常微分方程及其数值解法

蔡 晖 编

厦门大学出版社

常微分方程
及其数值解法

蔡[illegible] 编

厦门大学出版社

［闽］新登字 09 号

常微分方程及其数值解法

蔡　晖　编

*

厦门大学出版社出版发行

厦门大学印刷厂印刷

*

开本 850× [redacted] 5.875 印张　192 千字

1994 年 1 月　第 1 版　1994 年 1 月　第 1 次印刷

印数：1--1000 册

ISBN　7-5615-0876-X/O.53

定价：5.80 元

前　　言

本书是作者在数学系各专业多次使用的自编讲义《常微分方程及其数值解法》的基础上，经再次修改和整理而成的。在编写中，力求做到由浅入深、顺序渐进、重点突出、难易适中、便于自学。

全书共分五章：第一章主要介绍微分方程的基本概念和一些典型微分方程的实际背景；第二章是微分方程的初等解法，主要介绍几类方程的解法以及变量替换的处理思想与技巧；第三章重点介绍一阶微分方程解的存在唯一性定理及解的有关性质；第四章介绍一阶线性微分方程组和高阶线性微分方程的基本理论以及常系数一阶线性微分方程组和常系数高阶线性方程的解法；第五章比较系统地讨论一阶微分方程数值解法的基本理论和方法。此外，在附录部分简要地介绍拉普拉斯变换及其应用。最后，给出书中各章习题的答案。在讲授中，根据不同专业的要求，对部分内容可有所取舍。

在编写过程中，主要参考书如下：

(1) 王高雄等：《常微分方程》；

(2) 高素志等：《常微分方程》；

(3) 王柔怀、伍卓群：《常微分方程讲义》；

(4) M. Braun：《微分方程及其应用》(张鸿林译)；

(5) 李荣华、冯果忱：《微分方程数值解法》；

(6) 关治、陈景良：《数值计算方法》。

辜联昆教授、钟同德教授对本书的编写给予热情的鼓励和支

持。辜老师认真地审阅了全稿，对本书的内容和写法都提出了宝贵的指导性意见，在此对二位老师表示衷心的感谢。在出版过程中，得到厦门大学出版社陈天择、蒋东明、厦门大学印刷厂吴顺升以及厦门大学数学系孙晓静等同志的大力支持和帮助，使本书得以顺利出版，对此也表示深深的谢意。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳望同志们和读者提出批评、指教。

作　者

1994 年元月于厦门大学

目　　录

第一章 绪 论

§1.1 引 言

数学分析中所研究的函数，是反映客观世界物质运动过程中量与量之间的一种关系．在大量的实际问题中，遇到稍为复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系（即函数）往往不能直接写出来．却比较容易建立这些变量与它们的导数（或微分）间的关系式，称为**微分方程**．它是一类与代数方程、三角函数方程、差分方程等有限方程有着完全不同性质的方程．在这类方程中，作为未知而要去求的是整个函数．

下面就是一些微分方程的例子．

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx}+p(y)x=q(x) \tag{1.2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+hx\frac{dx}{dt}+kx=F(t) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+h\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{1.4}$$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{（热传导方程）} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(波动方程) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0(\text{Laplace 方程}) \tag{1.8}$$

只含一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，如上面(1.1)—(1.5)，而含多于一个以上自变量的微分方程称为**偏微分方程**，如(1.6)—(1.8). 由若干个微分方程组成的系统称为**微分方程组**.

常微分方程的研究主要起源于力学问题(牛顿利用微积分讨论的质点力学问题，就归结为常微分方程组的研究)，它是与微积分学的研究同时生长起来的一个数学分支. 远在十七、八世纪，在力学、天文、物理和技术科学研究中，就已借助于微分方程取得了巨大的成就. 如 1846 年 Leverrier 应用微分方程确定出海王星在天空中的位置. 在二十世纪之前，微分方程问题主要来源于力学、物理学和几何学. 而到了现在几乎在自然科学、工程技术、社会科学的每一部门或多或少都有微分方程的问题. 常微分方程已经发展成为数学中的一个庞大的分支，不仅内容丰富，理论深刻，而且应用十分广泛. 近二十多年来，由于电子计算机的普遍使用，使得过去许多无法求解的微分方程问题获得了数值解，从而能更多地认识解的种种性质及其数值特征，这就为微分方程理论应用于工程技术实际问题提供了定量的依据. 常微分方程这门学科，无论在理论研究，还是数值求解以及实际应用方面都已经达到了十分广泛的地步. 常微分方程的方法论也正在为广大科学工作者，工程技术人员所掌握.

