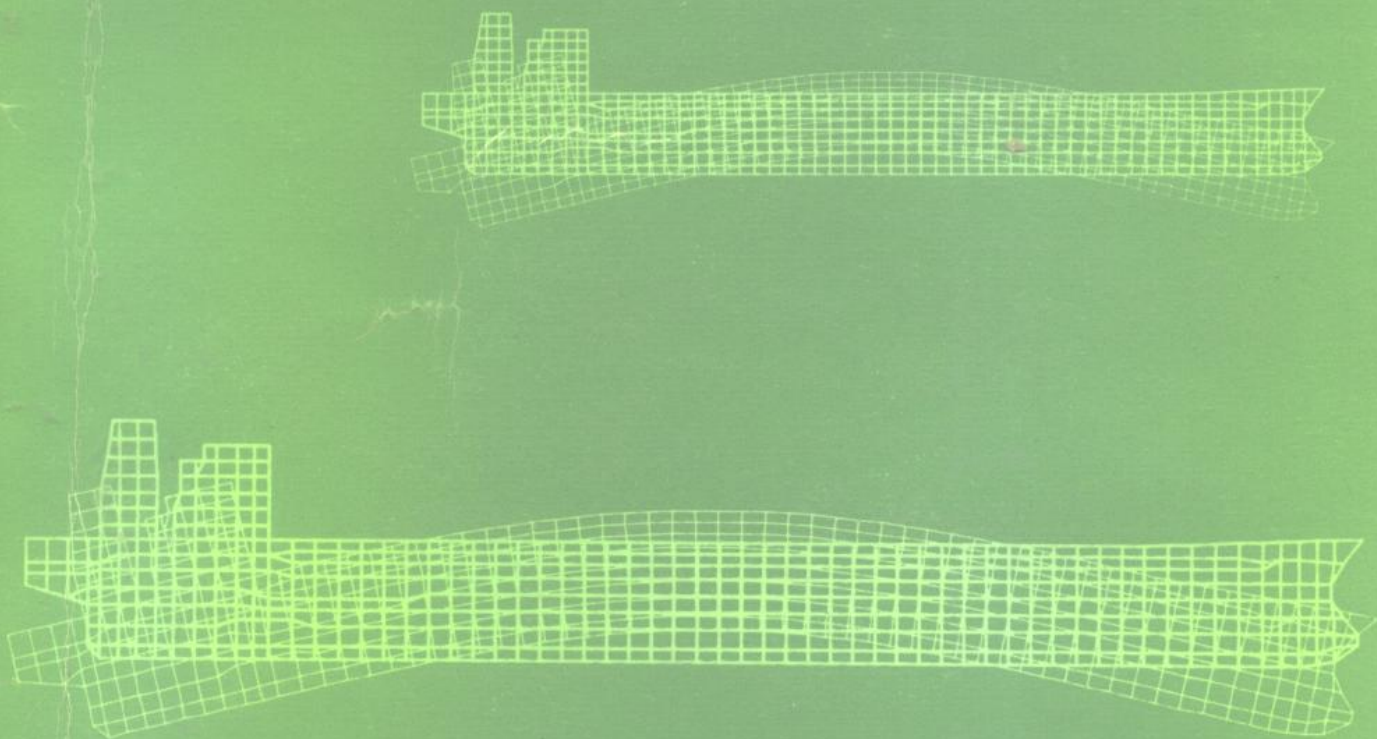


船舶计算结构力学

张圣坤 韩继文 汪庠宝 编著



上海交通大学出版社

380035

船舶计算结构力学

张圣坤
韩继文 编 著
汪庠宝

上海交通大学出版社

自白七

(沪)新登字 205 号

内 容 提 要

本书分两篇,共十一章。在结构分析篇中本书以内在联系的观点介绍了船舶结构力学中的有限元法、加权残数法、边界元法和有限差能量法等数值方法。着重讨论了现代有限元方法的理论背景和在非线性、动力问题中的发展以及随机有限元概念。在结构综合篇中,本书以综合的观点介绍了结构优化设计、计算机辅助设计和船体结构模型化研究等内容。书末附有主要参考文献。

本书较系统、完整地介绍了船舶计算结构力学这一领域的基础和研究成果,可作为船舶及有关专业研究生教材和教学参考书。也可供造船、航空、航天、机械和土建等工程领域的广大工程技术人员和科技工作者学习参考。

船 舶 计 算 结 构 力 学

出版:上海交通大学出版社

(上海市华山路1954号 邮政编码:200030)

发行:新华书店上海发行所	印刷:常熟市印刷二厂
开本:787×1092(毫米) 1/16	印张:15.75 字数:390000
版次:1994年12月 第1版	印次:1995年1月 第1次
印数:1—550	科目:332—285

