纯粹数学与应用数学专著 第37号

无穷维随机分析引论

黄志远 严加安 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

纯粹数学与应用数学专著　第37号

无穷维随机分析引论

黄志远　严加安　著

科学出版社

1997

EA01/3/14

内 容 简 介

本书系统地介绍了 Malliavin 分析和白噪声分析这两个无穷维随机分析重要领域. 全书分五章. 第一章介绍无穷维分析的基础知识,包括 Hilbert 空间中的线性算子、Fock 空间、核空间及其对偶、拓扑线性空间上的 Borel 测度;第二章介绍 Malliavin 随机变分的基本理论;第三章介绍随机变分的若干重要应用,包括 Hörmander 定理的概率证明,抽象 Wiener 空间上的位势理论和拟必然分析,非适应随机分析;第四章介绍白噪声分析的一般理论,包括一般框架,泛函空间的刻画,泛函的乘积和 Wick 积;第五章介绍广义泛函的分析运算及广义泛函空间中的算子理论,并简要介绍了它们在量子物理中的应用.

本书可供数学及有关专业研究生、教师及概率论研究工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

无穷维随机分析引论/黄志远,严加安著. 一北京:科学出版社,1997

(纯粹数学与应用数学专著丛书/张恭庆主编)

ISBN 7-03-005804-6

Ⅰ. 无… Ⅱ. ①黄… ②严… Ⅲ. 无穷维-随机分析 Ⅳ. O212.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 25658 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997 年 7 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1997 年 7 月第一次印刷 印张:11 7/8

印数:1—1 600 字数:308 000

定 价: 28.00 元

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主　编：张恭庆

副主编：(以姓氏笔画为序)

马志明　王　元　石钟慈

李大潜　杨　乐　姜伯驹

前　　言

早在 19 世纪末和 20 世纪初，由于数学物理问题的需要， V. Volterra, R. Gâteaux, P. Lévy 和 Fréchet 等已开始了无穷维分析的研究 (参看 Lévy[2]). 然而其中最富有成果的研究方向，是由 N. Wiener 和 A. N. Kolmogorov 开始的，与随机过程理论紧密联系的无穷维积分理论. 1923 年，作为 Brown 运动的数学模型，Wiener[1] 首先在连续函数空间上构造了一个概率测度，即 Wiener 测度. 此后， R. Cameron 和 W. Martin[1, 2, 3] 的一系列工作揭示了 Wiener 积分的许多重要性质，特别是 Gauss 测度的拟不变性. 1931 年， Kolmogorov[1] 导出了扩散过程的转移概率所满足的二阶抛物型偏微分方程，从而建立了随机过程和微分方程之间的联系. 40 年代， K. Itô (同时还有 I. I. Gikhman[1]) 开创了随机过程轨道的无穷小分析，即随机分析学. 通过 Itô 随机微分方程，人们可以直接构造扩散过程的轨道，将扩散过程看作 Brown 运动的轨道泛函，即 Wiener 泛函. 于是提供了用概率方法来解微分方程等一系列纯分析问题的可能性. 与此同时， R. Feynman 和 M. Kac 用泛函积分方法解数学物理方程的著名工作以及量子场论的发展给了无穷维分析以新的推动力.

在有限维经典分析中，经典的函数和微分概念已远远不能满足数学物理发展的要求. 在 1936 年， S. L. Sobolev[1] 从数学物理方程的求解出发拓广了函数和微分的概念，引进了广义函数与广义导数，建立了 Sobolev 空间理论. 40 年代， L. Schwartz 系统地发展了广义函数理论，使之成为解决数学物理问题的强有力的工具. 物理中常用的 Dirac δ 函数等获得了满意的数学解释. 然而长期以来，物理学中仍然使用着大量的直观概念和形式演算，对它们建立严格的数学基础并由此推动理论物理学的发展，是对数

学物理学家的巨大挑战.