常微分方程研究的中心任务是：确定方程的解(包括近似解，数值解)和讨论解的性质.

作为基础课教材，本书不可能包括常微分方程的所有内容，只能介绍其中最重要，最常用的基本概念，基本理论和基本方法.

§ 1.2 一些常见的微分方程问题

本段将通过几个具体的例子，粗略地介绍常微分方程的一些直观背景和如何建立相应的数学模型即微分方程问题.

例 1 物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中，在开始时刻 $t=0$ 时测量得它的温度为 $u_0=150^\circ C$，10 分钟后测量得到温度为 $u_1=100^\circ C$，我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系，并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假设空气的温度保持为 $u_a=24^\circ C$.

解 为了解决上述的问题，需要应用牛顿冷却定律：热量总是从温度高向温度低的物体传导的；在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在的介质温度的差值成比例.

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化率以 $\frac{du}{dt}$ 表示. 注意到热量是由温度高往温度低的物体传导的，故 $u>u_a$，因此温度差 $u-u_a$ 恒正；又由于物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化率 $\frac{du}{dt}<0$. 由牛顿冷却定律得到

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.9}$$

这里 $k>0$ 是比例常数. 方程(1.9)就是冷却过程的数学模型，它含有未知函数及其一阶导数 $\frac{du}{dt}$，这样的方程，我们称它为**一阶微分方程**.

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.9)中“解出”u，注意到 u_a 是常数，且 $u-u_a>0$，可把(1.9)改写成

$$\frac{d(u-u_a)}{u-u_a}=-kdt \tag{1.10}$$

这样，变量 u 和 t 被“分离”开来了，两边积分得

$$\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c} \tag{1.11}$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数. 由对数的定义，可得到

$$u-u_a=e^{-kt+\tilde{c}}=e^{\tilde{c}}e^{-kt}$$

由此，令 $c=e^{\tilde{c}}$ 即得

$$u=u_a+ce^{-kt} \tag{1.12}$$

根据“初始条件”:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时 } u=u_0 \tag{1.13}$$

可以确定出 $c=u_0-u_a$，于是得到

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt} \tag{1.14}$$

我们可以利用另一个条件确定 k 的数值，由条件 $t=10, u=u_1$，得到

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)e^{-10k}$$

由此

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}$$

用给定的 $u_0=150$， $u_1=100$， $u_a=24$ 代入，得到

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{150-24}{100-24}=\frac{1}{10}\ln 1.66\approx 0.051$$

从而 $$u=24+126e^{-0.051t} \tag{1.15}$$

这样，根据(1.15)式，就可以计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值. 例如 20 分钟后的温度 $u_2\approx 70^\circ$C. (1.15)式还告诉我们，当 $t\to+\infty$ 时，$u\to 24^\circ$C. 这可以解释为：经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有什么差别了. 事实上，经过 2 小时后，物体的温度已变为 24.3°C，与空气的温度已相当接近，而经过 3 小时后，

物体的温度为 24.01℃，这时，一般的测量仪器已经测不出它与空气温度的差别了.

实用上，人们认为冷却过程已经基本结束了，所以经过一段时间后（如 3 小时后）可以认为物体的温度和空气的温度并没有什么差别，这与我们在实际生活中所观察的结果是相符合的.

我们从例 1 可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤：(1)建立起实际问题的数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程；(2)求解这个微分方程；(3)用所得的数学结果解释实际问题，从而予测到某些物理过程的特定性质，以便达到解决实际问题的目的.

微分方程的"解"可以用图形表示出来，这可以给我们一个简明直观的了解，图(1.1)就是解(1.15)的图形.

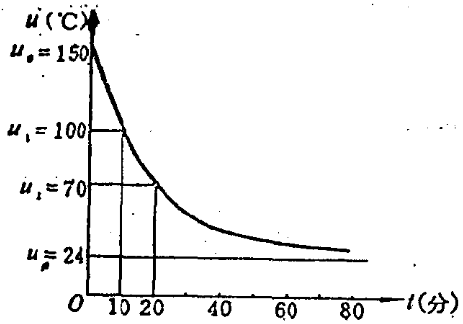

图 (1.1)

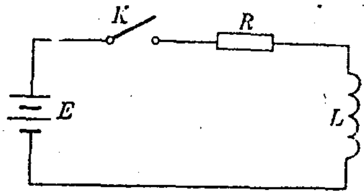

图 (1.2)

例 2 如图(1.2)的 R－L 电路，它包含电感 L、电阻 R 和电源 E. 设 $t=0$ 时，电路中没有电流. 我们要建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程，这里假设 R、L、E 都是常数.