ISBN 7-313-01371-X/U-041

定 价: 9.20元

前 言

在过去的早期发展阶段甚至不被承认为固体力学一个分支的计算结构力学,近年来已经越来越为力学工作者和工程技术人员所接受,成为力学的一个重要分支,并且形成了横贯许多学科的兴盛局面。大量的人力和经费继续投入到计算结构力学的研究中,开创了一个发展的新阶段。但是由于计算结构力学学科的迅速发展,所研究的内容又是如此包罗万象,因此至今未能作出确切的定义和给出研究的范围。1976年在全美第二届计算结构分析和设计会议上,著名教授加拉格尔(R. H. Gallagher)的主旨报告中提出了计算机化了的结构分析和设计(Gomputerized Structural Mechanics)概念。但很明显,这样的“定义”并不完全和确切。由于计算机的发展和广泛应用,已经使传统结构力学的范围有了很大的开拓,也可以说在某些方面有了突破性的进展和变化。我们很清楚地看到计算机技术对结构理论发展的重大影响:差分方程的公式形成有了很大进展,有限元方法的兴盛和无法估量的潜在能力,加权残数法和积分方程方法(Integral Equation Method)的兴起等。这些都表明了形成公式系统的方法论观点有了重大改变,研究的重点已从应用微分方程或传统的变分原理越来越多地趋向于用加权残值概念来构造数值近似解,寻求以统一的计算观点(途径)来概括各种不同的计算方法。也展示了现在更多地注意到用边界积分的近似方法去作数值解的概念。在这种公式系统中位移的描述仅仅包括那些边界上物理点的位移状态,试探函数的选择要满足结构内部应力和位移条件。

除了结构力学近似解法的革命性发展外,许多研究领域等待人们去再发现,不断涌现出许多新的研究课题,诸如计算力学中的数值方法(插值、大型线性代数方程、特征值方程、非线性方程和数值积分等技术的高度精化和理论研究),离散化过程中最佳网络布置和自修正技巧,人机交流、计算机图像处理、前后处理器和人工智能的开发,大型、复杂实际结构问题的模型化,结构的综合和优化设计(数学规划方法、准则法和重分析技巧等)、随机有限元和非线性力学方法的研究,计算机辅助设计,程序设计技术和泛用结构分析程序的开发,计算机硬件发展的影响和软件固化及多介质耦合问题(土固,流固,气固,磁固等)等等。事实上,上面例举的每一方面都是一个专门的研究领域。与此同时,计算结构力学的教学(课程和体系)也成为众所关注的一个问题。教学的改进需要来自结构分析计算和综合设计的实践所带来的处境。应用数学、数值分析和计算机技术已经高度地相互渗透。高等院校为迎接技术发展的挑战,必须设置相应的计算力学课程。本教材就是这样背景下的一个尝试。

由于篇幅有限,要在一本教材内对计算结构力学如此丰富的内容作一一介绍是不现实的。何况计算结构力学的发展仍是方兴未艾,很难预计若干年后哪些方面会取得实质性的进展而成为计算结构力学的新分支。回顾和展望计算结构力学的发展,我们把本教材内容分成两篇:结构分析和结构综合。近代计算结构力学的数值分析方法是围绕着有限元方法的研究和应用而发展起来的,因而在结构分析篇中把重点放在在有限元方法的阐述上是十分自然的。但有别于其他众多的有限元教材和专著,本教材试以一定的篇幅、统一的观点来介绍各种数值方法(加权残数法,边界元法,差分法,能量差分法等)以及与有限元法的内在联系。因而除了介

绍必要的基本理论(插值、变分、等参元形态构造等)外,就不可能照顾到有限元法的一些一般基本方法描述。最后着重介绍了有限元方法的一些最新研究领域(如非线性分析和随机有限元方法),以及与之密切相关的数值计算方法。

在结构综合篇中,主要介绍了结构优化设计与计算机辅助设计(包括人工智能)等两部分内容。

在本教材的最后一章中,将介绍船舶结构分析模型化的研究。读者通过船舶结构力学和有限元结构分析等课程已经掌握了船体结构的力学模型建立和有限元离散化方法。一旦建立了船体结构力学模型,就可应用解析法和有限元法求解,这是工程实际中的应用问题。

如何充分体现和利用船体结构特点,作模型化研究以提高计算效率,始终是十分有意义的课题。本章中描述了船体总纵弯扭强度和局部强度计算模型化技巧。读者可从中得到有益的启发

本教材的主要对象是已经具有有限元方法初步知识的工科大学研究生和高年级本科生;同时也可作为广大工程技术人员和高等院校教师的参考书。由于编者水平所限,错误之处在所难免,恳望读者指正。

本书中第四、五、六章由韩继文同志编著,第七章由汪庠宝同志编著,其他章节由张圣坤同志编著。沐阳同志参加了第八章的部分编著工作,在此谨致谢意。

目 录

前言

第一篇 结构分析

第一章 插值理论

§ 1-1 插值理论概述	3
§ 1-2 插值函数的构成	4
§ 1-3 基底函数	5
§ 1-4 拉格朗日插值函数	7
§ 1-5 埃尔米特插值函数	8
§ 1-6 二元函数插值和分片插值	14

