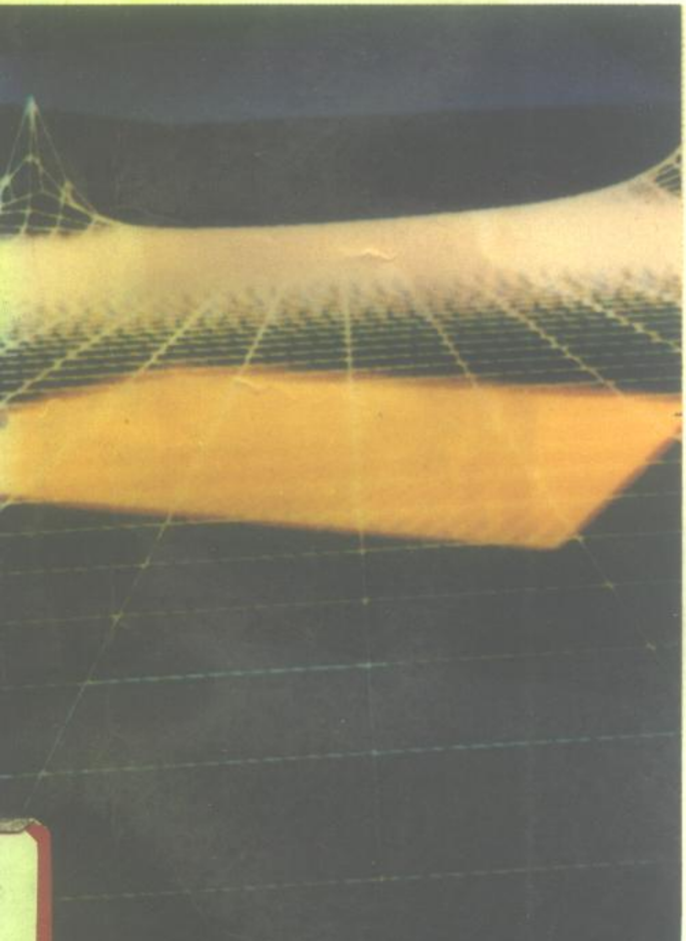
高等数学解题过程的分析和研究

钱昌本 著



科学出版社

高等数学解题过程的分析和研究

钱昌本 著

科学出版社
1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

解题的教学与训练是高等数学教学的重要组成．如何使学生喜爱、善长解题并从中发展自我学习能力，是困难且诱人的课题．作者在担任西安交通大学教改试验班数学主讲的教学中对此曾做过有益的摸索，本书正是这一工作的部分反映．全书试图以精选问题的深入剖析，向读者展现问题解答方案寻求、实现的全过程及反映这一过程的相应思维活动，旨在让师生从“题海”中求得部分解脱并卓有成效地发展学生的智能．书中问题以作者编拟为主，对部分入选“陈题”则追求有别常规的思路与解法．全书注重从方法论和科学思维规律去处理解题的全过程，强调意识、直觉、形象思维在解题中的作用．

本书可供理工科院校师生作为高等数学课程教与学的参考书，对准备报考研究生、参加高等数学竞赛及关心高等数学课程改革的同志有一定的参考价值．

高等数学解题过程的
分析和研究

钱 昌 本 著

责任编辑 唐云江

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 9 月第 一 版	开本：850×1168 1/32
1994 年 9 月第一次印刷	印张：14 3/8
印数：1—4 260	字数：377 000