在无穷维分析中，也面临着同样的情况. 由于常见的泛函 (例如扩散过程作为 Wiener 泛函) 并不都是 (在 Fréchet 意义下) 可微的，因此也有必要拓广泛函和微分的概念. 1976 年 P. Malliavin[1] 创立了随机变分学，拓广了微分的概念，使常见的 Wiener 泛函可以无限次微分，并将梯度、散度、Ornstein-Uhlenbeck 算子等成功地推广到了无穷维空间. 在此基础上，S. Watanabe[1], I. Shigekawa[1], D. W. Stroock[1], P. A. Meyer[1] 等建立了无穷维的 Sobolev 理论. Malliavin 分析在偏微分算子、热核的正则性和渐近估计、随机振荡积分以及随机系统的滤波与控制等方面成功的应用已使它成为当今随机分析领域中最瞩目的成果之一.

几乎与 Malliavin 同时，T. Hida 开创了白噪声分析. 白噪声是 Brown 运动的广义导数，其样本空间是 Schwartz 的广义函数空间. Hida 将 Wiener 泛函看作白噪声泛函，在此基础上建立了无穷维的 Schwartz 理论. 白噪声分析有着深刻的物理背景，它在 Feynman 积分以及量子场论中的成功应用已越来越引起物理学界的重视.

上述两种无穷维分析的框架，都是建立在 Gauss 测度的拟不变性质基础之上. 它们可以统一在所谓 Gauss 概率空间的框架中. 其理论基础可以回溯到 50 年代 I. E. Segal[1, 2] 关于 Hilbert 空间上的抽象积分理论，I. M. Gel′fand 的装备 (Rigged) Hilbert 空间理论 (参看 Gel′fand & Vilenkin[1]) 和 60 年代 L. Gross[1] 的抽象 Wiener 空间理论. 自然，框架的选择依赖于所要解决的实际问题. 例如 Malliavin 分析要求试验泛函空间足够丰富，以使常见的泛函成为光滑，而 Hida 分析则要求广义泛函足够广阔以包罗物理中许多直观概念和形式演算，使之具有严格的数学意义. 它们的关系和有限维空间的 Sobolev 理论与 Schwartz 理论颇为相似.

我们写这本书的目的，就是要对无穷维随机分析这一迅速发展着的研究领域提供一本入门的读物，力求做到简明而自封，以期使具有随机分析基础知识的读者，能较快掌握无穷维随机分析的

基本理论和方法，直接阅读现代文献，进入这一领域研究工作的前沿．本书分五章．第一章是无穷维分析的基础知识，包括 Hilbert 空间中的线性算子， Fock 空间，赋可列范空间，核空间及其对偶空间，拓扑线性空间上的 Borel 测度等内容．为使本书基本自封和方便读者查考，我们将一般局部凸拓扑线性空间的基本概念和结果作为附录放在书的末尾．第一章的内容既是以后各章的基础，也有独立的价值．第二章是 Malliavin 随机分析的基本理论，包括 Gauss 概率空间上泛函的混沌分解和微分运算， Ornstein-Uhlenbeck 半群， Meyer 不等式和 Sobolev 空间理论以及泛函分布密度的存在性和光滑性等．所有结果的证明都力求做到简明而富有启发性．第三章是 Malliavin 随机分析的若干重要应用．着重讨论了 Itô 随机微分方程的解的分布密度，即相应的二阶抛物型方程基本解的正则性，用概率方法证明了 Hörmander 关于微分算子亚椭圆性的著名定理，讨论了抽象 Wiener 空间上的位势理论和拟必然分析以及非适应随机分析等．第四章是白噪声分析的一般理论，内容包括建立白噪声分析的一般框架，泛函空间的刻画，泛函的乘积和 Wick 积以及广义泛函的矩刻画，并简要介绍其在 Feynman 积分、 $P(\phi)_2$- 场及 Brown 运动自交局部时等方面的应用．第五章是广义泛函空间中的算子理论 (包括广义泛函的分析运算) 及其在量子物理中的应用．由于篇幅所限，未涉及算子理论在无穷维调和分析中的应用，有兴趣的读者可参看 N. Obata[2].

