

精
密
测
试
技
术

精密测试技术

上海科学技术大学主编

人
民

人 民 铁 道 出 版 社



精密测试技术

上海科学技术大学主编

人 民 铁 道 出 版 社

1979年·北京

内 容 提 要

本书介绍精密测试技术中测量误差的来源、测量误差的数据处理,电气测量、光学测量、气动测量方法的基本原理和应用,以及测量装置的结构。并介绍了感应同步器、光栅、激光等新技术在精密计量中的应用。

本书可供从事机械制造工艺、计量及研究工作的工程技术人员参考,也可作为高等院校工科机械制造专业教材及有关专业师生教学参考书。

精密测试技术

上海科学技术大学主编

人民铁道出版社出版

责任编辑 宋黎明

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张: 11 字数: 270 千

1979年10月第1版 1979年10月第1次印刷

印数: 0001—26,000 册

统一书号: 15043·5138 定价: 1.15 元

前 言

精密测试技术是一门新兴的技术科学，在机械制造业中，随着机械加工精度的不断提高，高效率、自动化设备日新月异，精密测试技术越来越为人们所广泛重视。

在科学实验中，正确选择测试方法、测试手段，并准确地作数据处理，是科学实验的重要环节。

为适应科学研究和毕业设计需要，1975年全国37所工科院校机械制造专业联合编写教材组提出编写本书，作为机械制造工艺学课程中的专题讲座内容。

本书共分四章。第一章：测量误差分析和数据处理。第二章：电动测量。第三章：气动测量。第四章：光学测量。

其中第一章和第四章由上海科技大学，第二章由东北工学院，第三章由黑龙江工学院分别负责编写，最后由上海科技大学总审。

本书可供高等院校工科机械制造专业师生教学参考用，也可供从事测试技术工作的工人和工程技术人员参考。

在本书编写过程中，曾得到各兄弟院校，有关工厂和研究所的大力支持和热情帮助，提出不少宝贵意见，对此表示衷心感谢。由于水平有限，书中可能有不少缺点错误，希广大读者批评指正。

编 者

一九七八年九月

目 录

第一章 测量误差和数据处理	(1)
§ 1—1 测量误差的概念和分类	(1)
一、测量误差的基本概念	(1)
二、测量误差的类型及其规律性	(1)
§ 1—2 测量误差的来源及其处理	(3)
一、偶然误差	(3)
二、系统误差	(11)
三、过失误差的剔除	(16)
§ 1—3 测量结果的数据处理	(17)
一、等精度测量的结果处理	(17)
二、不等精度测量的结果处理	(25)
三、测量结果的有效数字处理	(29)
第二章 电动测量	(30)
§ 2—1 传感器的基本类型及其基本测量电路	(30)
一、电感式传感器及其基本测量电路	(31)
二、电容式传感器及其基本测量电路	(36)
三、差动变压器式传感器及其基本测量电路	(41)
§ 2—2 电动测微仪	(46)
一、概述	(46)
二、基本结构及各部分的作用	(46)
三、电气原理图	(48)
四、外观与主要技术规格	(50)
§ 2—3 感应同步器	(52)
一、感应同步器的结构和特点	(52)
二、感应同步器的工作原理和位移测量系统简介	(53)
第三章 气动测量	(60)
§ 3—1 气动测量原理和气动量仪	(60)
一、气动测量原理和气动量仪种类	(60)
二、指示压力的气动量仪	(61)
三、指示流量的气动量仪—浮标式气动量仪	(64)
§ 3—2 气动测量的静特性	(67)
一、喷嘴挡板机构的形式	(68)
二、平行喷嘴挡板机构的静特性	(68)
三、不平行喷嘴挡板的静特性	(69)
四、喷嘴挡板的压力分布	(73)
§ 3—3 气动测量头的应用及设计	(74)