ISBN 7-03-004140-2/O・721

定价：11.60 元

序

学习一门功课，一要掌握基本理论，二要培养工作能力．理论和能力是相辅相成的，理论可以帮助学生锻炼能力，但决不会自动转化为能力，因为能力需要亲自动手，通过本身的实践，才能逐步锻炼出来．学习数学也是如此，比较起来，培养能力更重要、也更困难．以高等数学而言，教科书成千上万，其中不乏佳作；只要循序渐进，便不难把基本理论学会；但培养能力却远非如此简单．怎样指导学生做好习题，同时在做题的过程中培养发现新定理、创造新理论的本领；怎样从实际中提炼数学问题，抽象成数学模型，并逐步求解，以满足实际的需要，这一整套联系实际的能力如何训练，至今似乎还没有成熟的经验，有关的书也不多．如果说有，也大半是习题集或习题解答．这类书是需要的，但还不够，因为它们大多限于列举一些题目，给出提示或解答就完事．至于为什么选这些题，解题前应如何思考，从何下手，解完后有哪些经验可以上升成为一般的思想方法、一般的解题原则，从而解决一大类问题，甚至提出新问题、创造新理论，则很少讨论．

国际上，关于数学教育的名著也寥如晨星，影响较大的，也许数美籍匈牙利数学家、教育家波利亚（G. Polya）的三部姐妹作《数学与猜想》、《怎样解题》、《数学的发现》，它们影响很大，确是名作．不过他熟悉的是西方的教育，对中国的教育、中国人思维的特点，并不太了解．因此，我们更需要切合我国实际的相应著作．

这本《高等数学解题过程的分析和研究》可以称得上是符合上述要求的好书．作者钱昌本先生热爱教育，更热心于培养学生

自学的能力，不满足于灌输式的教学方法．他的教学法宗旨是变学生的被动接受为主动进取，本着这种教学思想，他在西安交通大学教改试点班主讲 5 年，取得了显著效果，培养了许多优秀学生，从而三次获得优秀教学成果奖．他的经验引起了同行的兴趣，大家希望他能把他的教学思想和内容写成教材或讲义．这本书就是应此需要而写的教学参考书．本书大大不同于一般的习题解答，它突出智能培养而有别于“传授型”或“模式化”的书籍．全书以 120 个高等数学问题为主，来展开剖析，寻求解答的过程及反映这一过程的思维活动，以便开拓思路，培养解题和发现新事物的能力．这些题目主要是作者编制或积累的．本书第二部分另列了 120 个习题，以供读者自习；这些题先有提示，后有详细解答．

作者在本书中倾注了 20 余年长期的思考和实践经验，具有别开生面的独特风格．例如，有些难题的解答需要作辅助函数，一般书上只简单地引进这一函数，至于如何想到它，则语焉不详甚至只字不提．本书则通过逐步分析、层层推理，最后引导到辅助函数的自然出现，使人决无天外飞来之感．由于这些特点，我们深信本书的出版，对高等数学的教师、学员和爱好者会有很大的启迪和帮助．

王梓坤

1993．9．

前　言

在科学技术迅猛发展并向传统教学提出严重挑战的今天，“教学必须以培养能力为主，努力做到增长知识与发展能力相统一”的观点已日益为人们所广泛接受．如何在教与学中发展学生的智能已成为普遍关注的问题．

传统的“系统指导型”教学中，学生主要以接受学习的方式来获取大量的文化科学知识．在接受学习中，所学的知识往往以定论的形式呈现给学生，要求学生对所学材料加以内化，以便今后所需时可再现．这种接受学习的模式无需学生去探索、去追求、去发现，较少要学生用自己的思维去克服障碍．相反，这里需要的是理解、记忆、巩固和再现．这种既舒服又乏味的学习束缚了学生思维的发展，有碍于学生能力的培养，从而也无法培养起学生探究问题的态度、行为和方法．实际表明，一个长久采用被动接受学习模式去学的人，他思维往往具有封闭、求同、单向、直观、超稳定和亚节奏等特点．这正好符合了几千年来大一统的封建社会结构所强化固定下来的中国传统思维模式，而这一思维模式的影响正是我国近代科技发展迟缓的重要原因之一．人才的培养关系到国家强盛、民族振兴和人民富裕，考虑到新形势下对人才培养的要求，改变学生被动接受学习的传统模式已成为当前教育改革中亟待解决的问题．