第二章 结构力学近似解的变分原理

§ 2-1 变分法概述	18
§ 2-2 有约束条件的变分问题,拉格朗日乘子	21
§ 2-3 虚功原理	22
§ 2-4 最小势能原理	25
§ 2-5 最小余能原理	26
§ 2-6 广义变分原理和混合变分原理	27
§ 2-7 变分原理的近似解法	29

第三章 加权残数法和边界元法

§ 3-1 加权残数法基础	34
§ 3-2 加权残数有限元方法	39
§ 3-3 逆问题方程表示	41
§ 3-4 边界单元法引言	42
§ 3-5 边界元法基础	43
§ 3-6 弹性力学问题的边界元法	47

第四章 有限元方法

§ 4-1 引言	51
§ 4-2 位移有限元法的公式系统	51
§ 4-3 不协调、混合和杂交有限元模型	70

第五章 等参有限元矩阵的公式系统和计算

§ 5-1 引言	79
§ 5-2 杆元刚度矩阵的等参推导	79
§ 5-3 连续体单元的公式系统	81
§ 5-4 结构单元的公式系统	94

第六章 非线性有限元分析

§ 6-1	结构非线性分析基本原理	114
§ 6-2	连续体力学的运动增量方程公式系统	117
§ 6-3	有限元非线性离散方程	126
§ 6-4	材料模型和本构关系的应用	134
§ 6-5	一些值得注意的问题	138
§ 6-6	非线性方程组的求解方法	142
第七章 有限元动力分析		
§ 7-1	引言	148
§ 7-2	直接积方法	148
§ 7-3	振型叠加法	157
§ 7-4	直接积分法的讨论	163
§ 7-5	动力分析的非线性方程解	169
§ 7-6	大型特征值问题的解法	171
第八章 随机有限元方法		
§ 8-1	随机有限元公式体系	180
§ 8-2	有限元—蒙特卡罗法	183
§ 8-3	点估计有限元法	185
§ 8-4	特征值问题的随机有限元解	189
第二篇 结构综合		
第九章 结构优化设计		
§ 9-1	结构优化设计的基本概念	195
§ 9-2	结构优化的准则法	199
§ 9-3	数学规划方法	204
§ 9-4	结构优化的非线性规划方法	210
第十章 计算机辅助设计		
§ 10-1	引言	219
§ 10-2	CAD 系统中的硬件系统	220
§ 10-3	CAD 的软件系统	221
§ 10-4	人工智能简介	223
§ 10-5	人工神经网络简介	227
第十一章 船舶结构分析模型化研究		
§ 11-1	引言	231
§ 11-2	船体弯扭总强度分析的精密梁模型	231
§ 11-3	船体局部强度直接法计算模型	239
主要参考文献		245

第一篇

结构分析

第一章 插值理论

插值理论和变分原理是近代力学数值方法的两大支柱。分片插值理论和各种力学变分原理的交贯融合, 繁生了一系列有限元数学模型(协调模型、平衡模型、杂交模型等), 促进了有限元和其他数值方法的发展。

本章将首先介绍插值的基本理论为学习后续章节作基础准备。

§ 1-1 插值理论概述

已知函数 $F(x)$, 如我们想以一函数 $f(x)$ 来逼近它, 取

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 A_0(x) + a_1 A_1(x) + \cdots + a_n A_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i A_i(x) \end{aligned} \quad (1-1)$$

并在所研究的区间 $[a, b]$ 内, 指定有限个数目的点 $x_0, x_1, \cdots, x_m (x_j, j=0 \cdots m)$; 在这些点上, 使近似函数的值 $f(x_j)$ 与函数 $F(x)$ 在这些点上的值 $F(x_j)$ 一致。也即在点 x_j 上, 有

$$f(x_j) = a_0 A_0(x_j) + a_1 A_1(x_j) + \cdots + a_n A_n(x_j) \quad (1-2)$$

$$F(x_j) = a_0 A_0(x_j) + a_1 A_1(x_j) + \cdots + a_n A_n(x_j) \quad (1-3)$$

我们把这样一个过程称之为“插值”, $x_j, j=0 \cdots m$ 即为“插值节点”, 而 $f(x)$ 称为“插值函数”。

式(1-3)中 $A_i(x)$ 为一组取定的已知函数, 而 $a_i, i=0 \cdots n$ 为一组待定参数。由于大部分情况下 $F(x)$ 是给定的已知函数, 因而它在插值节点上的值是可行的, 这样待定参数 a_i 就很容易被确定。我们以下面一个简单例子来加以说明:

在区间 $0 \leq x \leq \pi$ 中, 定义有函数

$$F(x) = \sin x$$

我们要用函数 $f(x)$ 来逼近它, 取 $f(x)$ 为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