一、气动测量头的应用	(75)
二、气动测量头设计中的名词及术语	(77)
三、气动测量头设计原则	(77)
四、校对规的设计	(81)
五、测量头的设计步骤	(81)
§ 3—4 气动测量在自动测量中的应用	(83)
一、磨削过程中的自动测量	(83)
二、珩磨时的自动测量	(85)
三、自动线上的气动测量装置	(86)
第四章 光学测量	(90)
§ 4—1 计量光栅的原理和特点	(90)
一、莫尔条纹形成原理	(90)
二、莫尔条纹测量位移的原理及特点	(95)
§ 4—2 光栅读数头及其在计量中的应用	(101)
一、光栅读数头	(101)
二、莫尔条纹讯号的计数和细分	(108)
三、在精密计量中的应用	(111)
§ 4—3 激光的产生及其特点	(116)
一、激光的产生	(116)
二、激光的模及其频率特性	(126)
三、激光的特点	(133)
§ 4—4 激光在精密计量中的应用	(137)
一、干涉测长原理	(137)
二、激光比长仪	(142)
三、激光丝杠动态测量仪	(148)
附录一 光栅衍射	(156)
附录二 细分方案表	(161)
附录三 双频激光干涉仪与机床平直度检验	(161)
一、双频激光干涉原理和特点	(161)
二、激光导轨平直度干涉仪	(166)
附表一 概率函数积分值 (正态分布曲线)	(169)
附表二 各种测量工具的极限误差	(170)

第一章 测量误差和数据处理

§ 1—1 测量误差的概念和分类

一、测量误差的基本概念

在进行测量时，总是希望没有误差，但实际上无论采用多么完善的测量方法，和怎样精密的测量仪器，由于各种原因，测量的结果总是存在着测量误差。要想绝对地避免测量误差的产生是不可能的，而且也没有必要。因为科学实验和生产斗争对技术测量的要求是：能给出与被测对象精度要求相适应的某一精确程度的测量结果。因此，问题就在于应能确定某一测量结果的测量误差。从某种意义上讲，技术测量科学的发展过程，也是人们对测量误差的认识并与之进行斗争的过程。

要客观、科学地评定某一测量结果的误差，就必须分析研究测量误差产生的原因及其出现规律，寻找相应的消除措施，并对这些测量误差作定性分析和定量计算。为了评定各种测量误差和研究方便起见，通常按下列分类：

(一) 按误差的数字表达式可分为相对误差和绝对误差。

(二) 按误差的出现规律可分为系统误差、偶然误差和过失误差。

下面就分别讨论之。

二、测量误差的类型及其规律性

(一) 绝对误差和相对误差

由于在测量过程中有误差存在，因此得到的测量结果与被测量的实际尺寸之间，始终存在一个差值，即测量误差。如以 Q 表示被测量的真实尺寸（真值）， x 为测得的尺寸，那末测量误差 δ 将等于测量所得的尺寸与真值之差。即：

$$\delta = x - Q, \quad (1-1)$$

式中 δ ——测量误差；

x ——测得值；

Q ——真值。

由式 (1-1) 可知，由于测得值 x 可能大于真值 Q ，也可能小于真值 Q ，因此测量误差 δ 可能是正值或负值，它的大小完全决定于 x 的大小。若不论其符号正负，而以绝对值表示其大小，即：

$$|\delta| = |x - Q|。$$

通常称之为绝对误差，若将式 (1-1) 改写为

$$Q = x \pm \delta. \quad (1-2)$$

由式 (1-2) 可看出，测量误差绝对值的大小，表明了测量的精确度，误差的绝对值愈大，则测量的精确度愈低；反之，则愈高。因此要提高测量的精确度，只有从各方面寻找有效措施来减少测量误差。

在一般情况下, 由于真值 Q 并不知道, 即使求得的也是一个近似值。因此就产生了最大绝对误差值的概念。例如: 毫米钢尺可准确到 0.5 毫米, 那末用它测某一工件的长度, 如测得 $Q = 34$ 毫米时, 可知该工件的实际长度必在 34.5 和 33.5 毫米之间。也就是工件的实际长度与测得的近似值之差不会超过 0.5 毫米, 这就是最大绝对误差。通常简称绝对误差。

绝对误差只能用以判断对同一尺寸的测量精确度, 如果对不同尺寸的测量, 它就较难判断其精确的程度。

例如: 对同样是 1 微米的误差, 测一米长的工件时, 就比测量 100 毫米长的工件时的精度高得多了, 虽然它们的最大绝对误差是一样的。由此又产生了相对误差的概念。

