高等学校试用教材

优化设计及应用

孙国正 主编

人民交通出版社

高等学校试用教材 优化设计及应用

高等学校试用教材

优化设计及应用

Youhua Sheji Ji Ying yong

孙国正 主编

人民交通出版社

(京)新登字091号

内容提要

本书以“什么是优化设计”为主线，把概念、方法和实际应用有机地结合起来。全书重点突出，语言通俗、简洁。在内容的选取上，本书兼顾了不同层次的需要和机械、结构优化两个方面。

本书在保证教学大纲所规定的基本内容外，还适当反映了优化设计领域的最新进展。此外还编入了作者近年来从事优化设计研究的实际经验。

本书可作为高等学校机械类专业学生的试用教材，亦可作为从事优化设计工作的工程技术人员的参考书。

高等学校教材

优化设计及应用

孙国正　主编

插图设计：秦淑珍　正文设计：乔文平　责任校对：刘素燕

人民交通出版社出版

(100013北京和平里东街10号)

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16　印张：14.75　字数：377千

1992年　12月　第1版

1992年　12月　第1版　第1次印刷

印数：0001—2000册　定价：3.80元

ISBN 7-114-01403-1

TH·00004

前　言

科学技术作为第一生产力，它的强大的程度一方面取决于科学技术自身的发展水平，另一方面取决于它被人们理解的程度。只有当科学成为人们的常识，技术成为广大劳动者的本领，科学技术的物化成果成为人们广泛使用的工具和生活必需品时，它才能成为巨大的社会力量。

科学技术的发展，特别是近代科学技术的发展，许多学科已分别形成了自己特殊的概念、符号、理论体系和表达方式。它们愈成熟愈完整，对科学家和工程技术专家来说就愈方便。但对迫切需要它的成果的公众来说，就愈难理解，愈觉得深奥、抽象、玄妙。因此，让公众理解科学，已成为历史赋予我们这个时代的使命。

优化设计作为一门新的技术，如何使广大科技工作者和高等学校的学生便于理解它，并成为自己使用的工具，使它的物化成果产生巨大的经济效益和社会效益，是编写这本书所考虑的中心主题。为此，本书尽可能以通俗、简洁的语言，使读者理解优化设计技术。全书以解决“什么是优化设计”这一问题为主线，把概念、方法及应用有机地结合起来，力求做到重点突出，难点讲透。

在内容的选取上，本书兼顾了本科生、研究生以及广大科技工作者不同的需要。对于本科生一般只需讲授第一至第五章以及第十或第十一章（可根据不同专业的要求选取），并结合必要的编程、上机操作调试。其他各章也可根据具体情况增选部分内容。其中第八章满应力设计是为了反映优化设计另一重要分支——准则法而选编的；第七章非线性规划的灵敏度分析和第九章专家系统支持下的优化设计则介绍了优化设计领域的新的发展动态。

今天，在世界范围内，人们以越来越大的热忱在推进着公众理解科学技术这个宏大的、影响着社会每一个方面的事业。作为这个事业的积极参与者，我们希望这本书能够成为优化设计技术与公众之间的一座宽广而又通畅的桥梁。

参加本书编写的有：孙国正（第一章、第二章、第四章至第六章、第八章至第十章），李玲（第三章、第十一章），王少梅（第七章）等同志。孙国正同志担任主编。黄崇斌同志和董明望同志协助进行了某些内容的整理和例题计算工作。

武汉钢铁学院过玉乡同志担任本书的主审，武汉水运工程学院王贤峰同志也参加了部分章节的审稿工作。他们认真细致地审阅了各章内容，并提出了许多宝贵的修改意见。另外，武汉水运工程学院王慕强同志、陶德馨同志对书稿作了部分修改，在此表示衷心的感谢。

鉴于近年来优化设计涉及的理论与方法比较广泛，发展也很迅速，又限于我们的水平，书中不妥和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1991年8月于武汉

目　录

第一章　优化设计概论

优化设计是近年来发展起来的一门新的科学，也是一项新的技术，它在工程设计的各个领域得到了广泛的应用。为什么人们如此重视这项新技术呢？因为“最优化”是每一个工程或产品设计者所追求的目标。任何一项工程或一个产品的设计，都需要根据设计要求，合理选择方案，确定各种参数，以期达到最佳的设计目标，如重量轻、材料省、成本低、性能好、承载能力高等等。优化设计正是根据这样的客观需求而产生并发展起来的。