为了唯一地确定 $f(x)$ 的三个待定系数, 必须使这两个函数在三个插值点上的值相吻合。如取 $x_0 = 0; x_1 = \pi/2, x_2 = \pi$, 则有:

$$f(x_0) = f(0) = a_0 = F(x_0) = \sin 0 = 0,$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_0 + \frac{\pi}{2} a_1 + \frac{\pi^2}{4} a_2 = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$f(x_2) = f(\pi) = a_0 + \pi a_1 + \pi^2 a_2 = F(\pi) = \sin \pi = 0$$

由此得

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 4a_0 + 2a_1\pi + a_2\pi^2 = 1 \\ a_0 + \pi a_1 + \pi^2 a_2 = 0 \end{cases}$$
$$a_0 = 0; a_1 = 4/\pi; a_2 = -4/\pi^2$$

最后得

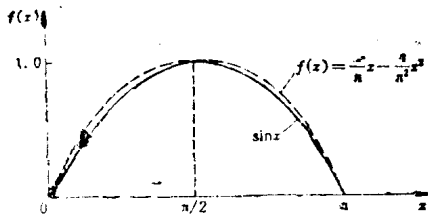


图 1-1 用 $f(x) = \frac{4}{n}x - \frac{4}{n^2}x^2$ 来逼近 $\sin x$

$$f(x) = \frac{4}{n}x - \frac{4}{n^2}x^2$$

图 1-1 表示了通过插值法用二次多项式来逼近正弦曲线的示意。但当 $F(x)$ 是未知函数时(有限元法中单元的位移函数正是这种情况), 显然函数在插值点 x_j 上的值是不知道的, 此时就无法像上面所举的例子那样直接来求得参数 $a_i, i = 0 \cdots n$; 为求得这些参数就得通过变分法等方法来加以确定。

§ 1-2 插值函数的构成

首先讨论(1-1)式。该多项式共有 $(n+1)$ 项, 也就是说共有 $(n+1)$ 个待定参数 $a_i, i = 0 \cdots n$ 。为了唯一地决定这 $n+1$ 个参数, 必须取 $n+1$ 个插值节点。这样就能建立 $n+1$ 个方程

$$\begin{bmatrix} A_0(x_0) & A_1(x_0) & \cdots & A_n(x_0) \\ A_0(x_1) & A_1(x_1) & & A_n(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ A_0(x_n) & A_1(x_n) & & A_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_n) \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

简写成

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1-5)$$

而上式有唯一解的条件是矩阵 \mathbf{A} 的行列式 D 不等于零。由线性代数方程求解可知, (1-5) 式的解为

$$a_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 0 \cdots n \quad (1-6)$$

其中 D_i 为矩阵 \mathbf{A} 中的第 i 列用右端项矢列 \mathbf{F} 置换后的行列式, 例如:

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} A_0(x_0) & A_1(x_0) & F(x_0) & \cdots & A_n(x_0) \\ A_0(x_1) & A_1(x_1) & F(x_1) & & A_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_0(x_n) & A_1(x_n) & F(x_n) & & A_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

因此插值函数(1-1)式就可表示成为:

$$f(x) = \frac{D_0}{D} A_0(x) + \frac{D_1}{D} A_1(x) + \cdots + \frac{D_n}{D} A_n(x) \quad (1-8)$$

但在实际应用中我们还可以表示成另一种形式。为此, 将行列式 D_i 按 i 列的元素展开。例如对 D_1 就有

$$\begin{aligned} D_1 &= F(x_0)D_{10} + F(x_1)D_{11} + \cdots + F(x_n)D_{1n} \\ &= \sum_{j=0}^n F(x_j)D_{1j} \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中 D_{1j} 为对应的余子式。上式可写成普遍的形式

$$D_i = \sum_{j=0}^n F(x_j)D_{ij} \quad (1-10)$$

这样由上式与(1-6)式, 参数 a_i 可表示为

$$a_i = \frac{\sum_{j=0}^n F(x_j) D_{ij}}{D} \quad (1-11)$$

于是插值函数 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) = \frac{\sum_{j=0}^n F(x_j) D_{0j}}{D} A_0(x) + \frac{\sum_{j=0}^n F(x_j) D_{1j}}{D} A_1(x) + \dots + \frac{\sum_{j=0}^n F(x_j) D_{nj}}{D} A_n(x) \quad (1-12)$$

将上式中含有同样 $F(x_j)$ 的项归并起来, 就得到

$$f(x) = F(x_0)\varphi_0(x) + F(x_1)\varphi_1(x) + \dots + F(x_n)\varphi_n(x) \quad (1-13)$$

其中, 函数 $\varphi_i(x)$ 由函数 $A_j(x)$, $j = 0 \dots n$ 线性组合而成。根据插值函数与原函数在插值节点的值相等, 则

$$\begin{aligned} f(x_j) &= F(x_0)\varphi_0(x_j) + F(x_1)\varphi_1(x_j) + \dots + F(x_n)\varphi_n(x_j) \\ &= F(x_j) \end{aligned} \quad (1-14)$$