所谓相对误差 ε , 是指绝对误差和测得值的比值。

$$\varepsilon = \frac{\delta}{x} \approx \frac{\delta}{Q} \quad (1-3)$$

由上式可知: 相对误差 ε 是一个没有单位的数值。不论用什么单位去测量某一长度, 如果精确度相同, 则其相对误差的大小总相等, 它通常以百分数 (%) 表示。它和绝对误差一样, 通常也有最大相对误差的概念。

例如: 用某一测量方法, 测量 $Q = 100$ 毫米的尺寸, 其误差为 ± 10 微米, 而用另一种测量方法测同样尺寸, 其误差为 ± 5 微米, 问那一种方法精确度高? 显然根据绝对误差的大小, 可以判断后者比前者的精确度高, 但如果用后一种方法测量的长度不是 100 毫米, 而是 10 毫米, 这时那一种测量方法精确度高?

对于前一种方法, 其相对误差为:

$$\varepsilon_1 \approx \frac{\delta_1}{Q_1} = \frac{10\mu}{100\text{mm}} = \frac{10}{100000} = \frac{1}{10000}。$$

对于后一种方法,

$$\varepsilon_2 \approx \frac{\delta_2}{Q_2} = \frac{5\mu}{10\text{mm}} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}。$$

显然, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, 因此前一种方法要比后者精确度高。

由此可知, 绝对误差和相对误差都可以用来判断测量的精确度。

(二) 系统误差

在测量过程中, 凡误差的数值大小和符号固定不变, 或者按一定规律变化的叫系统误差。例如像线纹尺刻度间距的误差; 标准件的名义尺寸和实际尺寸之差; 以及由于环境温度变化引起的测量误差等, 均属于系统误差。

由于系统误差出现的大小和方向都有一定规律, 因此只要掌握其规律, 这种误差就可以从测量结果中予以消除。

(三) 偶然误差

偶然误差是指它的大小、符号的每次出现都不能准确地加以预测。具体讲, 在作多次重复测量时, 虽然测量的条件相同, 但测量的结果总是不同, 这种差别就是偶然误差。

这种误差的出现具有偶然性, 因而一般不能从测量结果中将其消除或校正。

(四) 过失误差

这类误差的特点是误差的数值比较大, 对测量结果有明显歪曲。造成这种误差的原因, 主要是测量时的粗心大意。例如, 读数错误、记录错误、计算错误等造成的较大误差, 称为过失误差, 显然应当从测量数据中将其剔除。

§ 1—2 测量误差的来源及其处理

一、偶然误差

(一) 偶然误差的来源

偶然误差是由于暂时尚未掌握其规律，或一时不便于控制的微小因素所造成的。偶然误差出现的大小和方向事前无法知道，因此也不能将它从测量结果中予以消除。

偶然误差产生的原因，不外是测量仪器的缺点：如仪器中传动部分的间隙、连接零件中的弹性变形、测量力的变化、甚至测量人员的精神状态，都是造成产生这种误差的原因。偶然误差虽然对某一次测量而言，它出现的大小和方向，并无一定规律性，但人们通过长期实践发现，如果在相同测量条件下，进行多次重复测量，偶然误差出现的机会是符合数学上的统计规律的，因此通常用概率论和统计方法对它进行处理。从而达到控制并减少它对测量结果的影响。

(二) 偶然误差的分布规律及其特点

偶然误差出现的规律，可以在大量重复测量数据的基础上总结出来，由此得出的规律称为统计规律。

现举例说明如下：

在立式测长仪上对一个直径为 $\phi 15^{-0.006}$ 毫米的轴径进行多次重复测量（测量次数 $N = 100$ ）。将所有测得值 x_i ，按大小分为若干组（取分组间隔 $\Delta x = 1$ 微米），并统计每组内测得值 x_i 出现的次数 n （频数），及其频率 V （即出现的次数 n 同总测量次数 N 之比，即 $V = \frac{n}{N}$ ），列于表 1—1。

