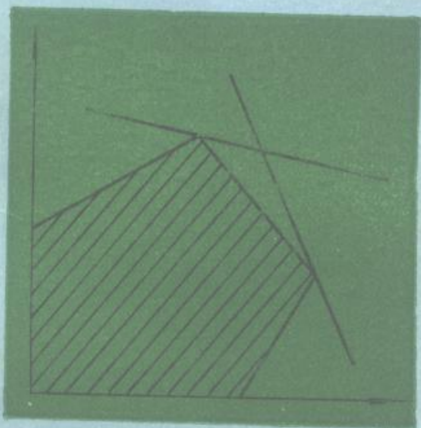
目标规划及其应用



赵可培 编著

同济大学出版社

目标规划及其应用

赵可培 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书从经济管理角度出发，比较详细地论述了目标规划的基本思想，求解方法及有关分析，而且列举了不少应用实例。全书共五章：即多目标线性规划、目标规划模型、目标规划模型求解方法、对偶目标规划和最优化后分析与目标规划应用实例，並配有习题及答案，还附有目标规划的计算机程序。

本书可作高等院校经济管理类教材，也可作为运筹学工作者，经济、企业管理工作者的参考书。

责任编辑　李炳钊

封面设计　徐　繁

目标规划及其应用

赵可培编著

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

武进县村前印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：8.875 字数：275 千字

1987年8月第1版　1987年8月第1次印刷

印数：1～4500　科技新书目：152—298

统一书号：13335·036　定价：1.95元

ISBN 7-5608-0007-6/F·3

前　言

随着我国社会主义现代化建设和科学技术的发展，对现代管理科学的研究越来越显得重要了。现代管理科学研究的一个重要课题就是如何合理地使用现有的人力、物力和财力等各项资源，以取得最好的经济效益。这就是《运筹学》所研究的问题。而线性规划是运筹学中研究最早，发展得最成熟，应用最广泛的一个分支。是目前世界上用得最为广泛的一种科学管理的数学方法。然而，线性规划有一定的局限性，就是决策目标只能是单一的。线性规划只能解决在一组约束条件下，求某一个目标的最大或最小值。这和现代经济社会的要求是很不一致的。在现实社会经济系统中的任何一项活动，其利益关系是多元的，目标是综合的。通常，决策者总是面临着一连串的目标。例如在生产活动中，一般的目标有利润、产值、满足市场需求、降低消耗、提高质量，提高劳动生产率等等。在这些目标中，有主要的，也有次要的；有近期目标，也有远期目标；有互相补充的，也有互相对立的。并且这些关系往往也是可以转化的，即主要目标在一定条件下可以转化为次要目标，近期目标也可以转化为远期目标。对于这样复杂的决策问题，线性规划往往是无能为力的。

目标规划（Goal Programming）是在线性规划的基础上为适应这种复杂的多目标最优决策的需要而在近年内逐步发展起来的。它对众多的目标分别确定一个希望实现的目标值，然后按目标的重要级别依次进行考虑与计算，以求得最接近实现各目标预定数值的方案。如果某些目标由于种种约束而不能完全实现，它也能指出目标值不能实现的程度以及原因，以供决策者参考。通过对各目标重要程度，希望实现值及其它数据的变化、分析，可以得到一系列的决策方案，供决策者在复杂的经济活动中决策。目标规划方法特别适合于经济活动中的目标管理。可以毫不夸张

地说，凡是可以使用线性规划的地方，都可以使用目标规划方法，进行多目标最优决策，并能取得更好的决策效果。

1961年美国经济学家查恩斯（A・Charnes）和库柏（W・W・Cooper）在《管理模型及线性规划的工业应用》一书中，首先提出了目标规划的概念和数学模型。1965年日本学者Ynji Ijiri在《管理目标与控制计算》一书中进一步完善了目标规划的数学模型，并分析了目标的优先级别和权系数概念。1969年Veikko Jääkeä-nen首先将目标规划用于生产管理。南朝鲜学者Sang・M・Lee 1972年在《决策分析的目标规划》一书中，进一步完善了目标规划的作用。

二十多年来，许多运筹学家和实际管理工作者在关于目标规划的基本概念、数学模型、计算方法及计算机计算程序等方面做了很多工作，发表了大量的文献，并取得了很多应用的成果。目前，目标规划已经在经济计划、生产管理、市场经营、财务分析、资源分配、技术参数设计、水利资源的利用、环境保护以及医疗、科研管理等领域获得了广泛的应用。在国内，近年来，也有了应用目标规划方法成功的例子。特别是由于电子计算机的日趋完善，计算工作的压力大大减轻，更促进了目标规划的广泛应用。