实际应用表明，优化设计不仅为工程设计提供了一种新的科学设计方法，使得在解决复杂设计问题时，能从众多的设计方案中找到尽可能完善的或最合适的设计方案，而且采用这种设计方法能大大提高设计效率和设计质量，具有较明显的经济效益和社会效益。例如在机械设计方面，如果对具有十个变速档的机床主轴箱进行优化设计，和常规设计相比，中心距总和可从578mm减小到482.3mm，减少16.5%。在结构设计方面，目前我国对简单结构物进行优化设计，比常规设计节约材料7%；对较复杂结构物可节约材料20%；对复杂结构物能节约材料35%～40%。国外经验表明，采用优化设计，可使结构节约材料或造价10%～50%。

优化设计的理论基础是数学规划，采用的工具是电子计算机。因此它具有常规设计所不具备的一些特点。主要表现在两个方面：

（1）优化设计能使各种设计参数自动向更优的方向进行调整，直至找到一个尽可能完善的或最合适的设计方案。常规设计虽然也希望找到最佳的设计方案，但都是凭借设计人员的试验来进行的。它既不能保证设计参数一定能够向更优的方向调整，同时也不可能保证一定能找到最合适的设计方案。

（2）优化设计的手段是采用电子计算机，在很短的时间内就可以分析一个设计方案，并判断方案的优劣和是否可行，因此可以从大量的方案中选出更优的设计方案，这是常规设计所不能相比的。

当然，优化设计也有其自身的局限性需要研究解决。但“最优化”是工程设计永恒的主题，这就决定了优化设计是一切工程设计的必由之路。随着电子计算机功能的不断扩大，计算机不仅可用来进行高速运算、逻辑判断，而且可进行人机对话、光笔修改、自动绘图。结合优化方法的不断完善，就一定能实现工程设计的自动化和最优化。

本章的目的是让读者从总体上了解什么是优化设计。围绕这个主题，着重论述以下三个问题：

（1）工程或产品设计是实际问题，而作为优化设计理论基础的数学规划属于运筹学范畴。这里要把工程实际问题和有关数学方法结合起来。问题的关键是如何把工程实际问题转化成便于用数学方法求解的优化数学模型。通过数学模型的建立，就可以从本质上更深刻地理解什么是优化设计。

（2）优化过程是如何进行的？怎样保证设计参数能自动向更优的方向调整。通过优化过程的剖析，就可了解优化过程包括哪些主要内容。

（3）优化设计还存在哪些局限性？今后应从什么方向去研究解决。

第一节　工程中的优化设计问题

在工程实际中有许多优化设计问题，这里列举几个简单例子，以便对“什么是优化设计”有一个初步的认识。

例1：汽车驾驶室刮雨装置往往存在玻璃四个角落不易擦到，刮雨范围较小的缺点，因此视线达不到最优。通过采用四连杆传动装置如图1-1所示，可以使刮雨范围变成不是圆弧形，从而能克服上述缺点。优化的目标是，合理确定四连杆的几何尺寸，使刮雨范围尽可能大。显然，通过改变传动装置的几何尺寸，例如改变连杆长度L_1、L_2、L_3和固定点坐标x_1、y_1等设计参数，就能改变刮雨范围的形状和大小。限制条件是刮雨臂不能超出玻璃窗框的范围以及传动装置所占的空间不宜太大。图1-2表示刮雨范围常规方案和优化方案的比较。

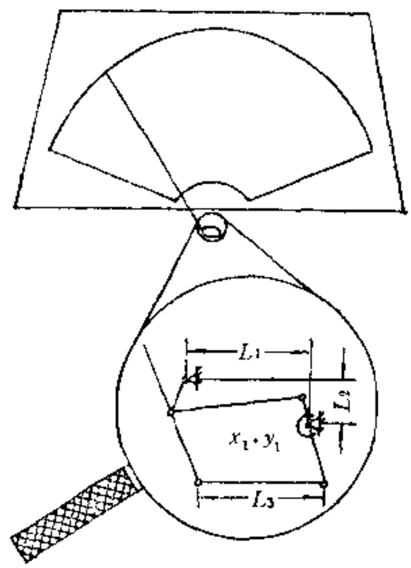

图1-1　汽车刮雨器的传动装置

例2：图1-3表示一个承载系统的重量最优化问题。该系统由一根管子和一个矩形截面梁组成。优化目标是在给定的载荷情况下，使承载系统的重量最轻。管子内外直径和矩形截面梁的宽度和高度可以变化，视为设计参数。限制条件是承载系统的总变形和最大应力不能超过允许值。