大量重复测量的统计表

表 1—1

测 得 值 分 组 范 围 (毫米)	分 组 平 均 值 $\bar{x}_i$ (毫米)	出 现 次 数 (频数) n_i	出 现 频 率 $V_i = \frac{n_i}{N}$
14.999~14.998	14.999	8	0.08
<14.998~14.997	14.998	16	0.16
<14.997~14.996	14.997	50	0.50
<14.996~14.995	14.996	20	0.20
<14.995~14.994	14.995	6	0.06
测 得 值 平 均 值 $\bar{x} = 14.997$		总 数 $N = \sum n_i = 100$	$\sum V_i = 1$

同时以分组尺寸为横坐标，以出现次数 n 和频率 V 为纵坐标，绘制分布统计图。然后将图中分组平均值所对应的各点用直线连接起来，得到的折线图，即为其经验分布图（图 1—1）。

根据多次测量实践的统计分析发现，在正常情况下，偶然误差的经验分布曲线大致都是如此。这就说明偶然误差的出现是有一定分布规律的，如果将误差间隔区域划分得很小，而且测量次数大大增加，那末偶然误差的分布规律就越来越接近光滑连续曲线。在统计学中，这个连续的对称曲线，称为正态分布曲线（图 1—2）。其数学表达式为：

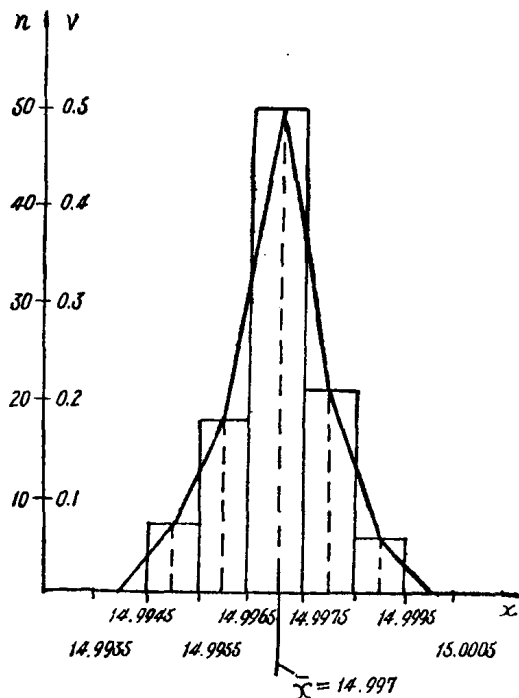


图 1-1 分布统计图

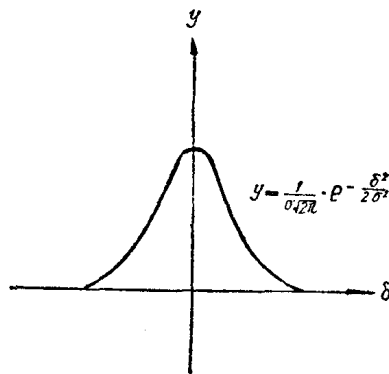


图 1-2 正态分布曲线

$$y = f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \quad (1-4)$$

式中 y —— 概率密度,

δ —— 偶然误差;

σ —— 均方根误差;

e —— 自然对数的底, $e = 2.7183\dots$ 。

上述大量重复测量时, 偶然误差的出现规律基本上符合正态分布曲线。分析上述曲线可发现偶然误差的分布规律具有以下特点:

1. 集中性

大量重复测量时所测得的值, 均集中分布在其平均值 $\bar{x}$ 附近。

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1-5)$$

即测得值 x_i 在平均值 $\bar{x}$ 附近出现的机会最多 (例题中测量值大部分集中在 14.997 附近, 而远离它的出现次数较少), $\bar{x}$ 也称为分布中心。

2. 对称性

测得值 x_i 对平均值 $\bar{x}$ 的偏差称为残差 ν_i ,

即:

$$\nu_i = x_i - \bar{x}。$$

两个数值相同而符号相反的残差, 出现的机会或次数相同, 或者说测得值 x_i 是对称地分布于平均值 $\bar{x}$ 的两侧, 故称为对称性。这说明所有残差 ν_i 基本上互相抵消, 其总和接近于零。