由上式不难看出, 函数 $\varphi_i(x)$ 必须满足

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j = 0 \dots n \quad (1-15)$$

综上所述我们可以看到, 同样一个插值函数可表示为两种形式。第一种形式如(1-8)式所示, 它的基底函数为 $A_i(x)$, $i = 0 \dots n$, 其广义坐标(即待定参数)为 a_i , $i = 0 \dots n$; 而第二种形式的基底函数为 $\varphi_j(x)$, $j = 0 \dots n$, 相应的广义坐标为 $F(x_j)$, $j = 0 \dots n$ 。插值函数的两种表示形式, 大大方便了计算中应用, 例如在有限元方法中就可根据需要择取合适的插值函数形式。如在平面应力和平面应变问题中, 单元的位移场是通过两个位移函数来确定的:

$$u(x, y) = \sum u_i \varphi_i(x, y) \quad (1-16)$$

$$v(x, y) = \sum v_i \psi_i(x, y)$$

式中的 $\varphi_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$ 为基底函数, u_i, v_i 分别为位移函数在插值节点(通常就取为单元的节点)上的值, 也就是相应的广义坐标。

众所周知, 对平面单元我们还可以把位移函数表示成

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (1-17)$$

而由(1-16)和(1-17)式所得到的平面单元是完全相同的。在这里(1-16)式所对应的是(1-13)式的插值形式; (1-17)式所对应的是(1-8)式。因此这两种表面上看来迥然不同的处理方法, 其实质是完全一致的。

§ 1-3 基底函数

从上一节的讨论中看到, 当选取不同的基底函数时, 插值函数就有不同的形式; 而且选取

基底函数似乎是任意的。但是实际上基底函数的选取并不是任意的。在讨论(1-5)式时，已经指出，要使该方程有唯一确定解的条件是A矩阵行列式不为零。如果基底函数选取不适当，就可能导致 $D=0$ ，以致插值不能实现。为此就必须对所取的基底函数加以限制：

(1) 首先，这一组基底函数不能是线性相关的。但这仅仅是必要条件，而不是充分条件。

(2) 要求基底函数在各插值节点上的值也是相互线性无关的。我们可以举一简例来加以说明，如取 $1, \sin x$ 为基底函数，显然，这两个函数是线性独立的。但若取 $x_1, x_2 = \pi - x_1$ 两点作为插值节点，则行列式

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \sin x_1 \\ 1 & \sin x_2 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & \sin x_1 \\ 1 & \sin(\pi - x_1) \end{vmatrix} = 0$$

也就是说这会导至 $D=0$

如何保证行列式 D 不等于零呢？经过深入研究发现所取的基函数只要符合下列两条准则，就能确保行列式值不等于零。

(1) 基底函数 $A_0(x), A_1(x) \cdots A_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 为 $n+1$ 次可微；

(2) 在区间 $[a, b]$ ，下面所示的 $n+1$ 行列式都不应该等于零，这 $n+1$ 个行列式为：

$$W(A_0, A_1 \cdots A_k) = \det \begin{vmatrix} A_0(x) & A_1(x) & \cdots & A_k(x) \\ A_0^{(1)}(x) & A_1^{(1)}(x) & \cdots & A_k^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0^{(k)}(x) & A_1^{(k)}(x) & \cdots & A_k^{(k)}(x) \end{vmatrix} \quad (1-18)$$

其中 $k=0, 1 \cdots n$ 。

上标 (k) 代表微分的次数。根据这两条标准我们再回过头来看前面所举的例子。在区间 $[x_1, x_2]$ 内，基底函数为 $A_0(x) = 1, A_1(x) = \sin x$ 。

显然，所取的基函数 $A_0(x)$ 和 $A_1(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 内是二次可微的，因而第一条准则是满足的。

现在再来看第二条准则，在区间 $[x_1, x_2]$ 中

$$W[A_0] = |A_0(x)| = 1 \neq 0,$$

$$W[A_0, A_1] = \det \begin{vmatrix} A_0(x) & A_1(x) \\ A_0^{(1)}(x) & A_1^{(1)}(x) \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = \cos x$$

看来似乎 $\cos x$ 能满足要求。但实际上由于 x_1 和 x_2 的取值，总会使 $[x_1, x_2]$ 区间内存在使 $\cos x$ 为零的点。如当 $x_1 = 0$ 时 $x_2 = \pi$ ； $x_1 = \infty$ 时 $x_2 = -\infty$ ； $x_1 = -\infty$ 时 $x_2 = \infty$ 。这样在区间 $[x_1, x_2]$ 内总存在 $x = m\pi/2$ 的点($m = \pm 1, \pm 3 \cdots \pm$ 奇数)使 $W(A_0, A_1)$ 为零。由此可见这两个函数不能取为插值的基底函数。