为使学生变被动学习为主动进取，变记忆学习为认知学习，无疑，关键在于教师在教学活动中的主导作用．为此，应尽量削弱那种容易导致学生被动接受的说教式传授，加强教师指导下的学生自己的认知活动．教师要努力去创造有利于学生独立思考的情境，为学生安排各种富于发现的机会，提出具有诱发性的问题，为

学生提供求知的刺激，使学生通过动脑、动手去亲身探究未知的事情，去解决未知的问题，去捕获知识，去增长能力．为达到这一目的，加强解题教学与训练无疑是极为有效的．

就高等数学课程而言，国内外已出版了大量的题集和解答集．为配合循序渐进的教学，为达到教学的“巩固性原则”，这类题集必不可少是自然的．然而，这种题集的着眼点往往是量，是资料性；追求的是规范性练习的笔头操练，是对套路和规则的执行．考虑到时代发展对人才培养的要求，仅有这类题集已远远不够．如何实现教材、教学参考书、题集从“传授知识型”到“发展智能型”的转变，正待广大教育工作者去奋力探索．

解题教学与训练是高等数学教学的一个重要组成部分．如何使学生喜爱、善长解题并从中发展自我学习力，是困难而又诱人的一个课题．笔者在担任西安交通大学教改试验班数学主讲的教学中，对此曾做过有益的摸索，本书正是这一工作的点滴反映．书中第一部分试图以120个问题的深入剖析，向读者展现“寻求思路、拟定解答方案、实现方案和回味”的解题过程及反映这一过程的相应的思维活动，旨在开拓思维，发展能力．解题是一种高级心理活动，它与科学的思维方式、熟练的技巧、涉及知识的强烈使用意识等密切相关．而这一切决不能单凭摹仿和博览下的“见多识广”所能解决，更不能靠处方式的解题模式的牢记与套用．解题能力必须由实践才能得到发展．本书的第二部分为读者提供了练习训练的机会．那里的提示给出了通向解答的某一途径；那里的解答不仅给出了答案，也给出了由提示所揭示的念头到得出答案的详尽过程．第二部分作为全书的重要组成同样反映了本书的宗旨．书中例与题以笔者编拟为主，部分“陈题”则追求有别于常规思路与解法的处理，以突出新意．笔者无意追求系统和全面，只想从方法论角度和科学思维规律去展现解题的过程．

笔者真诚地期望读者能从本书获得点启发而有所裨益．

鉴于笔者学识浅陋，理解和研究尚不够，错漏不当恐难幸免，恳请读者指教．

本书承蒙王梓坤教授在百忙中抽时间审阅，并撰写了序言．在成书的过程中，得到了齐东旭教授、朱儒楷教授和陈冬生副教授的热情鼓励和切实的帮助．朱红同志为本书的完成付出了辛勤的劳动．汕头大学和科学出版社的有关领导对本书的面世也给予了热情的支持，在此向他们表示衷心的感谢．

钱　昌　本

1993年10月于汕头大学

目　　录

第一部分　对解题过程的理解和研究

一、怎样解题的例

解题意味着从困难中去寻找一条越过障碍的路，使我们能够达到一个不易即时到达的目标. 然而，这样一条通向目标的路又该如何去寻找？让我们从具体问题谈起.

［**例1**］　有没有自然数n使得式子$(2+\sqrt{2})^n$的值的小数部分大于$0.\underbrace{99\cdots9}_{100个9}$？

显然，首先要“猜测”一个倾向性意见，“有”还是“没有”；而第二步应该追求解答的严格性.

让我们从细致观察揣摩整个问题开始.

n是自然数，它可以取$1,2,3,\cdots$；

$\sqrt{2}$是无理数，$\sqrt{2}=1.414\cdots$；

而$0.\underbrace{99\cdots9}_{100个9}$的特点是其值小于1又非常接近1.