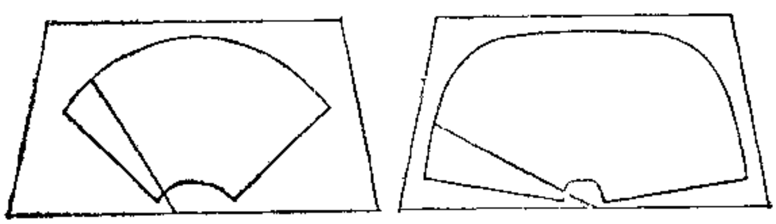

图1-2　刮雨范围常规方案和优化方案的比较

例3：上述两个优化设计问题都具有一个共同的特点，即有明确的设计参数和这些参数与优化目标和限制条件之间的关系。也就是说，只要改变这些设计参数，就能改变如刮雨范围、系统重量这些优化目标的量值以及限制条件。只要我们通过适当方法，寻找到一组最佳的设计参数，就能实现最优化目标。图1-4中所示例子，是一个冲压件下料布置的最优化问题。冲压件是三块不同大小的矩形板。现在所提出的问题是，在下料时应如何布置这三块不同大小的矩形板，使它们的包络线在板材上所围成的面积最小。我们可以把矩形冲压件形心的坐标作为设计参数，限制条件是冲压件在板材上不能重叠。这个例子的主要特点之一是设

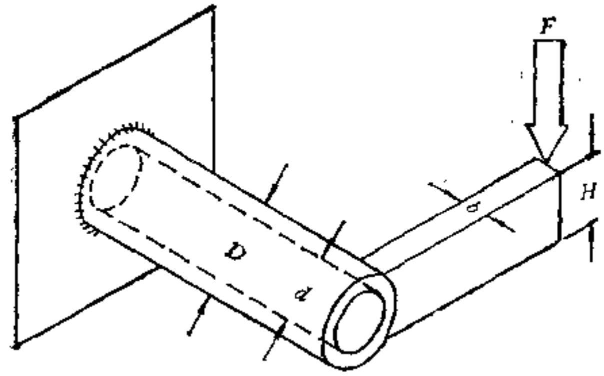

图1-3　由管子和矩形截面架组成的承载系统

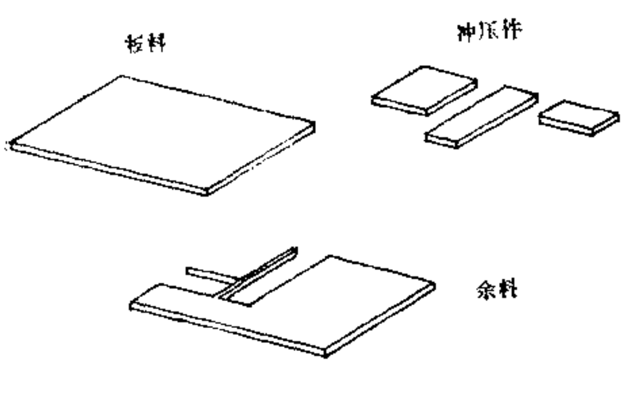

图1-4　冲压件下料的最优布置

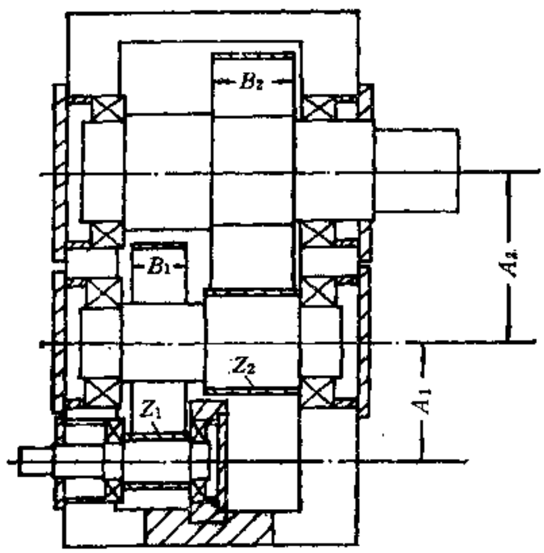

图1-5　二级齿轮减速箱

计参数和优化目标、限制条件之间的关系很难建立。

例 4：图 1-5 是一个两级齿轮减速箱的优化设计问题。优化目标是重量或费用最小。设计参数是小齿轮齿数Z_1和Z_2、齿轮宽度B_1和B_2、两级齿轮轴的中心距A_1和A_2以及传动比的分配。限制条件应考虑材料的强度、制造的可能性以及各种有关的设计标准等。和前面的优化设计例子相比，齿轮箱的优化设计问题具有较多的设计参数（这里有 7 个）和限制条件（通常多于20个）。

例 5：图 1-6 是一个货架底板的截面形状优化设计问题。它的优化目标是在重量尽可能轻的条件下，使底板的刚性达到最大。为此可通过折边来提高底板的刚度。底板横截面由许多小的直线段组成，它们彼此之间的夹角可作为参数进行变化。由于有许多直线段，因此设计参数也比较多（多于15个）。限制条件的范围很宽，可不予考虑。本例的特点是设计参数彼此无关，目标的改善常常是多个角度同时以适当的量变化时才能达到。太少或太多的设计参