即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N}{N} = 0 \quad (1-6)$$

例题中以 $\bar{x} = 14.997$ 为中心, 其两侧出现的个数接近相等, 接近对称。

3. 分散性

测得值 x_i 离分布中心 $\bar{x}$ 近的, 出现机会多, 离分布中心 $\bar{x}$ 远的, 出现机会少, 按照一定规律分布于中心两侧, 称分散性。

4. 有限性

测得值 x_i , 在一定的测量条件下, 有一定的分布范围, 称为有限性。例如, 在上例中偶然误差的绝对值不会超过14.994~14.999之间的界限范围。

(三) 偶然误差的评定指标

偶然误差在一系列重复测量时, 是按正态分布规律出现的, 因此某个个别的误差, 是不能反映其精度情况的, 必须采用综合性指标, 才能评定偶然误差。通常以正态分布曲线的两个参数: 算术平均值 $\bar{x}$ 和均方根误差 σ , 作为评定指标。

1. 算术平均值 $\bar{x}$

由于测量误差的存在, 真值 Q 是不知道的, 因此只能够从一系列测得值 x_i 中找一个接近真值 Q 的数值, 作为测量结果, 这个值就是算术平均值 $\bar{x}$ 。

设对某一量作一系列等精度测量, 得到一系列不同的测得值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。这些数值的算术平均值 $\bar{x}$ 为:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}。$$

各测得值的真误差为 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ 。

其中

$$\delta_1 = x_1 - Q;$$

$$\delta_2 = x_2 - Q;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\delta_n = x_n - Q。$$

则

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n x_i - nQ。$$

由前述偶然误差的对称性得知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \rightarrow 0。$$

所以

$$\sum_{i=1}^n x_i = nQ;$$

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}。$$

这个结果证明, 当测量次数无限增大时, 全部测得值的算术平均值即等于真值。

通常情况下不可能作无限次测量, 真值也难以得到, 但可以说算术平均值 $\bar{x}$ 是最接近真值的, 因此以算术平均值作为真值是可靠而且合理的。

另一方面, 从正态分布曲线的特性——集中性, 也可以看出算术平均值 $\bar{x}$, 它表示曲线分布的位置和分布中心, 也是概率最密集的位置, 同样说明以算术平均值 $\bar{x}$, 作为偶然误差的测量结果是合理的。

2. 均方根误差 σ

用算术平均值 $\bar{x}$ 可以表示测量结果,但是不能表示各测量值的精度。由于偶然误差服从统计规律,它的误差大小和正负号出现又是按概率决定的。为了研究测量值的精度,先介绍一下概率论的基本概念。

(1) 概率

在自然界中各种事件不计胜数,但按其性质不外乎可分为:必然事件,不可能事件和偶然事件三类。

甲、必然事件:是指在一定条件下,必然发生的事件。

乙、不可能事件:是指在一定条件下,必然不发生的事件。

丙、偶然事件:是指在一定条件下,可能发生也可能不发生的事件。

而概率就是研究偶然事件出现的规律,或者说研究偶然事件发生可能性的规律。

在一定条件下,可能出现或不出现的事件叫做偶然事件,若某偶然事件的出现次数 n 和全部可能的总次数 N 之比,叫做该事件出现的概率 P ,则

$$P = \frac{n}{N}.$$

必然事件:

$$n = N; \text{ 概率 } P = 1.$$

不可能事件:

$$n = 0; \text{ 概率 } P = 0.$$

任何偶然事件出现的概率:

$$0 < P < 1.$$

每一偶然事件均具有自己概率,而全部偶然事件之和等于1。

(2) 正态分布曲线和均方根误差 σ

由于偶然误差的出现是符合正态分布曲线的,因此它的出现概率就是该曲线下所包围的面积,因为全部偶然误差出现的概率 P 之和为1,所以曲线与横轴间所包围的面积应等于1。

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}.$$

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} y d\delta = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = 1. \quad (1-7)$$

式中 y —— 概率密度;

δ —— 偶然误差;

σ —— 均方根误差;

e —— 自然对数底数,等于2.7183...;