当我们将细节联系起来，问题就成为“有没有自然数n使无理数$(2+\sqrt{2})^n$的值从小的方向非常接近某一整数？”

审视问题并努力回想自己现有知识中与该问题有关的那些部分，从中考察找出熟悉的、可能有用的部分，自然会想到二项式展开定理. 让我们不妨试试看：

$$(2+\sqrt{2})^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i2^{n-i}(\sqrt{2})^i$$

$$=2^n+n2^{n-1}\sqrt{2}+\frac{1}{2}n(n-1)2^{n-2}(\sqrt{2})^2$$

$$+\cdots+(\sqrt{2})^n,$$

观察展开式发现：第奇数项(即 i 取 0 或偶数时的对应项) 皆为整数；而其余项皆为非整数.

我们将展开式中所有整数项的和记为 A_n，而将所有非整数的项的和记为 B_n，于是

$$(2+\sqrt{2})^n=A_n+B_n$$

的小数部分就是 B_n 的小数部分. 这点使人想到"欲使 $(2+\sqrt{2})^n$ 的值非常接近某整数，只需使 B_n 的值非常接近另一个整数."但是，后者的解决并非比前者容易！

当你面临困境时，不必丧气，不必去钻牛角尖，我们从信息的重新编码考虑，可能会想到"A_n 是整数，B_n 非常接近某整数，则 A_n 与 B_n 之差就一定非常接近另一个整数."为此，考察 A_n-B_n 有

$$A_n-B_n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i2^{n-i}(-\sqrt{2})^i=(2-\sqrt{2})^n>0.$$

从而知　$A_n>B_n$. 又因 $0<2-\sqrt{2}<1$，故 n 增大时，$(2-\sqrt{2})^n$ 变小，并有

$$\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n=\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)=0.$$

到此，我们碰到了好运气！因为上式告诉了如下的事实：当 n 增大时，B_n 可以接近 A_n，并且可以达到任意指定的接近程度！于是，可以断言必定存在自然数 n 使

$$0<A_n-B_n<10^{-100}.$$

经以上的分析，把握了问题的本质，为具体求解过程的实现奠定了基础.

［**解**］　记 $(2+\sqrt{2})^n$ 展开式中所有值为整数的项之和为 A_n，剩余所有项之和为 B_n，于是

$$(2+\sqrt{2})^n=A_n+B_n$$

因为　$0<(2-\sqrt{2})^n=A_n-B_n$，故 $A_n>B_n>0$　(1)

又因为 $0<2-\sqrt{2}<0.6$，故有

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \lim_{n\to\infty}(2 - \sqrt{2})^n = 0.$$

由极限定义知，对 $\varepsilon = 10^{-100}$ 必存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有

$$A_n - B_n < 10^{-100} \tag{2}$$

因为 A_n 为整数，考虑到(1)，(2) 两式就有

$$[B_n] = A_n - 1$$

(符号 [ ] 表示取整运算，即 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.)
于是，当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{2})^n \text{小数部分的值} &= (A_n + B_n) - [A_n + B_n] \\ &= B_n - [B_n] = B_n - (A_n - 1) \\ &= 1 - (A_n - B_n) > 1 - 10^{-100} \\ &= 0.\underbrace{99\cdots9}_{100\text{个}9}.\end{aligned}$$

从而知，存在自然数 n 使 $(2+\sqrt{2})^n$ 的小数部分大于 $0.\underbrace{99\cdots9}_{100\text{个}9}$.

(解毕)

对例 1 若要求出一个具体的 n 也是可以的，因为 $A_n - B_n = (2-\sqrt{2})^n < (0.6)^n$，解不等式 $(0.6)^n < 10^{-100}$ 得 $n > \dfrac{-100}{\lg 0.6} \approx 450.8$，故可取 $N = 450$。当 $n > 450$ 时都行.

当然，问题中的数字可以改得更一般些，譬如：$(k+\sqrt{m})^n$，其中正整数 k, m 满足 $0 < k - \sqrt{m} < 1$.

