。例如,在地球重力场中所有物体自由降落的规律都是一样的,即不论它们的质量如何,都获得同一的加速度。

物体的惯性质量表示物体反抗速度改变的特征或能力;在给定的力的作用下,加速度与物体的惯性质量成反比。物体的引力质量则表示物体产生引力场及承受引力场作用的特征或能力;在给定的场中,作用于物体上的力正比于它的引力质量。按照上述的质量定义,所有自由物体在地球重力场中以相同加速度降落的事实,就表示地球重力场施予物体之力与各该物体的惯性质量成正比。

设我们引入某一坐标和时间的函数 φ , 用来描述场的特性;这个叫做引力势的函数 φ 及其微商在整个空间里均为确定的单值和连续的,并且在无穷远处趋近于零。于是引力质量为 m_G 的物体在

函数 φ 为已知的引力场中所受之力为

$$F = -m_G \text{grad} \varphi. \quad (1-1)$$

另一方面,在物体的速度 v 远小于光速 c 的情况下,牛顿运动方程给出

$$m_i \dot{v} = F, \quad (1-2)$$

式中的 m_i 是物体的惯性质量, \dot{v} 是其加速度;从而可以得到

$$m_i \dot{v} = -m_G \text{grad} \varphi. \quad (1-3)$$

既然物体在引力场中的运动与它们的质量无关,因此所有物体的惯性质量和引力质量之比必须为同值;这个值只能是由两种质量所采用的单位而确定的普适常量.我们常选取适当单位以使

$$m_i = m_G = m; \quad (1-4)$$

即惯性质量等于引力质量.

物体的这两种质量的相等或成比例的论断,已为大量精确的实验所证实.^①经典力学把这两种质量的相等看成是一种偶合,不能给出任何解释.对这种量值相等的任何说明,只有在两种概念的实质确实相等的基础上才能做出,这个问题在广义相对论中得到了解决.

基于惯性质量和引力质量的相等,物体在引力场中的运动方程改取如下的形式:

$$\dot{v} = -\text{grad} \varphi. \quad (1-5)$$

上式不包括物体的质量,也不包含任何其他描述物体特征的常量,它就是描述引力场基本特征的数学表示.

在某给定的惯性参考系中,所有相距为甚远的物体的自由运动无一不是匀速直线的;而且它们都将继续保持其各自的运动状态不变.但是,当我们考虑这些物体在另一给定的非惯性参考系中的自由运动时,很明显不论它们的质量如何,也都将以相同的方式

^① 例如厄缶(Eötvös, 1889, 1922)的扭摆实验证实两种质量之比的精确度为 5×10^{-9} ; 迪克(Dicke, 1964)和布热津斯基(Braginsky, 1972)等人先后把这一精确度提高到 10^{-11} 和 10^{-12}

运动。例如在作匀加速直线运动的参考系中，所有物体的自由运动必将表现为相对于这个参考系具有相同的而且是平行的不变加速度；这个加速度与参考系本身的加速度大小相等但方向相反。同样的运动情况可以发生在均匀恒定的引力场中，例如地球的引力场在不大的区域内可以看成是均匀和恒定的（严格说来，地球表面的引力场应是源于地球转动而引起的离心力和地球质量对该物体的万有引力这两种类型的场的叠加）。因此，一个作匀加速运动的参考系与一个不变的均匀外场是等效的；更一般的情况是，作任意变速直线运动的参考系，将与一个均匀的但是变化着的引力场等效。

由此可知，表现在一个非惯性系中的运动特性与在一个有引力场存在的惯性系中的运动特性，并无不同；换句话说，非惯性系与某一引力场等效，这就是所谓的等效原理。这一原理与惯性质量和引力质量的相等密切关联，而且非惯性系与（有引力场存在的）惯性系在描述物体运动上的平权，恰好表述了广义相对性原理的内容；而这些坐标系相互间的运动一般可以是非均匀的，也正是通过了这样的观念，才取得了“惯性”和“引力”在本质上的统一。我们是这样认为的：同一质量或仅表现出它的惯性性质（例如相对于惯性参考系），或同时表现出它的惯性性质和引力性质（相对于非惯性参考系）；惯性质量和引力质量在量值上的相等，是通过它们在本质上的统一来阐明的。

在这里必须指出，与非惯性参考系等效的场实际上并不与在惯性系中存在的“真实”（或称“永久”）的引力场完全相同。例如，在距离产生场的物质无穷远处，“真实”的引力场趋近于零；而非惯性参考系等效的场在无穷远处，或是保持为有限值（对应于匀加速直线运动的参考系的惯性力场），或是无限地增大（对应于转动参考系的离心力场）。

只要我们从非惯性系过渡到惯性系，与非惯性系等效（亦即源于遥远质量）的引力场就消失了。然而，无论选择哪一种参考系，都不可能把“真实”（例如源于邻近质量）的引力场完全消除；它在即