P —— 概率。

正态分布曲线是一个指数方程式,它是随着偶然误差 δ 和均方根误差 σ 的变化而变化的,现在先研究均方根误差 σ 和特性曲线之间的关系(图1-3)。

均方根误差 σ 表示分布曲线的形状和分散

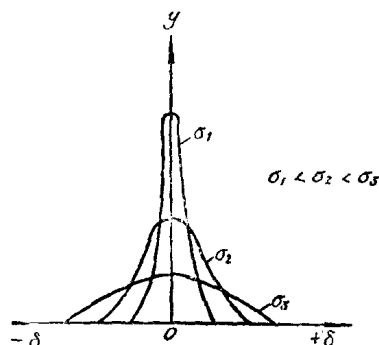


图1-3 三种不同 σ 的正态分布曲线 $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
 σ ——均方根误差, δ ——偶然误差。

度, σ 值愈小, 曲线形状越陡, 偶然误差的分布越集中; 反之, σ 值愈大, 曲线形状越平坦, 偶然误差也分布得越分散。由曲线可知, σ 的数值愈小, 亦即测量的精度较高; 反之, 当 σ 值大时, 大误差出现的概率相应大些, 因而测量精度也低。所以可以用均方根误差 σ 的大小来表明测量的精度, 并作为评定偶然误差的尺度。

(3) 均方根误差 σ 的计算

在等精度测量中, 均方根误差 σ 可由下式表达:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n}} \quad (1-8)$$

式中 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ——每次测量中相应各测量值的偶然误差。

$$[\delta\delta] = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2$$

$$\delta_i = x_i - Q$$

其中 x_i ——为各测得值,

Q ——为被测量的真值,

n ——测量次数。

在确定了均方根误差 σ 之后, 可以进一步讨论均方根误差 σ 和偶然误差 δ 之间关系。

前面已经研究过, 在正态分布曲线下包含的总面积, 等于各偶然误差 δ_i 出现的概率的总和。

$$\text{即} \quad P = \int_{-\infty}^{+\infty} y d\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = 1。$$

为运算方便起见, 代入新的变量 Z ,

$$\text{设} \quad Z = \frac{\delta}{\sigma},$$

$$dZ = \frac{d\delta}{\sigma},$$

$$\text{则} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = 1。$$

如果要确定偶然误差在所给定的 $(-\delta, +\delta)$ 范围内的概率, 只要对图 1—4 阴影线部分的面积作积分即可。

令

$$Z = \frac{\delta}{\sigma},$$

所以偶然误差在 $(-\delta, +\delta)$ 区间的概率为:

$$P = 2\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Z}^{+Z} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ。$$

对任何 Z 值的积分值 $\phi(Z)$ 可以由概率函数积分表查出。

表 1—2 中所列的为积分表中几个具有特征的数值。

由表 1—2 可看出, 随着 Z 值的增大, $1 - 2\phi(Z)$ 的值, 也就是超出 δ 的概率, 减少得很快。

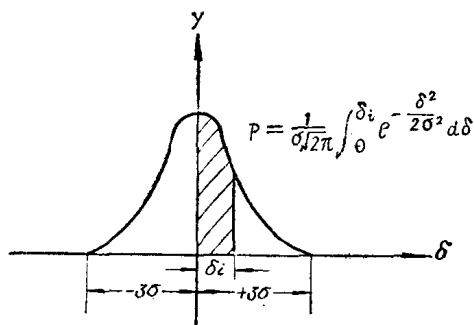


图 1—4 阴影部分面积表示零到 δ 范围内的概率

表 1-2

$Z = \frac{\delta}{\sigma}$	0.5	0.6745	1	2	3	4
$\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$	0.1915	0.25	0.3413	0.4772	0.4986	0.4999
不超出 δ 的概率 $P = 2\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Z}^Z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$	0.3829	0.50	0.6827	0.9545	0.9973	0.9999
超出 δ 的概率 $P = 1 - 2\phi(Z)$	0.6171	0.50	0.3173	0.0455	0.0027	0.0001

当 $Z = \pm 1$ 时, $2\phi(Z) = 0.6827$, 即在 $\delta = \pm\sigma$ 范围内的概率为 68.27%。

当 $Z = \pm 3$ 时, $2\phi(Z) = 0.9973$, 即在 $\delta = \pm 3\sigma$ 范围内的概率为 99.73%。在超出 $\delta = \pm 3\sigma$ 范围的概率为 $P = 1 - 2\phi(Z) = 0.0027$, 仅为 0.27%, 即发生的概率很小。所以通常评定偶然误差时就以 $\pm 3\sigma$ 为极限误差。