在本书中，分五章较详细地介绍了目标规划的基本思想、标准模型、多种的求解方法。并将线性规划的有关对偶理论、灵敏度分析及参数规划推广到了目标规划。最后还列举了不少经济应用实例。其中包括目标规划在商业、运输业、工业、医院、学校、市政等部门应用的实例。本书中包含了较多的目标规划最新成果，也溶入了著者多年讲授《运筹学》的体会以及在目标规划方面所做的一点工作。

本书在叙述上力求深入浅出，通俗易懂，并列举了大量的实例。对于掌握了线性规划的读者很容易读懂，并在实践中加以应用。即使对只掌握初等代数和初步矩阵知识的读者，可先阅读本书附录中的线性规划简介，然后阅读本书。本书适宜于从事经

济计划、工业、商业、交通企业管理的工作人员和有兴趣于运筹学、目标规划知识的读者。在每章的后面都配有一定数量的习题，以适应于作为经济、管理类大专和本科学生、研究生的《目标规划》课程的教材和参考书。在书末并附有答案。为便于读者应用，本书还附有目标规划的计算机程序。

在本书的编写过程中，得到了上海财经大学经济信息管理系吴立煦副教授的大力关怀和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于著者水平有限，成稿时间仓促，有不当之处，欢迎广大读者批评指正。谢谢！

赵可培

1985.9于上海财经大学

目　录

第一章 多目标线性规划

本章主要讨论多目标线性规划模型的建立，其解的特点及求解的基本思想。

第一节 多目标线性规划模型

我们知道，在一般的线性规划问题中，研究的都是仅有一个目标的最优决策问题。然而，在实际问题中，衡量一个方案好与坏的标准往往不止一个。也就是说，问题本身难以用一个标准来衡量，而需要一个以上的标准来衡量，而这些标准彼此又往往不是那么协调的，甚至是互相矛盾的、对立的，这些标准的度量单位也常常各不相同。例如，在资源的最优利用问题中，除了考虑所得的利润最大，还要考虑使生产的产品质量最好，劳动生产率最高，对市场的适应性最强等等。对这样的问题，一般的线性规划方法就无能为力了，因此，需要引入多目标线性规划方法。

〔例1.1〕 某工厂因生产需要要采购某种原料，市场上有甲、乙两个等级，单价分别为2元/斤和1元/斤，现要求所花的总费用不得超过200元，购得原料的总重量不少于100斤，而甲等原料又不得少于50斤，问如何确定最好的采购方案(即花最少的钱，采购最多数量的原料)。建立这个问题的基本模型。

〔解〕 设x_1、x_2分别为采购甲等、乙等原料的数量，(单位：斤)则得基本模型如下：

$$\min \ z_1 = 2x_1 + x_2 \tag{1.1}$$

$$\max \ z_2 = x_1 + x_2 \tag{1.2}$$

约束条件

$$2x_1 + x_2 \leqslant 200 \qquad (1.3)$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 100 \qquad (1.4)$$

$$x_1 \qquad \geqslant 50 \qquad (1.5)$$

$$x_1, \ x_2 \geqslant 0 \qquad (1.6)$$

其中(1.1)式反映了花的钱要尽可能地少，(1.2)式反映了采购的原料的总数要尽可能地多，(1.3)式是所花的总费用不超过200元约束，(1.4)式是所购原料总重量不少于100斤的约束，(1.5)式是甲等原料不得少于50斤的约束，(1.6)式是决策变量的非负约束。

容易看出，这是一个有两个目标的线性规划模型，並且这两个目标是互相冲突的、矛盾的。

［例1.2］ 某工厂在计划期内要生产甲、乙两种产品，现有的资源及这两种产品的技术消耗定额、单位利润如下表。

资源 \ 单耗 \ 产品	甲(每件)	乙(每件)	现有资源
钢　材　(公斤)	9.2	4	3600
木　材　(立方分米)	4	5	2000
设备负荷　(台·时)	3	10	3000
单位产品利润　(元)	70	120	