解 为了建立电路的微分方程，我们引用关于电路的基尔霍

夫第二定律:在闭合回路中,所有支路的电压降的代数和等于零.

注意到经过电阻 R 的电压降是 RI. 而经过电感 L 的电压降是 $L\dfrac{dI}{dt}$,由基尔霍夫第二定律得到

$$E - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

即

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \tag{1.16}$$

求出的 $I=I(t)$ 应满足条件

$$\text{当}\, t = 0\, \text{时} \qquad I = 0 \tag{1.17}$$

如果假定在 $t=t_0$ 时刻 $I=I_0$,电源 E 突然短路,因而 E 变成为零,那么电流应满足方程

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \tag{1.18}$$

及条件:

$$\text{当}\, t = t_0\, \text{时} \qquad I = I_0 \tag{1.19}$$

例 3 $R-L-C$ 电路

如图(1.3)所示的 $R-L-C$ 电路,它包括电感 L,电阻 R 和电容 C,我们设 R、L、C 均为常数,电源 $e(t)$ 是时间 t 的已知函数,求当开关 K 合上后,电流 I 所满足的微分方程.

解 注意到经过电感 L,电阻 R 和电容 C 的电压降分别为:$L\dfrac{dI}{dt}$,RI 和$\dfrac{Q}{C}$,其中 Q 为电量,因此由基尔霍夫第二定律得到

$$e(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \tag{1.20}$$

因为 $I=\dfrac{dQ}{dt}$,微分(1.20)得到

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.21}$$

这就是电流应满足的常微分方程，如果 $e(t)=$ 常数，则(1.21)为

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0 \tag{1.22}$$

如果 $R=0$ 即只是 $L-C$ 电路，则得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{LC}I=0 \tag{1.23}$$

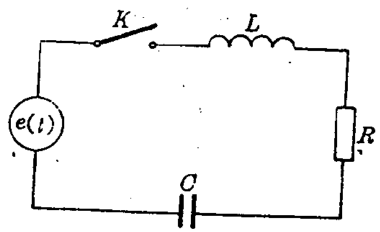

图 (1.3)

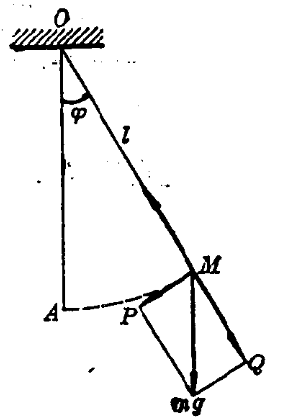

图 (1.4)

例 4　数学摆(单摆)

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M，在重力的作用下，它在垂直于地面的平面上作园周运动，如图(1.4)所示，我们要确定摆的运动方程.

解　设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向，质点 M 沿园周的切向速度 v 可表示成 $v=l\,\dfrac{d\varphi}{dt}$，作用于质点 M 的地球引力的大小为 mg，其方向铅直向下. 把重力分解成两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$，沿细线方向的分力 $\overrightarrow{MQ}$ 的大小为 $mg\cos\varphi$，其方向沿半径 $\overrightarrow{OM}$ 方向，且指向外，这个分力正好与线的拉力相抵

消，它不会引起质点 M 的速度 v 的数值变化. 重力的第二个分力 $\overrightarrow{MP}$ 沿着圆周的切线方向，它引起质点 M 的速度 v 的数值改变，由于 $\overrightarrow{MP}$ 总使质点 M 向平衡位置 A 的方向运动，即当角 φ 为正时，质点 M 向减少 φ 的方向运动，而当 φ 为负时，则向增大 φ 的方向移动，所以 $\overrightarrow{MP}$ 的数值等于 $-mg\sin\varphi$. 根据牛顿第二定律得到数学摆的运动方程为：

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi \tag{1.24}$$

即

$$\frac{dv}{dt}=-g\sin\varphi$$

由 $\frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$，(1.24)可化为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.25}$$

关系式(1.25)是包含 φ 及其二阶导数的方程，并且 φ 不是线性而是以非线性的形式出现在方程中，要直接由(1.25)求 φ 随着时间变化的解析表达式是困难的.

如果只研究摆的微小振动，即当 φ 比较小的时候，微分方程(1.25)可以作线性化处理，即用 φ 代替 $\sin\varphi$，这样就得到自由微小振动时摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.26}$$

如果假设摆是在一个粘性的介质中摆动，那么沿着摆的运动方向存在着一个与速度 v 成比例的阻力. 设其阻力系数为 μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.27}$$

如果沿着摆的运动方向还存在一个恒作用于质点 M 的外力