本书第一章 §1, §4 和第四、第五章由严加安执笔，第一章 §2, §3, 第二、第三章和附录由黄志远执笔．任佳刚教授、骆顺龙博士分别为第三章 §2 和第五章 §4 提供了部分材料并提出了许多宝贵意见，我们向他们表示谢意．本书的写作和出版分别得到了国家自然科学基金会的资助 (项目编号 19131040) 及中国科学院科学出版基金的资助，特此表示感谢．

黄志远、严加安　　1996 年 8 月

目　录

第一章 无穷维分析的基础知识

§1. Hilbert空间中的线性算子

令 $\mathbb{K}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$, H,K 及 E 表示 $\mathbb{K}$ 上的 Hilbert 空间. 不同 Hilbert 空间中的内积和范数统一用 $(\cdot,\cdot)$ 及 $\|\cdot\|$ 表示. 我们约定内积 (x,y) 关于 x 线性、关于 y 共轭线性. 如不特别指明数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 所有结果同时适用于两种情形.

1.1 基本概念、记号及若干引理

我们用 $L(H,K)$ 及 $\mathcal{L}(H,K)$ 分别表示 H 到 K 中的线性算子及有界线性算子全体, 并用 $L(H)$ 及 $\mathcal{L}(H)$ 分别简记 $L(H,H)$ 及 $\mathcal{L}(H,H)$. 设 $A\in L(H,K)$, 我们用 $\mathcal{D}(A)$ 表示其定义域, 它是 H 的线性子空间. 今后对 $A\in\mathcal{L}(H,K)$ 恒假定 $\mathcal{D}(A)$ 在 H 中稠, 从而可进一步假定 $\mathcal{D}(A)=H$. 对无界线性算子 A, 它的定义域 $\mathcal{D}(A)$ 必须连同算子一同给定. 设 $A\in L(H,K)$, 令

$$\mathcal{N}(A)=\{x\in\mathcal{D}(A):\ Ax=0\},\qquad \mathcal{R}(A)=\{Ax:\ x\in\mathcal{D}(A)\},$$

分别称 $\mathcal{N}(A)$ 及 $\mathcal{R}(A)$ 为 A 的 **核**(或 **零空间**) 及 **值域**. 如果 $\mathcal{D}(A)$ 在 H 中稠, 则称 A 是 **稠定的**. 若 $\mathcal{N}(A)=\{0\}$, 则称 A 是 **可逆的**. 对可逆算子 A, 定义 A 的 **逆**A^{-1} 如下: $\mathcal{D}(A^{-1})=\mathcal{R}(A)$; 若 $Ax=y$, 则令 $A^{-1}y=x$.

乘积空间 $H\times K$ 按如下内积 $(\cdot,\cdot)$ 成为一 Hilbert 空间:

$$(\{x,y\},\{z,w\})=(x,z)+(y,w),\quad x,z\in H,\ y,w\in K.$$

(即 Hilbert 空间直和 $H\oplus K$.) 设 $A\in L(H,K)$, 令

$$\mathcal{G}(A)=\{\,\{x,Ax\}\ :\ \ x\in\mathcal{D}(A)\},\tag{1.1}$$

$$\mathcal{W}(A)=\{\,\{Ax,x\}\ :\ \ x\in\mathcal{D}(A)\},\tag{1.2}$$

则 $\mathcal{G}(A)$ 及 $\mathcal{W}(A)$ 分别为 $H\oplus K$ 及 $K\oplus H$ 的线性子空间. 我们分别称它们为 A 的 **图象** 和 **逆图象**. 若 A 可逆, 则 $\mathcal{W}(A)=\mathcal{G}(A^{-1})$.

设 $A_1,A_2\in L(H,K)$, 若 $\mathcal{G}(A_1)\subset\mathcal{G}(A_2)$, 即 $\mathcal{D}(A_1)\subset\mathcal{D}(A_2)$ 且限制在 $\mathcal{D}(A_1)$ 上 A_2 与 A_1 一致, 则称 A_2 是 A_1 的 **延拓**, 称 A_1 是 A_2 在 $\mathcal{D}(A_1)$ 上的 **限制**, 记为 $A_1\subset A_2$ 或 $A_2\supset A_1$.