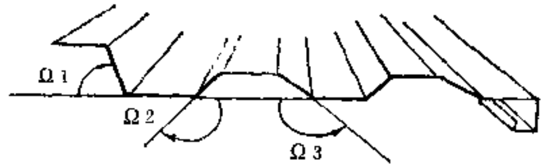

图1-6　货架底板的横截面

数变化时，优化目标的改善常常达不到。

从上述例子我们可清楚地看到，优化设计问题都具有一个明确的优化目标。最优目标的实现，可通过改变设计参数来达到。设计参数的变化要受到限制条件的约束（个别情况，如例 5 可不受约束）。这里有两个问题：

（1）首先必须确定设计方案的结构型式。例如在例 1 中首先要确定采用四连杆传动机构型式而不是其他传动型式；例 4 中要确定采用两级齿轮减速箱而不是采用三级齿轮减速箱，如此等等。

（2）在一定的结构型式下，建立设计参数与优化目标和约束条件之间的关系。这个关系必须具体到能够建立起两者之间的数值相关表达式。表达式可以是单个、几个，甚至是一个计算过程。

第一个问题实际上是结构型式的优选问题（也称非数值优化问题）。例如对上述例 2 中的承载系统，可以选择圆管和矩形截面梁组合型式，也可选择其他截面的组合型式，甚至整个承载系统不采用L 型布置，而是在固定端和力作用点的连线上设置一根斜梁来代替。这种结构型式优选问题用数学规划理论去解决十分困难，一般只能凭经验从少量的结构型式中来选定。如果有条件建立一个结构选型知识库，当然也可应用专家系统进行优选，从而实现结构型式优选的计算机化。

第二个问题实际上是在确定的结构型式下的参数优化问题。这类问题由于能够十分具体地建立起优化目标、约束条件和设计参数之间的数值关系，故采用一般数学规划方法来解决此类问题是十分合适的。本书的重点就是讨论这种参数最优化问题（也称数值量优化问题）。对于建立优化目标、约束条件和设计参数之间数值关系比较困难的优化设计问题（例如前面提到的例 3）则需要采用特殊的随机方法（如蒙特卡罗法）解决。

如前所述，参数最优化问题的关键是要建立设计参数与优化目标、约束条件之间的数值关系。这实质上就是要建立一个优化数学模型。那么，这种优化数学模型如何建立呢？下面就来讨论这个问题。

第二节　优化设计的数学模型

一、引　例

我们先用一个实例来分析优化设计的数学模型。如图1-7所示一中心受压的管柱，假设所承受的压力$P=22\ 680$N

柱长$L=254$cm，柱的材料为铝合金，其弹性模量$E=7.03\times10^4$MPa，密度$\rho=2.768\times10^{-6}$g/cm^3，许用应力$[\sigma]=140$MPa，截面中心线直径$D=(D_0+D_1)/2$，壁厚为T。现在要求对此管柱进行优化设计，即要寻找一组参数 D和 T，在保证强度、稳定性等条件下，使管柱的重量最轻。管柱的质量表达式为：

$$W=\rho L\pi DT=0.703\pi DT \qquad (1\text{-}1)$$

很显然W是变量 D和 T的函数，我们称之为该优化问题的目标函数，D和 T称为设计变量。优化设计在此具体问题上的任务，就是要找到一组设计变量D和T，使目标函数 $W(D,$

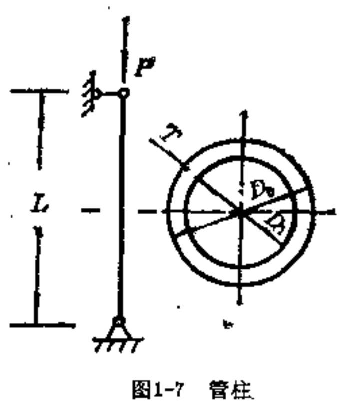

图1-7　管柱

T)达到最小值，并满足以下几个条件：

（1）压杆的稳定性条件

$$\sigma-\sigma_e\leqslant 0$$

式中：σ——计算应力，$\sigma=P/\pi DT$；

σ_e——欧拉临界应力，$\sigma_e=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{\pi^2 E}{8L^2}(D^2+T^2)$。

由于$D\gg T$，可将T^2忽略不计，再把有关数据代入，则上述稳定性条件可写为：

$$\frac{22680}{\pi DT}-\frac{7.03\times10^5}{8\times254^2}\pi^2D^2\leqslant 0 \tag{1-2}$$