再来检验一个例子。如取 $1, x^2$ 为基底函数，取 $x_1 = 1, x_2 = -1$ 作为插值节点，我们根据两条准则来考察它们是否能作为基底函数？在区间 $[1, -1]$ 中

$$W[A_0] = \det |1| = 1 \neq 0$$

$$W[A_0, A_1] = \det \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x - x^2$$

显见，当 $x=0$ 时， $W(A_0, A_1) = 0$ ，且 $x=0$ 是在 $[1, -1]$ 区间之内。故该两函数同样不能作为基底函数。

§ 1-4 拉格朗日插值函数

如果把(1-1)式所表示的插值函数中的基底函数取为 $A_0(x) = 1, A_1(x) = x, A_2(x) = x^2 \dots A_n(x) = x^n$ 。显然这组函数在任何区间内都是线性无关的。因为这组基底函数在任意区间 $[a, b]$ 内其组合

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1-19)$$

只有当所有系数 $a_0, a_1 \dots a_n$ 全为零时,才等于零。因而(1-19)式这样的线性组合不可能有 $n+1$ 个不同的根,这样 D 必然不会等于零,因此 $1, x, x^2, x^3 \dots x^n$ 这个序列可用来作为基底函数系。相应于方程(1-5)中的矩阵 A 呈下列形式:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

它的行列式为

$$D = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad (1-21)$$

称之为范得蒙达行列式。

由此可见,只要在取插值节点 $x_i (i = 0, 1 \dots n)$ 时,不取 $x_i = x_j (i \neq j)$,则上述行列式值就不可能等于零。这样我们就可以在指定区间内任意选一组 $F(x_j)$,把插值函数 $f(x)$ 唯一地确定下来。

为了确定 $f(x)$ 函数中的待定系数 $a_i (i = 0, 1 \dots n)$,最直观的方法是将 A 矩阵求逆。经整理归并后得到如(1-8)或(1-12)式形式的插值函数。但当矩阵阶数较高时,要用符号 $x_0, x_1 \dots x_n$ 等来写出逆矩阵 $(A)^{-1}$ 的表达式是相当麻烦、甚至是不现实的。因此,我们不用矩阵求逆的方法而寻求更为方便的表示形式。

在前面的讨论中已经知道(1-13)式中的 $\varphi_i(x), i = 0, 1 \dots n$ 为函数 $A_j(x), j = 0, 1 \dots n$ 的线性组合。因此 $\varphi_i(x)$ 是一个多项式。而且该函数必须满足(1-15)式所给定的条件。这样我们就可以根据这一条件,寻求一个多项式 $\varphi(x)$,使它在 $x_0, x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n$ 各个插值点上等于零,而在节点 x_i 上其值等于1。显然地,具有如下形式的多项式是能满足此要求的:

$$\varphi_i(x) = c(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \quad (1-22)$$

根据条件

$$\varphi_i(x_i) = 1$$

我们可得

$$c = 1/(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) \quad (1-23)$$

把上面结果回代至(1-22)式,最后可得:

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (1-24)$$

$i = 0 \dots n$

这样所得的插值函数称为拉格朗日内插多项式,通常以一个专用符号 $L_n(x)$ 来表示,并可表示成

$$L_n(x) = F(x_0)\varphi_0(x) + F(x_1)\varphi_1(x) + \cdots + F(x_n)\varphi_n(x) \quad (1-25)$$