设 $A\in L(H,K)$. 如果 $\mathcal{G}(A)$ 是 $H\oplus K$ 的闭子空间 (即 $\mathcal{W}(A)$ 是 $K\oplus H$ 的闭子空间), 则称 A 为 **闭算子**. 若 $\mathcal{G}(A)$ 在 $H\oplus K$ 中的闭包 $\overline{\mathcal{G}(A)}$ 是某个线性算子 $\widetilde{A}$ 的图象, 则称 A 是 **可闭的**, 并称 $\widetilde{A}$ 是 A 的 **闭包**. 显然, A 是可闭的当且仅当 $\{0,y\}\in\overline{\mathcal{G}(A)}$ 蕴含 $y=0$. 若 A 是闭算子, 且 $\mathcal{D}(A)=H$, 则由闭图象定理知 A 是有界算子. 闭算子的零空间为闭子空间.

设 $A\in L(H,K)$ 为稠定的, 令

$$\mathcal{D}(A^*)=\{y\in K:\exists c_y>0,\text{使得}\forall x\in\mathcal{D}(A),|(Ax,y)|\le c_y\|x\|\},$$

则由 Riesz 表现定理, $\forall y\in\mathcal{D}(A^*)$, 存在 H 中唯一元素, 记为 A^*y, 使得

$$(x,A^*y)=(Ax,y)\quad\forall x\in\mathcal{D}(A).\tag{1.3}$$

显然有 $A^*\in L(K,H)$, 我们称 A^* 为 A 的 **共轭算子**. 若 $A,B\in L(H,K)$ 为稠定的, 且 $A\subset B$, 则 $B^*\subset A^*$.

设 $A\in L(H)$. 如果 A 稠定且 $A\subset A^*$, 即

$$(Ax,y)=(x,Ay)\quad\forall x,y\in\mathcal{D}(A)\ ,$$

则称 A 是 **对称的**; 若进一步有 $A=A^*$, 则称 A 是 **自共轭的**.

引理 1.1 设 $A\in L(H)$ 为稠定算子, 且 $(Ax,x)=0,\forall x\in\mathcal{D}(A)$.

(1) 若 H 为复空间, 则 A 为零算子 (即 $Ax=0,\forall x\in\mathcal{D}(A)$);

(2) 若 H 为实空间, 且 A 为对称算子, 则 A 为零算子.

证明 (1) 设 $x,y\in\mathcal{D}(A)$, 则

$$(Ax,y)+(Ay,x)=(A(x+y),x+y)-(Ax,x)-(Ay,y)=0.\tag{1.4}$$

在上式两边同乘 $i(=\sqrt{-1})$ 并用 iy 代替 y 得

$$(Ax, y) - (Ay, x) = 0. \tag{1.5}$$

于是由 (1.4) 及 (1.5) 得 $(Ax, y) = 0$, $\forall y \in \mathcal{D}(A)$. 由于 $\mathcal{D}(A)$ 在 H 中稠, 这表明 $Ax = 0$.

(2) 由 (1.4) 及 A 的对称性推得. ∎

设 $A \in \mathcal{L}(H, K)$, 我们用 $\|A\|$ 表示算子 A 的 **范数**, 即

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \ : \ \|x\| = 1\}.$$

下一引理给出了对称有界算子范数的另一表达式.

引理 1.2 设 $A \in \mathcal{L}(H)$ 为对称算子, 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|. \tag{1.6}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}(Ax, y) + (y, Ax) &= (Ax, y) + (Ay, x) \\ &= \frac{1}{2}[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)].\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}|(Ax, y) + (y, Ax)| &\le \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \sup_{\|z\|=1} |(Az, z)| \\ &= (\|x\|^2 + \|y\|^2) \sup_{\|z\|=1} |(Az, z)|. \end{aligned} \tag{1.7}$$