实际上例 1 是根据如下问题："设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，而 $\{x\} = x - [x]$. 求 $\lim_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$." 修改而成的. 原题因过于道貌岸然而显得呆板，缺乏生气. 又因本质外露而使其难度较小. 经改造所得的例 1 已将极限本质巧妙掩盖起来，这必须通过"熟悉问题、深入理解问题、探索有益的念头"等几个步骤后，才可能抓住问题的本质，从而得到求解方案的眉目.

让我们遵照例 1 解答的程序再做几个题.

[例 2] 讨论数列 $\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}$,

$\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}$,…… 的极限.

为讨论方便,不妨记数列为$\{a_n\}$. 观察所给数列,易见当 $n\geqslant 3$ 时 有递推式

$$a_n=\sqrt{7-\sqrt{7+a_{n-2}}}.$$

该式反映了数列的结构，它对求解必有重用.

回想以往是否做过类似题目,有,譬如"讨论数列 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,…… 的极限."我们是这样解答的:"记数列为$\{b_n\}$,有$b_{n-1}=\sqrt{2+b_n}$. 因为$b_1=\sqrt{2}<2$,且假若 $b_n<2$,则必有

$$b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}<\sqrt{2+2}=2.$$

故 $b_n<2$,即$\{b_n\}$ 有界. 又因为 $0<b_n<2$, 故有

$$b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}>\sqrt{b_n+b_n}=\sqrt{2b_n}>\sqrt{b_n^2}=b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 单调增. 由单调有界必有极限知$\{b_n\}$ 有极限存在,设其为 B. 对 $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}$ 两边取 $n\to\infty$ 时的极限,有

$$B=\sqrt{2+B}.$$

解之得 $B=2$. 故$\{b_n\}$ 极限为 2."

例 2 能否摹仿上述解法呢?易见$\{a_n\}$ 是有界的, 因为

$$0<a_1\leqslant\sqrt{7},\ 0<a_2<\sqrt{7}.$$

若 $0<a_n\leqslant\sqrt{7}$,则必有

$$0<\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}\leqslant\sqrt{7-\sqrt{7+a_n}}$$
$$<\sqrt{7-\sqrt{7+0}}<\sqrt{7}$$

即 $0<a_{n+2}<\sqrt{7}$.

由数学归纳法知$\{a_n\}$ 有界. 那么$\{a_n\}$ 是否单调呢?从前几项不难发现

$$a_1 > a_2 > a_3,\ a_3 < a_4 < a_5,\cdots\cdots.$$

一般情况怎样？从递推关系容易想到引入辅助函数

$$f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7+x}}, \qquad (0 < x \leqslant \sqrt{7}).$$

则 $f(a_n) = a_{n+2}$. 求 $f(x)$ 的导数，有

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+x}}\ \sqrt{7+x}} < 0.$$

故 $f(x)$ 单调减，考虑到 $a_1 > a_2 > a_3$，就有

$$a_1 > a_2 > a_3,\ a_3 < a_4 < a_5,\ a_5 > a_6 > a_7,\ a_7 < a_8 < a_9,\cdots\cdots.$$

令人失望，$\{a_n\}$ 没有单调性.

$\{a_n\}$ 貌似 $\{b_n\}$，但本质有别. 我们只得收回“利用单调有界必有极限”来解答的念头，而另做考虑.

当我们感到求解困难时，退一步看，如果 $\{a_n\}$ 有极限的话，极限 A 是什么呢？这倒十分简单，仿 $\{b_n\}$ 解法，我们只需解

$$A = \sqrt{7 - \sqrt{7+A}}.$$

不难得到实根 $A = 2$. 而“如果”前提是否对呢？这只须我们去“证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$”即可！进一步看只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - 2| = 0$.