（2）局部稳定性条件

$$\sigma-\sigma_c\leqslant 0$$

其中：σ_c——局部稳定性的临界应力，$\sigma=0.4ET/D$。

将有关数据代入，则局部稳定性条件可写为：

$$\frac{22680}{\pi DT}-\frac{2.812\times10^4}{D}\leqslant 0$$

简化后得：

$$0.05-T\leqslant 0 \tag{1-3}$$

（3）强度条件

$$\sigma-[\sigma]\leqslant 0$$

将已知数据代入后得：

$$\frac{22680}{\pi DT}-140\leqslant 0 \tag{1-4}$$

（4）工艺、几何尺寸等限制条件

$$0.1-T\leqslant 0 \tag{1-5}$$

$$D\geqslant 0 \tag{1-6}$$

$$D-8.9\leqslant 0 \tag{1-7}$$

以上这些条件我们称之为约束条件。显然，不等式左边的表达式都是设计变量D、T的函数，故又称为约束函数。下面我们将上述优化设计问题用图形进一步来描述。如图1-8所示，以设计变量D、T作为坐标轴，所构成的一个空间称设计空间。因为这时设计变量是两个，故称为二维设计空间。设计空间中的任何一个点都表示一个设计方案（即相应有一个D和T）。与此同时，我们把约束函数(1-2)式至(1-7)式取等式后，将其一一画在设计空间内。例如压杆稳定性约束条件所构成的约束函数，取等式后即为$\sigma-\sigma_e=0$，其对应的曲线如图1-8中所示。设计空间中在曲线$\sigma-\sigma_e=0$右上方的任何一点所对应的设计方案，都能满足(1-2)式所表示的约束条件。反之，曲线$\sigma-\sigma_e=0$左下方的任何一点则不能满足。其他的约束函数由此类推。这样一来，整个设计空间被约束条件划分成两个区域，一个称为可行区，可行区内任何一点所对应的设计方案能满足全部约束条件，代表一个可行的设计方案。另一个称为非可行区，该区域内的任何一点都是不可行的设计方案。显然，优化设计的任务就是要在设计空间的可行区内找到一个点，使目标函数值最小，这一点所对应的设计方案就是最优设计方案。最优点在什么地方呢？从表示目标函数的(1-1)式可知，当赋予W一系列的确定值之后，由方程(1-1)式可以在设计空间内绘出相应的一系列的W等值线。如图1-8中所绘出

的$W=2.722$或$W=1.814$曲线，表示该两条曲线上的任何一点所对应的目标函数值都是2.722或1.814。等值线越靠近坐标原点，其W值越小。显然，我们所需要找的最优点一定是j点。即管柱的最优方案为：

$$D=8.128\text{cm}\quad T=0.1\text{cm}$$

这时管柱的质量$W=1.814\text{kg}$为最小。

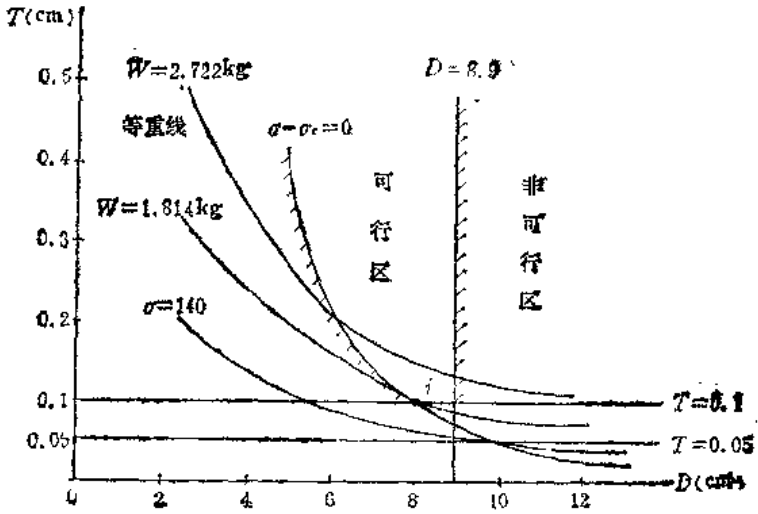

图1-8　管柱优化设计几何描述

从管柱优化设计这一具体例子可以看到，优化设计就是寻求一组设计变量，在满足约束条件的情况下使目标函数值最小（或者最大）。

二、优化设计的数学模型

通过管柱优化设计的例子，我们对什么是优化设计有了进一步的直观认识。下面我们将进一步用数学形式来描述优化设计，以便更深入地掌握优化设计的本质。首先我们来讨论一下在优化设计中经常碰到的几个基本概念。