最后一等式是由于平行四边形定律. 为证 (1.6), 不妨设 A 是非零算子. 记 $a = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$, 则由引理 1.1 知 $a > 0$. 在 (1.7) 中令 $y = a^{-1}Ax$, 则得

$$2a^{-1}\|Ax\|^2 \le (\|x\|^2 + a^{-2}\|Ax\|^2)a,$$

即有 $\|Ax\|^2 \le a^2\|x\|^2$, 从而 $\|A\| \le a$. 但相反的不等式恒成立，故 (1.6) 得证. ∎

设 $A \in L(H,K)$, $B \in L(K,E)$. B 与 A 的 **乘积** 定义如下:

$$\mathcal{D}(BA) = \{x \in \mathcal{D}(A):\ Ax \in \mathcal{D}(B)\}, \tag{1.8}$$

$$(BA)x = B(Ax),\ x \in \mathcal{D}(BA). \tag{1.9}$$

于是 $BA \in L(H,E)$.

引理 1.3 设 $A \in L(H,K), B \in L(K,E)$. 如果 A, B 及 BA 都是稠定的，则

$$A^*B^* \subset (BA)^*. \tag{1.10}$$

若进一步 B 是有界算子，则

$$A^*B^* = (BA)^*. \tag{1.11}$$

证明 (1.10) 可以从共轭算子定义出发直接验证. 为证 (1.11), 只需证 $(BA)^* \subset A^*B^*$. 设 $B \in \mathcal{L}(K,E)$, 由于 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(BA)$, $\mathcal{D}(B^*) = E$, 故对任一 $y \in \mathcal{D}((BA)^*)$, 有

$$(Ax, B^*y) = ((BA)x, y) = (x, (BA)^*y), \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

这表明 $B^*y \in \mathcal{D}(A^*)$(从而 $y \in \mathcal{D}(A^*B^*)$) 且有 $A^*B^*y = (BA)^*y$, 于是 $(BA)^* \subset A^*B^*$. (1.11) 得证. ∎

设 M 为 H 的一个闭子空间, $M^\perp$ 为 M 在 H 中的正交补, 则对任给 $x \in H$, x 有如下唯一分解:

$$x = y + z,$$

其中 $y \in M, z \in M^\perp$. 我们用 Px 表示 y, 称 Px 为 x 到 M 上的 **投影**. 显然 P 为 H 上的有界对称线性算子, 且是 **幂等的**, 即 $P^2 = P$. 我们称幂等的有界对称线性算子为 **投影算子**.

下一引理给出了投影算子的一个刻画.

引理 1.4 设 $P \in \mathcal{L}(H)$. 则当且仅当 $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$ 且 $P^2 = P$ 时 P 为投影算子.

证明 设 $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(P)^{\perp}$, 且 $P^2=P$. 则 $\forall x,y\in H$, $x-Px\in\mathcal{N}(P)$, $y-Py\in\mathcal{N}(P)$, 故有

$$\begin{aligned}(Px,y)&=(Px,Py+(y-Py))=(Px,Py)\\&=(Px+(x-Px),Py)=(x,Py).\end{aligned}$$

这表明 P 是对称的，从而依定义 P 是投影算子. 反之，设 P 是投影算子，则

$$\begin{aligned}x\in\mathcal{N}(P)&\Longleftrightarrow\forall y\in H,\ (x,Py)=(Px,y)=0\\&\Longleftrightarrow x\perp\mathcal{R}(P),\end{aligned}$$

即有 $\mathcal{N}(P)=\mathcal{R}(P)^{\perp}$. 又由 $P^2=P$ 推知 $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I-P)$, 从而 $\mathcal{R}(P)$ 为 H 的闭子空间. 因此有 $\mathcal{R}(P)=\mathcal{R}(P)^{\perp\perp}=\mathcal{N}(P)^{\perp}$. ∎

1.2 可闭算子、对称算子与自共轭算子

定理 1.5 设 $A\in L(H,K)$ 为稠定的，则

(1) A^* 为闭的，且 $\mathcal{G}(A^*)=\mathcal{W}(-A)^{\perp}$;

(2) 若 A 为闭的，则 A^* 稠定，且 $A^{**}=A$;

(3) 当且仅当 A^* 稠定时 A 可闭. 这时 A^{**} 为 A 的闭包.