试确定计划期内的生产计划，使获得的利润最大，同时为适应市场需要，尽可能扩大甲产品的生产，减少乙产品的生产，建立这个问题的基本模型。

［解］设x_1、x_2分别表示甲、乙两种产品生产的件数，则得基本模型如下：

$$\max \quad z_1 = 70x_1 + 120x_2 \qquad (1.7)$$

$$\max \quad z_2 = x_1 \qquad (1.8)$$

$$\min \quad z_3 = x_2 \qquad (1.9)$$

约束条件

$$9.2x_1+\ \ 4x_2\leqslant 3,600 \tag{1.10}$$

$$4x_1+\ \ 5x_2\leqslant 2,000 \tag{1.11}$$

$$3x_1+10x_2\leqslant 3,000 \tag{1.12}$$

$$x_1、\ x_2\geqslant 0 \tag{1.13}$$

其中(1.7)式反映了所得利润要尽可能地多，(1.8)式反映了甲产品生产量要尽可能地多，(1.9)式反映了乙产品生产量要尽可能地少，(1.10)式——(1.12)式是三种资源的约束，(1.13)式是决策变量的非负约束。

容易看出，这是一个有三个目标的线性规划模型，这些目标一般也是互相矛盾的。

［例1.3］ 某公司生产A、B两种产品，每单位A产品的利润为10元，每单位B产品的利润为8元，每单位A产品和B产品所需要的装配时间分别为3小时和2小时，而公司可利用的总的装配时间为120小时/每周，适当的加班超出这个限制是可能的，但在加班时生产出的每单位A产品和B产品的利润，将比在正常工作时间内生产出的利润各少1元。在目前的合同中，公司必须每周提供给顾客这两种产品各至少30个单位。现公司要求：1，尽量充分地利用每周 120 小时的正常工作时间。2：尽量减少加班时间。3：使公司所得利润最大。试建立这个问题的基本模型。

［解］ 设

x_1 每周在正常工作时间内生产A产品数，

x_2 每周在加班工作时间内生产A产品数，

x_3 每周在正常工作时间内生产B产品数，

x_4 每周在加班工作时间内生产B产品数。

则基本模型为：

$$\max\ z_1=\ 3x_1\qquad\quad +2x_3 \tag{1.14}$$

$$\min\ z_2=\qquad\quad 3x_2\qquad\quad +2x_4 \tag{1.15}$$

$$\max\ z_3=10x_1+9x_2+8x_3+7x_4 \tag{1.16}$$

约束条件

$$x_1 + x_2 \geqslant 30 \tag{1.17}$$

$$x_3 + x_4 \geqslant 30 \tag{1.18}$$

$$3x_1 + 2x_3 \leqslant 120 \tag{1.19}$$

$$x_1、x_2、x_3、x_4 \geqslant 0 \tag{1.20}$$

其中(1.14)式反映尽量充分利用正常工作时间，(1.15)式反映尽量减少加班时间，(1.16)式反映尽量取得最大的利润，(1.17)和(1.18)式是为了保证合同的执行，向顾客提供每周多于30个单位的产品，(1.19)式为每周120个正常工作时间约束，(1.20)式是决策变量的非负约束。

容易看出，这也是一个有三个互为矛盾的目标的线性规划模型。

从上述三个例子中，我们不难得出多目标线性规划模型的一般形式如下：

$$\begin{aligned}
\max\ z_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots\cdots + c_{1n}x_n \\
\max\ z_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots\cdots + c_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\max\ z_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots\cdots + c_{mn}x_n
\end{aligned}$$

约束条件

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\
&\vdots \\
a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots\cdots + a_{ln}x_n &\leqslant b_l \\
x_1、x_2、\cdots\cdots、x_n &\geqslant 0
\end{aligned}$$

其中有n个决策变量，m个目标函数，l个约束条件。当m＝1时，即为一般的单目标线性规划模型。

采用矩阵、向量等记号，上述模型可简记为：

$$\max\ Z = CX$$

约束条件

$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{B}_0 \qquad (GP1)$$
$$\mathbf{X} \geqslant \theta$$

其中：

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots\cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= (c_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots\cdots & a_{ln} \end{pmatrix}$$
$$= (a_{ij})_{l \times n}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

这里我们将：求**X**，使得$\mathbf{Z} = \mathbf{CX}$取最大值简记为$\max\ \mathbf{Z} = \mathbf{CX}$，且定义：对任意$n$维向量$\mathbf{X} = (x_i)$，$\mathbf{Y} = (y_i)$，$\mathbf{X} \geqslant \mathbf{Y}$表示向量**X**和**Y**的对应分量$x_i$，$y_i$成立$x_i \geqslant y_i$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$。