1.设计变量与设计空间

任何一个机械设计方案一般都是由若干个设计参数所决定的。这些设计参数可以是构件的截面尺寸、零件的直径和长度、齿轮的模数、机构的工作速度等，也可以是弹性模量，许用应力等与材料有关的参数。在这些设计参数中，一部分是按具体要求事先给定的，它们在优化设计过程中始终保持不变，故称为预定参数。例如我们在零件和结构件设计时，经常是先选定材料，因而弹性模量和许用应力就是预定参数。另一部分参数在优化设计过程中是可以变化的，如构件截面尺寸大小等，这类设计参数就称为设计变量。至于说哪些设计参数作为预定参数，哪一些作为设计变量，这要根据各个优化设计问题的具体情况而定。一般来说，设计变量数愈多，设计自由度就愈大，优化设计过程也就愈复杂。

以设计变量为坐标轴所构成的空间称设计空间。一般情况下，设计变量的个数就是设计空间的维数。如设计变量为2个，则设计空间就是二维的（即构成一个平面）。如有n个设计变量，则构成n维设计空间（n维向量空间）。设计变量通常用下列向量表示：

$$X=(x_1x_2\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$$

该向量X即表示n维设计空间中的一个点。

设计变量可以是连续型的，也可以是离散型的。例如在机械设计中，钢板的厚度、型钢的规格、轴承的内外径、齿轮的模数等都要符合规范所规定的数值，所以它们都不是连续的，而是离散跳跃的。离散型设计变量的优化过比连续型的要复杂得多。为了简化计算，有时可把离散型设计变量视为连续的，找到最优解后，再选取与之最近的离散值。如图 1-9 所示设计变量x_1和x_2为离散型变量，其取值只能在虚线上。如果将x_1和x_2视为连续变量，则最优点为j，而实际的最优点应该是k。

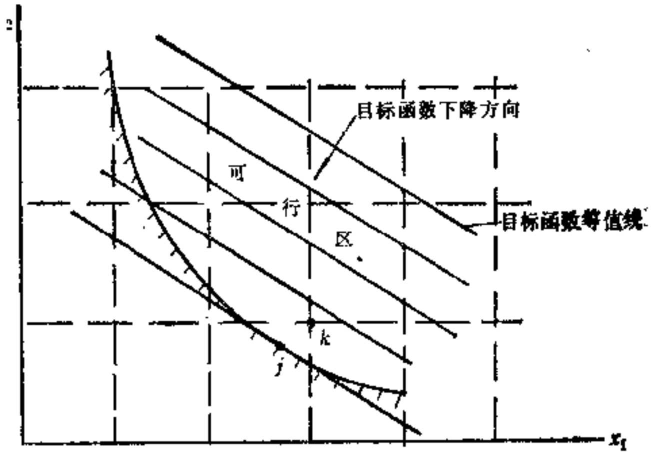

图1-9　离散型设计变量

2.约束条件及可行区与非可行区

在机械设计中，设计变量总要受到某些条件的限制，如强度、刚度条件等，这些条件称为约束条件。约束条件一般都可用不等式或等式表示，其一般形式为：

$$g_i(X)\leqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$h_j(X)=0 \qquad j=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ l$$

不等号或等号左边表示根据约束条件建立起来的设计变量X的函数式，又称为约束函数。这里表示有m个不等式约束和$(l-m)$个等式约束。必须指出，如果约束条件出现$g_i(X)\geqslant 0$的情况，只要不等式两边同乘以-1即可将“$\geqslant$”改为“$\leqslant$”。另外，$h_j(X)=0$也可用$h_j(X)\leqslant 0$和$-h_j(X)\leqslant 0$来代替。所以约束条件一般可用$g_i(X)\leqslant 0$一种形式来表达。

约束条件将设计空间划分成可行区与非可行区。凡是满足约束条件的设计点（即设计方案）都必须在可行区内，因此可行区就是所有满足约束条件设计点的集合R，即

$$R=\{X|g_i(X)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$$

3.目标函数

最优化设计就是要从无数个可行方案中寻求最优方案。那么，什么是最优呢？这里必然有一个评价优劣的标准。对于不同的优化设计问题，评价优劣的标准各不相同，也就是追求的目标不相同。机械优化设计的目标常常可用重量、体积最小，成本最低，用料最省，利润最高，产值最大，寿命最长，可靠性最好，机械技术性最佳等来标志。优化的目标在数学上一般都可写成设计变量的函数关系式。这个函数就称为目标函数，记作$f(X)$或$f(x_1x_2\cdots x_n)$。以前面管柱优化设计问题为例，假如管柱截面中心线直径D用x_1表示，壁厚T用x_2表示，其目标函数可写成：

$$f(X)=\rho L\pi x_1x_2$$

目标函数有单目标和多目标之分。管柱优化设计只追求重量最轻这一个目标，故其目标函数属于单目标。在某些四连杆机构优化设计问题中，一方面追求其中一根连杆端点的轨迹尽可能是一条水平线，另一方面还要追求驱动力矩最小，这就同时有两个优化目标，故称多目标。关于多目标优化问题，我们将在以后的专门章节中详细讨论，这里就不再赘述。