考虑到递推式以及 $f(2) = 2$，有

$$|a_n - 2| = |f(a_{n-2}) - f(2)|,$$

上式右方好似与拉格朗日中值定理有关，不妨利用它，有

$$|f(a_{n-2}) - f(2)| = |f'(\xi)(a_{n-2} - 2)|$$

其中 ξ 在 a_{n-2} 与 2 之间，因 $0 < a_n \leqslant \sqrt{7}$，故 $0 < \xi < \sqrt{7}$. 显然有

$$|f'(\xi)| = \left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\xi}}\ \sqrt{7+\xi}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}\ \sqrt{7}} = \lambda < 1$$

于是，我们有递推式

$$|a_n - 2| \leqslant \lambda |a_{n-2} - 2|, \text{其中 } 0 < \lambda < 1.$$

反复利用上式，得

$$|a_n - 2| \leqslant \lambda^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |a_i - 2|,$$

其中 a_i 或为 $a_1 = \sqrt{7}$，或为 $a_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}$. 因为 $0 < \lambda < 1$，故 $n \to \infty$ 时必有 $|a_n - 2| \to 0$，即 $a_n \to 2$. 到此，解答方案已明了.

［解］ 引进辅助函数 $f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x}}$，$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$

令

$$g(x) = f(x) - x.$$

因为

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{-1}{4\sqrt{7 - \sqrt{7+x}}\,\sqrt{7+x}} - 1 < 0,$$

故 $g(x)$ 单调减，又因为

$$g(0) = \sqrt{7 - \sqrt{7}} > 0 \text{ 且 } g(7) = \sqrt{7 - \sqrt{14}} - 7 < 0,$$

故 $g(x)$ 有唯一零点，易见 $g(2) = 0$，即 $f(x)$ 有唯一不动点 2，所以 $f(2) = 2$.

假设 $\{a_n\}$ 有极限 A，对 $a_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + a_n}}$ 两边取 $n \to \infty$ 时的极限，有

$$A = \sqrt{7 - \sqrt{7 + A}}.$$

解之得实根 $A = 2$.

现在再来证明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

由拉格朗日中值定理知

$$f(x) - f(2) = f'(\xi)(x - 2).$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$ 时，在 2 和 x 之间的 ξ 必满足 $0 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{7}$，并有

$$|f'(\xi)| = \left| \frac{-1}{4\sqrt{7 - \sqrt{7+\xi}}\,\sqrt{7+\xi}} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}\ \sqrt{7}} = \lambda < 1.$$

易见 $0 \leqslant a_n \leqslant \sqrt{7}$，故有

$$|a_n - 2| = |f(a_{n-2}) - f(2)| \leqslant \lambda |a_{n-2} - 2|.$$

反复运用上式，有

$$0 \leqslant |a_n - 2| \leqslant \lambda^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |a_i - 2|$$

其中 a_i 为 a_1 或 a_2，$0 < \lambda < 1$.

于是，有

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = 0.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. （解毕）

例 2 的解答利用了“猜个结论，再证实它！”的手法. 这一技巧在解决问题时往往很有效.

上述解答中关键步骤是利用拉格朗日中值定理找到了递推不等式

$$|a_n - 2| \leqslant \lambda |a_{n-2} - 2| \qquad (0 < \lambda < 1).$$

能否不用中值定理呢？让我们来利用变形，有

$$a_{n+2} - 2 = \sqrt{7 - \sqrt{7 + a_n}} - 2 = \frac{3 - \sqrt{7 + a_n}}{\sqrt{7 - \sqrt{7 + a_n}} + 2}$$

$$= \frac{2 - a_n}{\left(\sqrt{7 - \sqrt{7 + a_n}} + 2\right)\left(3 + \sqrt{7 + a_n}\right)},$$

将上式右方结果取绝对值并放大，有

$$|a_{n+2} - 2| \leqslant \frac{1}{6} |a_n - 2|.$$

显然，这里更简洁些. 所以原解法并不完美，还可以改进.

另外，例 2 中的数字“7”也可以改成为其它数，譬如：改为“13”时相应有极限 3；改成“21”时相应有极限 4；等等. 请有兴趣的读者寻求该题的更一般的表达形式.