下图形象地表示了当 n 分别等于2, 3, 4, 6时 $L_n(x)$ 中的 $\varphi_i(x)$ 形态。

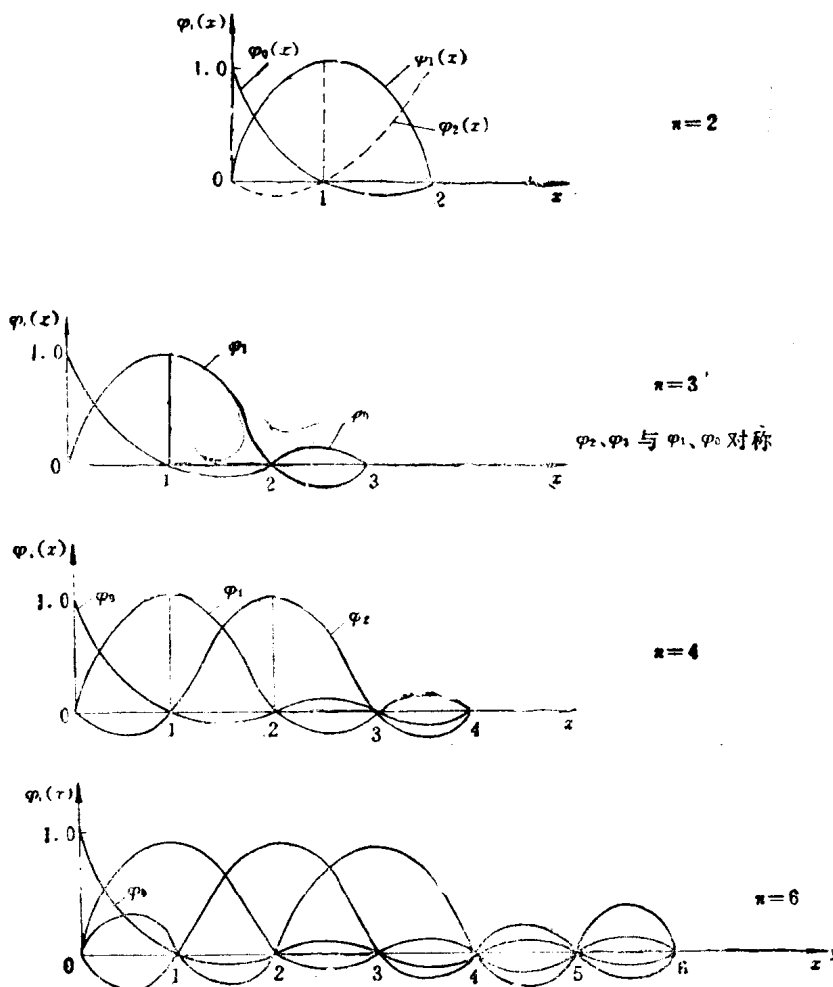


图1-2 $n=2, 3, 4, 6$ 时拉格多项式中 φ_i 的形态

§ 1-5 埃尔米特插值函数

有的情况下,不仅仅要求在插值节点上插值函数的值和原函数的值相同,并且要求这两个函数的直至某一阶的导数值都相一致。这种情况在固体和结构力学中是经常会遇到的,因为这种情况下函数的各阶导数都对应着特定的物理量。埃尔米特插值函数就有这种性能,因而也更具有普遍的意义。用数学公式描述时可表示为:

取函数组 $A_0(x), A_1(x) \cdots A_n(x)$ 作为基底函数,要求在区间 $[a, b]$ 中构成一插值函数,首先它是基底函数的线性组合

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i A_i(x) \quad (1-26)$$

并且满足

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \alpha_0, f^{(1)}(x_0) = \alpha_0^1, \dots, f^{(k_0-1)}(x_0) = \alpha_0^{k_0-1} \\ f(x_1) &= \alpha_1, f^{(1)}(x_1) = \alpha_1^1, \dots, f^{(k_1-1)}(x_1) = \alpha_1^{k_1-1} \\ &\vdots \\ f(x_n) &= \alpha_n, f^{(1)}(x_n) = \alpha_n^1, \dots, f^{(k_n-1)}(x_n) = \alpha_n^{k_n-1} \end{aligned} \quad (1-27)$$

其中 α_i^j 是给定的不同常数, $x_i, i=0, 1, \dots, n$ 是在区间 $[a, b]$ 中的插值节点坐标, 且当 $i \neq j$ 时, $x_i \neq x_j$ 。(1-27) 式是给插值函数 $f(x)$ 附加的约束, 它共有 $k_0 + k_1 + \dots + k_n$ 个。而式(1-26)中有 $m+1$ 个待定参数, 为了使问题有唯一解, 则必须有

$$m+1 = k_0 + k_1 + \dots + k_n \quad (1-28)$$

并且矩阵 A 的行列式值不能等于零, 即

$$\det \begin{vmatrix} A_0(x_0) & A_1(x_0) & \dots & A_m^{(k_0)}(x_0) \\ A_0^{(1)}(x_0) & A_1^{(1)}(x_0) & \dots & A_m^{(1)}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_0^{(k_0-1)}(x_0) & A_1^{(k_0-1)}(x_0) & \dots & A_m^{(k_0-1)}(x_0) \\ A_0^{(k_0)}(x_1) & A_1^{(k_0)}(x_1) & \dots & A_m^{(k_0)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_0^{(k_n-1)}(x_n) & A_1^{(k_n-1)}(x_n) & \dots & A_m^{(k_n-1)}(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1-29)$$

由于选取基底函数有一定任意性, 因而一般性地讨论就比较困难。下面我们仅讨论 $f(x)$ 为代数多项式的情况, 也即取基底函数为

$$A_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (1-30)$$

由 (1-29) 式可看到, 如果想通过对矩阵 A 求逆来确定待定系数 a_i , 从而求得插值函数 $f(x)$ 将是很困难的。为此我们不得不寻求其他的求解途径。

首先假设满足式 (1-27) 的多项式存在, 用 $H_m(x)$ 来表示, 该多项式的阶数不超过 m 。与此同时, 我们建立拉格朗日内插多项式 $L_n(x)$, 使它在插值节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的值为 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 。这两个多项式的差为 $H_m(x) - L_n(x)$, 显见这也是一个多项式, 其阶数也不超过 m (一般 $m > n$)。而且该差式多项式在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上其值为零。

$$H_m(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) \quad (1-31)$$

上式中

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (1-32)$$

而 $H_{m-n-1}(x)$ 有待于作进一步讨论。

改写(1-31)式

$$H_m(x) = L_n(x) + \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}(x) \quad (1-33)$$