4.优化设计的数学模型

如前所述，优化设计的任务就是要在可行区域内找到一个点，使目标函数值最小。因此优化设计可作如下数学描述：

寻找　　$X=(x_1x_2\cdots x_n)^T$

使得　　$f(X)\to\min$

并满足$g_i(X)\leqslant 0\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$

或更简练地描述为

$$\min_{x\in R} f(X)$$

$$R=\{X\,|\,g_i(X)\leqslant 0\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$$

以上就是优化设计的数学模型。由此可见，优化设计在数学上来说，就是在R这个闭集合上求目标函数$f(X)$的极值问题，也就是个有约束的极值问题。

必须指出，优化设计问题可以是求极小值，也可以是求极大值。由于$f(X)$的极大值问题可以转化成求$-f(X)$的极小值问题，故在以后的讨论中都把优化设计问题看成是求有约束的极小值问题。

三、建立优化设计数学模型的几个实例

例１：圆柱形螺旋压力弹簧的优化设计

试设计一受静载荷的圆柱螺旋压缩弹簧。已知当弹簧受载荷$P_1=178$N时，其长度$H_1=89$mm；当$P_2=1160$N时，$H_2=54$mm。该弹簧套有心棒，弹簧材料为II组普通碳素弹簧钢丝。

设以获得弹簧重量最轻为优化目标。设计变量为弹簧钢丝直径d，弹簧中径D_2，工作圈数n，即：

$$X=(d,\ D_2,\ n)^T=(x_1x_2x_3)^T$$

目标函数用弹簧丝的体积来表示：

$$V=\frac{\pi^2}{4}(x_3+n_2)x_2x_1^2$$

式中n_2为安全圈数。取$n_2=1.5$

约束条件有：

（１）强度条件

根据

$$\frac{8kP_2D_2}{\pi d^3}\leqslant[\tau],\quad k=\frac{1.87}{\left(\frac{D_2}{d}\right)^{0.222}},\quad [\tau]=\frac{S\cdot A}{d^B}$$

可得：

$$\frac{8\times1.87P_2}{\pi SA}\,d^{(0.222+B)-3}\cdot D_2^{0.778}\leqslant 1$$

式中：P_2——弹簧承受的最大载荷（N）；

S、A、B——常数值，见表1-1和1-2；

k——弹簧的曲度系数。

S 值 表1-1

载荷性质	S
I 类：受变载荷作用次数在10^6以上或者是很重要的弹簧	0.3
II 类：受变载荷作用次数在10^3～10^6以及受冲击载荷的弹簧	0.4
III类：受变载荷作用次数在10^3以下或基本受静载荷的弹簧	0.5

A、B值 表1-2

碳素弹簧钢丝材料的组别	钢丝直径 d(mm)	A	B
I 组	0.2～1	2511	0.056
	1～6	2242	0.250
II 组	0.2～1	2023	0.084
II_a 组	1～8	1992	0.212
III 组	0.2～1	1602	0.067
	1～8	1562	0.2105