与单目标线性规划一样，我们不难把任一多目标线性规划模型化为上述的一般形式，以便于讨论。例如可将〔例1.1〕所得的模型化为如下的一般形式：

$$\max\ z_1' = -2x_1 - x_2$$
$$\max\ z_2 = \quad x_1 + x_2$$

约束条件：

$$2x_1 + x_2 \leqslant \quad 200$$
$$-x_1 - x_2 \leqslant -100$$

$$-x_1 \quad \leqslant -50$$

$$x_1、x_2 \geqslant 0$$

其中$z_1' = -z_1$

第二节 多目标线性规划的解

在多目标线性规划模型中，由于各目标的互相矛盾，一般很难找到一个能使所有目标均达到最优的可行解，为此，在这一节里我们引进多目标线性规划的最优解、有效解和满意解的概念，且讨论它们之间的关系。

对多目标线性规划模型

$$\max \ \mathbf{Z} = \mathbf{CX}$$

约束条件

$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{B}_0 \qquad (GP1)$$

$$\mathbf{X} \geqslant \theta$$

其中 $\mathbf{C} = (C_{ij})_{m \times n}$ $\mathbf{A} = (a_{ij})_{l \times n}$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix}$$

θ为n维零向量。

定义1： 设$\mathbf{R} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} \leqslant \mathbf{B}_0, \ \mathbf{X} \geqslant \theta\}$，则称R为多目标线性规划问题(GP1)的可行解集合(或称可行解空间)。

这个定义与线性规划可行解集合定义完全一样，因此R是一个凸集。

定义2： 设问题(GP1)的可行解集合非空，$\mathbf{X}^* \in \mathbf{R}$，且对任意的$\mathbf{X} \in \mathbf{R}$，有$\mathbf{CX}^* \geqslant \mathbf{CX}$，则称$\mathbf{X}^*$为问题(GP1)的绝对最优解，简称最优解。

最优解实际上是这样的一个可行解，它能使所有的目标同时

达到最优值。如图 1.1 所示，R为可行域，B 点即为最优解。在 B点处目标①与目标②同时达到最优值。

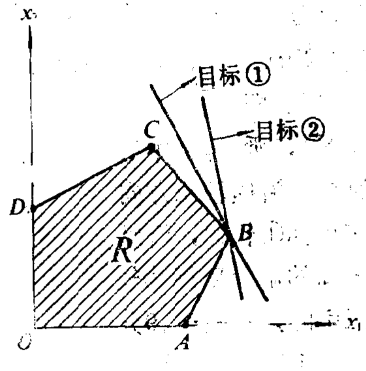


图 1.1

然而，在更多的情况下，由于众多的目标之间常常相互矛盾，因此问题(GP1)的绝对最优解往往并不存在。

图1.2所示，B点对目标②而言已达到最优，而对目标①来说却并不是最优的，目标①的最优点在C点；而 C 点对目标②来说并不是最优的。目标①与目标②是两个有冲突的目标，因此，不存在某个可行解，能使它们同时达到最优，即最优解不存在。

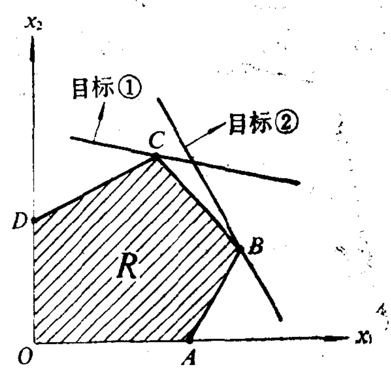


图 1.2

由于这种情况在我们的实际问题中大量存在，所以，我们有必要寻找解决的方法，一个最直观的方法就是引进下面有效解概念。

定义3：设问题(GP1)的可行解集 R 非空，$\overline{\mathbf{X}}\in\mathbf{R}$，若不存在 $\mathbf{X}\in R$，满足 $(\mathbf{CX})_i\geqslant(\mathbf{C}\overline{\mathbf{X}})_i$ $i=1, 2, \cdots, n$，且至少有一个 $j\in\{1, 2, \cdots, n\}$使 $(\mathbf{CX})_j>(\mathbf{C}\overline{\mathbf{X}})_j$，则称$\overline{\mathbf{X}}$为问题(GP1)的有效解(又称非劣解)。这里记号$(\mathbf{CX})_i$表示向量$\mathbf{CX}$的第$i$个分量。