即
$$\Delta_{\text{lim}} = \pm 3\sigma, \quad (1-9)$$

称为测量值的极限误差。

前面讨论均方根误差 σ 时, 是以真误差 $\delta_i = x_i - Q$ 来表示的, 但实际上由于真值 Q 是不知道的, 所以真误差 δ_i 也无法知道, 因而实际上是用剩余误差 (残差) ν 来表示的。

即
$$\nu_i = x_i - \bar{x}. \quad (1-10)$$

式中 ν_i —— 剩余误差;

x_i —— 测得值;

$\bar{x}$ —— 算术平均值。

如果均方根误差 σ 用剩余误差 ν 来表示, 则

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm \sqrt{\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \dots + \nu_n^2}{n-1}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \nu_i^2}{n-1}}. \end{aligned} \quad (1-11)$$

上式证明如下:

(甲) 符号说明

Q —— 真值;

x_i —— 测得值 ($i = 1, 2, \dots, n$);

δ_i —— 真误差 ($\delta_i = x_i - Q$);

$\bar{x}$ —— 算术平均值 ($\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$);

ν_i —— 残差 ($\nu_i = x_i - \bar{x}$);

$\delta_{\bar{x}}$ —— 算术平均值的真误差 ($\delta_{\bar{x}} = \bar{x} - Q$).

(乙) 公式证明

$$\because \begin{cases} \delta_i = x_i - Q \\ \nu_i = x_i - \bar{x} \end{cases}$$

$$= \frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}。$$

式中

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{x}}^2 &= \frac{n \delta_x^2}{n} = \frac{n(\bar{x} - Q)^2}{n} \\ &= \frac{\sum (\bar{x} - Q)^2}{n} \\ &= \sigma_{\bar{x}}^2。$$

因为 $\bar{x}$ 和 Q 是定值, 所以 $n(\bar{x} - Q)^2$ 可写成 $\sum (\bar{x} - Q)^2$ 。

$$\begin{aligned}\therefore \sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{\sum v_i^2}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n} \sigma^2，\end{aligned}$$

即

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}。$$

由上式证明, 多次测量的算术平均值的均方根误差 $\sigma_{\bar{x}}$, 比单次测量的均方根误差 σ 要小 $\sqrt{n}$ 倍, 若以剩余误差 v_i 来表示上式, 则

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}}。 \quad (1-13)$$

二、系统误差

(一) 系统误差的来源

系统误差是有规律可掌握的, 在精密测量中应尽量设法把它消除。为此必须对测量结果进行分析, 掌握其影响规律, 然后加以校正或消除。

原则上讲系统误差都是可以控制的, 但有些系统误差, 虽然原因知道, 但其规律一时不容易控制, 往往将这些系统误差看作偶然误差来处理。例如: 温度所引起的误差, 按理论讲是有规律的误差, 但如果温度不稳定时, 又把它当作偶然误差来处理。

系统误差来源一般如下:

1. 测量器具的误差

测量仪器设计时, 为了简化结构有时采用近似设计, 因而存在着测量仪器的原理误差。例如: 机械式比较仪中百分表的标尺刻度, 常常用标尺的等分刻度代替, 实际上应为不等分的刻度。

再有, 一般量仪设计时应符合“阿贝原则”。设计时如果不符合阿贝原则, 也造成量仪的原理误差。

阿贝原则:

“被测件与基准件, 在测量方向上应处在同一直线上”。

即测量的基准件应安置在被测长度的延长线上。这是量仪设计的一条基本原则。因为在测量过程中, 测量装置由于量仪制造及装配不良 (如导轨不直、导轨不平行、滚珠不圆及滚道精度等), 而产生倾斜。如果量仪设计时是符合阿贝原则的, 那末由倾斜而引起的测量误差, 是以二次方误差出现, 因而可以忽略不计。图 1-5 为阿贝比长仪结构原理图。

$$\Delta = L - L \cos \Delta \varphi = L(1 - \cos \Delta \varphi)，$$