根据弹簧受静载荷，材料为II组碳素弹簧钢丝，假定直径在 1 ～ 8 mm，分别由表1-1和表1-2查得：

$$S=0.5,\quad A=1992,\quad B=0.212$$

代入上式得：

$$5.546x_1^{-2.566}x_2^{0.778}-1\leqslant 0$$

这就是强度约束条件的最终表达式。

（2）刚度条件

根据

$$\frac{Gd^4}{8eD_2^3}\leqslant n$$

式中：G——弹簧剪切弹性模量，$G=8\times10^4$MPa；

e——弹簧刚度(N/mm)，$e=\dfrac{P_2-P_1}{H_1-H_2}=\dfrac{1160-178}{89-54}=28$MPa。

代入上式得：

$$357.143x_1^4x_2^{-3}x_3^{-1}-1\leqslant 0$$

（3）工艺条件

工艺条件主要是用于限制弹簧的旋绕比，即：

$$C\leqslant C_{min}$$

式中 $C=\dfrac{D_2}{d}$，C_{min}为最小容许旋绕比，代入上式得：

$$C_{min}x_1x_2^{-1}-1\leqslant 0$$

（4）几何约束条件

在这里应保证设计变量为非负，即：

$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$
$$x_3 \geqslant 0$$

采用几何规划方法求得其最优解为：

$$x_1 = 5.36\text{mm},\ x_2 = 28.1\text{mm};\ n = 13.35$$

例 2：箱形截面梁的优化设计

箱形梁的计算简图如图1-10所示。设计变量为梁高x_1，梁宽 x_2，腹板厚度x_3和翼缘板厚度x_4。写成向量形式：

$$X(x_1 x_2 x_3 x_4)^T$$

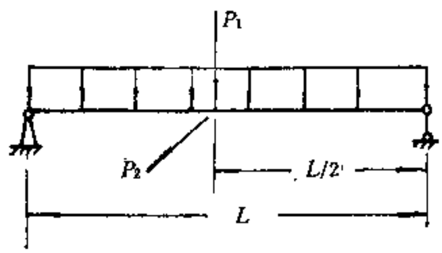

图1-10 箱形截面梁计算简图

仍取重量最轻为优化目标。由于梁的跨度为已知，所以可用梁的截面面积来作为目标函数。同时，又因为梁的高度和宽度尺寸远大于板的厚度尺寸，故截面面积之半可近似为：

$$f(X) = x_1 x_3 + x_2 x_4$$

这就是本优化设计的目标函数。约束条件为：

（1）强度条件

由计算简图可知该梁承受双向弯曲，故强度条件的表达式为：

$$g_1(X) = \sigma - [\sigma] \leqslant 0$$

式中σ为图示载荷作用下危险截面危险点的计算应力，〔σ〕为许用应力。代入设计变量和载荷即可得到强度约束条件：

$$g_1(X) = k_1\left[\frac{P_1 + 7.8WL/10000}{3x_1x_2x_4 + x_1^2x_3} + \frac{P_2}{3x_1x_2x_3 + x_2^2x_4}\right] - [\sigma] \leqslant 0$$

其中：$k_1 = \dfrac{3L}{4}$，$W = x_1x_3 + x_2x_4$

长度单位为mm，力的单位为N（以下同）。

（2）刚度条件

刚度约束条件（梁跨中挠度限制）的表达式为：

$$g_2(X) = \frac{k_2}{3x_1^2x_2x_4 + x_1^3x_3} - [f] \leqslant 0$$

其中：$k_2 = P_1L^3/(16.8\times10^5)$，$[f] = \dfrac{L}{700}$（允许挠度）

（3）翼缘板局部稳定性条件

保证箱形梁翼缘板局部稳定性而不需要加筋的条件为：

$$g_3(X)=\frac{x_2}{x_4}-60\leqslant 0 \qquad (\text{对}Q235\text{—}A)$$

（4）腹板局部稳定性条件

加筋过多不仅会增加制造成本，而且焊缝过多会引起较大的应力集中，故在设计时只考虑在腹板上加一条纵筋。腹扳加一条纵筋的条件是：

$$g_4(X)=\frac{x_1}{x_3}-160\leqslant 0$$

（5）几何约束条件

考虑到便于焊接加工，板厚不得小于5mm，于是得到几何约束条件：

$$g_5(X)=0.5-x_3\leqslant 0$$

$$g_6(X)=0.5-x_4\leqslant 0$$

用可行方向法求得上述优化设计数学模型的最优解如表1-3。所用数据为：

$$P_1=120\ 000\text{N} \quad P_2=12\ 000\text{N} \quad [\sigma]=140\text{MPa}$$

计算结果比较　　表1-3

跨度	常规设计 (mm)				优化设计 (mm)				减轻
L(cm)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	自重
1 050	760	340	6	10	790	310	5	8	19.8%
1 350	880	390	6	10	870	380	6	6	18.8%
1 650	1010	440	6	10	1 020	370	6	8	13.7%

四、优化设计数学模型的评价

在优化设计数学模型建立以后，必然会遇到这样一些问题：用参数最优化方法对该模型进行优化计算能否获得成功？选用什么样的优化方法比较合适？等等。要回答这些问题，必须对各种优化设计数学模型的特性进行分析，并作出相应的评价。因为这些特性对优化计算的成功与否以及优化方法的选择将起决定性的作用。模型的特性分析和评价，主要考虑以下几方面：

1.模型的可解性

优化设计数学模型大多数是可以利用参数优化方法求解的。如果数学模型不复杂，公式系统的表达一目了然，那么，参数最优化方法就可得到很好的应用，并且在比较短的计算时间内，就可获得满意的优化结果。对于简单的数学模型，也许通过使其目标函数一阶导数等于零就可确定其极值，找到最优解。对于具有一定复杂程度的模型，只要极值的形成是可以实现的，一般都具有可解性。

2.线性与非线性程度

如果目标函数和约束函数均为线性函数，就是一个线性优化问题。对于这种问题，一般都可利用适当的优化方法，在相对来说比较短的时间内得到比较好的优化结果。一般来说，非线性优化问题的可解性要比线性优化问题差。非线性程度越高，目标函数和约束函数的性态就越差，求解也就越困难。甚至有可能无法求解。