证明 (1) 设 $y\in K$, $z\in H$, 则有

$$\begin{aligned}\{y,z\}\in\mathcal{G}(A^*)&\Longleftrightarrow y\in\mathcal{D}(A^*),z=A^*y\\&\Longleftrightarrow(z,x)=(y,Ax),\ \forall x\in\mathcal{D}(A)\\&\Longleftrightarrow(\{y,z\},\{-Ax,x\})=0,\ \forall x\in\mathcal{D}(A).\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{G}(A^*)=\mathcal{W}(-A)^{\perp}$. 特别 $\mathcal{G}(A^*)$ 为 $K\oplus H$ 的闭子空间，即 A^* 为闭算子.

(2) 由于 $-A$ 为闭算子，故 $\mathcal{G}(-A)$ 是 $H\oplus K$ 的闭子空间，从而 $\mathcal{W}(-A)$ 是 $K\oplus H$ 的闭子空间. 由 (1) 知 $K\oplus H$ 有如下正交分解:

$$K\oplus H=\mathcal{W}(-A)\oplus\mathcal{G}(A^*).\tag{1.12}$$

现设 $z \in K$, 且 $z \perp \mathcal{D}(A^*)$, 则 $\{z,0\} \perp \mathcal{G}(A^*)$. 故由 (1.12) 知 $\{z,0\} \in \mathcal{W}(-A)$, 从而 $z = -A0 = 0$. 这表明 $\mathcal{D}(A^*)$ 在 K 中稠. 对 A^* 及 $-A$ 应用 (1.12) 得

$$H \oplus K = \mathcal{W}(-A^*) \oplus \mathcal{G}(A^{**}), \tag{1.13}$$

$$K \oplus H = \mathcal{W}(A) \oplus \mathcal{G}(-A^*). \tag{1.14}$$

但 (1.14) 等价于 $H \oplus K$ 的如下正交分解:

$$H \oplus K = \mathcal{G}(A) \oplus \mathcal{W}(-A^*). \tag{1.15}$$

比较 (1.13) 及 (1.15) 得 $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A^{**})$, 即有 $A = A^{**}$.

(3) 设 A 可闭, $\widetilde{A}$ 是 A 的闭包, 则 $\widetilde{A} \supset A$. 由共轭算子定义知 $A^* \supset \widetilde{A}^*$. 特别 $\mathcal{D}(A^*) \supset \mathcal{D}(\widetilde{A}^*)$, 故由 (2) 知 A^* 是稠定的. 对 $-A$ 应用 (1) 得

$$K \oplus H = \overline{\mathcal{W}(A)} \oplus \mathcal{G}(-A^*). \tag{1.16}$$

上式等价于

$$H \oplus K = \overline{\mathcal{G}(A)} \oplus \mathcal{W}(-A^*). \tag{1.17}$$

比较 (1.13) 及 (1.17) 知 $\overline{\mathcal{G}(A)} = \mathcal{G}(A^{**})$, 即 A^{**} 为 A 的闭包.

反之, 设 A^* 稠定, 往证 A 可闭. 由于 A^* 为闭算子, (1.13) 仍成立. 另一方面恒有 (1.17), 故得 $\overline{\mathcal{G}(A)} = \mathcal{G}(A^{**})$, 这表明 A 是可闭的. ∎

定理 1.6 设 $A \in L(H)$ 且对称, 则有下述结论:

(1) A 可闭, A^{**} 为 A 的闭包, A^{**} 对称;

(2) 若 $\mathcal{D}(A) = H$, 则 A 为有界自共轭算子;

(3) 若 A 自共轭且可逆, 则 $\mathcal{R}(A)$ 在 H 中稠且 A^{-1} 自共轭;

(4) 若 $\mathcal{R}(A)$ 在 H 中稠, 则 A 可逆;

(5) 若 $\mathcal{R}(A) = H$, 则 A 自共轭且 A^{-1} 为有界自共轭算子.

证明 (1) 由于 $A^* \supset A$, 故 A^* 稠定, 从而由定理 1.5(3) 知 A 可闭, 且 A^{**} 为 A 的闭包. 此外, 由于 $A \subset A^*$, 故 $A^{**} \subset A^{***}$, 从而 A^{**} 对称.