可知, 函数 $H_m(x)$ 在节点 x_i 上的值为 α_i , 于是(1-27)式中第一列 $n+1$ 个条件得到了满足。因而下一步就是适当选择 $H_{m-n-1}(x)$ 使(1-27)式中其他条件得到满足。

对(1-33)式两边微分后得

$$H_m^{(1)}(x) = L_n^{(1)}(x) + \omega_{n+1}^{(1)}(x) H_{m-n-1}(x) + \omega_{n+1}(x) H_{m-n-1}^{(1)}(x) \quad (1-34)$$

把各个插值节点的坐标代入:

$$H_m^{(1)}(x_i) = L_n^{(1)}(x_i) + \omega_{n+1}^{(1)}(x_i) H_{m-n-1}(x_i) \quad (1-35)$$

因为 $\omega_{n+1}(x_i) = 0$ (见1-32式); $\omega_{n+1}^{(1)}(x_i) \neq 0$ 。

由(1-27)式可知, $H_m^{(2)}(x_i) = \alpha_i^2$;

由此求得 $H_{m-n-1}(x_i)$ 值。

对(1-34)式再次微分, 得

$$H_m^{(2)}(x) = L_n^{(2)}(x) + \omega_{n+1}^{(2)}(x)H_{m-n-1}(x) + 2\omega_{n+1}^{(1)}(x_i)H_{m-n-1}^{(1)}(x) + \omega_{n+1}(x)H_{m-n-1}^{(2)}(x) \quad (1-36)$$

令 $x = x_i$, 则有

$$H_m^{(2)}(x_i) = L_n^{(2)}(x_i) + \omega_{n+1}^{(2)}(x_i)H_{m-n-1}(x_i) + 2\omega_{n+1}^{(1)}(x_i)H_{m-n-1}^{(1)}(x_i) \quad (1-37)$$

由于 $H_m^{(2)}(x_i) = \alpha_i^2$, 这是已知条件, 由此可求得 $H_{m-n-1}^{(1)}(x_i)$ 值。不断重复上述运算过程, 求 $H_m(x)$ 的问题, 归结为求 $H_{m-n-1}(x)$; 而 $H_{m-n-1}(x)$ 应满足下列条件

$$\begin{aligned} H_{m-n-1}(x_0) &= \beta_0, \quad H_{m-n-1}^{(1)}(x_0) = \beta_0^1 \dots\dots \\ H_{m-n-1}^{(k_0-2)}(x_0) &= \beta_0^{k_0-2}; \\ H_{m-n-1}(x_1) &= \beta_1, \quad H_{m-n-1}^{(1)}(x_1) = \beta_1^1 \dots\dots \\ H_{m-n-1}^{(k_1-2)}(x_1) &= \beta_1^{k_1-2}; \\ &\vdots \\ H_{m-n-1}(x_n) &= \beta_n, \quad H_{m-n-1}^{(1)}(x_n) = \beta_n^1 \dots\dots \\ H_{m-n-1}^{(k_n-2)}(x_n) &= \beta_n^{k_n-2}. \end{aligned} \quad (1-38)$$

上式中 β_i 值都是可计算出来的值。

而且从(1-35), (1-36)式可推论出, 在节点 x_i 上的 $H_{m-n-1}(x_i)$ 的最高阶导数的系数都是 $\omega_n^{(1)}(x_i)$ 。

最后可得到 $H_m(x)$, 它是 m 阶的代数多项式。

例1-1 函数 $F(x)$ 及其导数在点 0, 1, 2 上的值列于下表:

x_i	$F(x_i) = \alpha_i$	$F^{(1)}(x_i) = \alpha_i^1$	$F^{(2)}(x_i) = \alpha_i^2$
$i=0$ 0	1	3	10
$i=1$ 1	3	8	
$i=2$ 2	155	527	1634

试求该函数的埃尔米特插值多项式 $H_m(x)$, 且 $m = 7$ 。

解: 根据(1-33)可知, 应先求得相应的拉格朗日插值函数

$L_n(x)$, 这里 $n = 2$ 。由式(1-24)及(1-25)可得

$$L_n(x) = 1 \frac{(x-1)(x-2)}{2} + 3 \frac{x(x-2)}{-1} + 155 \frac{x(x-1)}{2} = 75x^2 - 73x + 1$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad H_7(x) &= L_2(x) + x(x-1)(x-2)H_{m-n-1}(x) \\ &= 75x^2 - 73x + 1 + x(x-1)(x-2)H_4(x) \end{aligned}$$

微分上式得

$$H_7^{(1)}(x) = 150x - 73 + (3x^2 - 6x + 2)H_4(x) + (x^3 - 3x^2 + 2x)H_4^{(1)}(x)$$

将插值节点坐标和相应的值代入, 得

$$H_7^{(1)}(0) = 3 = -73 + 2H_4(0)$$

得 $H_4(0) = 38$