根据这个定义可知，当$\overline{\mathbf{X}}$为有效解时，我们将找不到(即不存在)一个可行解，使它的所有目标值均不比 $\overline{\mathbf{X}}$ 的目标值差，而

其中至少有一个目标值优于$\overline{X}$。换句话说，当$\overline{X}$为有效解时，如果还想改进$\overline{X}$的某一个或几个目标，则其另外的那些目标中一定有一些要退化(即变差)。

如图1.3所示，其中有两个目标，沿横轴正方向的解使目标①较优，沿纵轴正方向的解使目标②较优。图中的点1、2、…、9分别表示9个可行解。显然解6、7、8、9不是有效解，因为我们可选择解2(或解1)与它们比较，可以发现解2的两个目标值均优于前几个解。解5是不是一个有效解呢？将解5与解1比较，可发现，解1与解5在第②目标上有相同的值，而在目标①上，解1优于解5，故用解1代替解5时，可在不破坏目标②的情况下改进目标①，所以解5也不是有效解。同理，解2也不是有效解。在图1.3中只有解1、解3和解4才是有效解。对它们中的任一个，确实不存在那样的解，它能在不破坏某一个目标的情况下，而改进另一个目标了。例如，我们想用解4来改进解1，目标①虽能改进，但目标②却退化了。

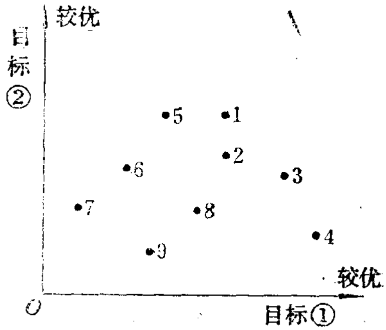


图 1.3

显然，最优解也是有效解。如图1.1中的B点。但有效解一般并不是最优解。如图1.2中线段BC上的任一点，均为有效解，而这个问题却根本没有最优解。

对多目标线性规划问题(GP1)的某个可行解$\widetilde{X}\in R$，如能使决策者感到满意，则称$\widetilde{X}$为问题(GP1)的**满意解**。

由于多目标问题各个目标之间的矛盾，使最优解一般并不存在。所以解多目标问题主要是在一定的条件下寻找满意解。当然，若存在最优解时，最优解即是满意解，但当最优解不存在时，我

们一般是在有效解中去寻找满意解的。

[例1.4] 用图解法求出[例1.1]中所得模型的有效解。

[解] [例1.1]的基本模型是

$$\min\ z_1 = 2x_1 + x_2, \qquad \text{目标①}$$

$$\max\ z_2 = x_1 + x_2。 \qquad \text{目标②}$$

约束条件

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 200 \\ x_1 + x_2 &\geqslant 100 \\ x_1 \qquad &\geqslant 50 \\ x_1、x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

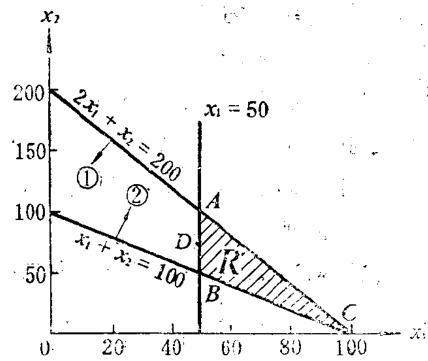


图 1.4

从图 1.4 可见：A 点目标②最优，B 点目标①最优，此问题无最优解，而线段 AB 上的点均为此问题的有效解。这是因为对线段 AB 上的任意一点 D，在可行域R中，已找不到这样的点，可使其目标①与目标②的值都不次于D 点所对应的值，且其中至少有一个目标值优于D点的对应值。对D点来说，如要改进目标①，D 点应向目标①较优的方向(即向下)移动，而这样，必然造成目标②的退化。同理，如想改进目标②，D点则应向上移动，这将退化目标①。至于 R 内其它的点，均不可能是有效解，这点留给读者自己去思考，或参考习题1.4的提示。在实际问题中，我们可以根据一定的条件在线段AB上找到某个解，作为满意解。如果认为目标①(花较少的钱)更重要，则可取 B 点为满意解。如果认为目标②(采购较多的原料)重要，则可取A点为满意解。如果我们想取一