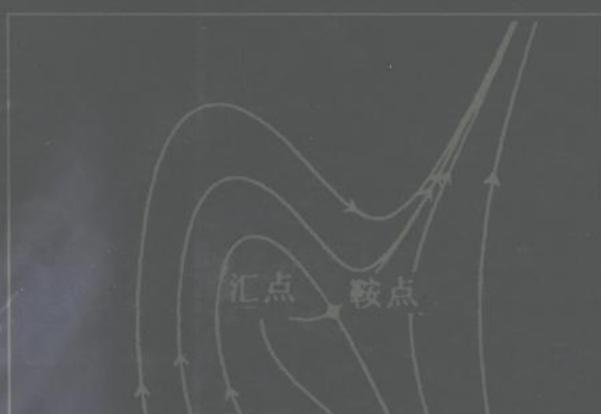
上海研究生教育用书

# 微分方程和动力系统

顾圣士 编




上海交通大学出版社

本教材得到上海市研究生教育专项经费资助

# 微分方程和动力系统

顾圣士 编





上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书是关于微分方程和动力系统的导论性专题著作. 内容包括微分方程解的存在唯一性定理;解对初值和参数的连续依赖性和可微性定理;动力系统的基本概念、线性系统及其矩阵指数;非线性系统局部和整体理论、稳定性和分叉理论及其分析方法.

本书适用于高等工科院校理工科研究生、数学系、物理系、力学系、计算机系等高年级学生及有关科研工作者使用.

**图书在版编目(CIP)数据**


微分方程和动力系统/顾圣士编. —上海:上海交通大学出版社,2000

ISBN 7-313-02357-X

Ⅰ. 微… Ⅱ. 顾… Ⅲ. ①微分方程-概论②动力系统(数学)-概论 Ⅳ. 0175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 56680 号

**微分方程和动力系统**

顾圣士 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市印刷二厂印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×1092mm 1/16 印张 15.75 字数:386 千字

2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

印数:1-500

ISBN 7-313-02357-X/O·114 定价:26.00 元

---

# 序　言

20世纪60年代以来，动力系统理论日益完善，它在科学和工程中的应用越来广泛．自20世纪70年代动力系统中的浑沌现象发现以来，突变、浑沌、分叉、分形、图斑等非线性科学成为各国科学研究的中心问题之一．为适应科学发展的需要，满足理工科研究生和有关科研工作者的需要，迎接新世纪的到来，特编写这本教材．它是为在物理、生物、工程、经济等方面以动力系统作为模型研究而设计的．本书研究的中心问题是非线性常微分方程的解的轨道在非线性坐标变换下的不变性，我们感兴趣的是几何或拓扑上的轨道的性质，而不是它的精确表达式．尽管关心的是几何或拓扑性态，但分析的方法仍然起着至关重要的作用．

本书共分5章．第1章是微分方程的理论基础．主要研究初值问题解的存在唯一性，解对初值和参数的连续依赖性定理，解的最大存在区间和由微分方程所定义的流或动力系统的基本概念．

第2章论述的线性系统是研究非线性系统的第一步，我们将对系统的平衡点，特别是平面线性系统的平衡点进行分类，计算常系数微分方程组的矩阵指数解，研究收缩和扩张的线性方程解的一些性质，最后给出了线性映射的性质和Perron-Frobenius定理．

第3章研究非线性系统的平衡点附近解的定性性质．我们将介绍Hartman-Grobman定理、稳定流形定理和中心流形定理．对平面解析系统的非双曲平衡点给出了某些结果，并介绍了梯度系统和Hamilton系统．

第4章是非线性系统整体理论．我们对非线性系统重新定义时间尺度，使系统在整个实轴上有定义，而其性质与原系统一样．关于平面系统的理论比较完备．Poincaré-Bendixson定理给出了平面系统任意$\omega$-极限集或是平衡点，或是极限环，或是分界线环的并．要给出平面系统极限环数目的某些结果是一个困难的问题，至今还没有完全解决．最后，基于Poincaré-Bendixson定理和投影几何的技术，对平面系统构造整体相图．整体相图决定了非线性系统的解的定性性质，这些性质和用计算机画出的单条轨线的性质结合在一起，就完全解决了非线性系统的问题．

第5章是利用分叉理论研究非线性系统的解在系统的参数变化时是如何变化的．如果一个系统和所有与它接近的系统的定性性质保持相同，这样的系统称为结构稳定的．Peixoto定理完全刻画了在紧的2-维流形上的结构稳定的向量场的特征，并建立了它们通有的性质．平面系统的分叉分成4类：鞍-结分叉、Hopf分叉、分界线环分叉和半稳定极限环分叉．对于高维系统，即使是3-维，还没有分类．

我们研究了单参数族和双参数族系统的所有可能的分叉，最后给出了一个综合性的例子.

读者需具有几何、数学分析、线性代数和常微分方程的基础知识.编者感谢上海市学位办研究生教育专项基金的支持，感谢韩茂安教授在百忙之中审阅了本书的大部分章节，感谢上海交通大学和上海交通大学出版社的支持和帮助，没有他们的支持，本书是不能完成的.鉴于编者水平有限，书中难免有错误和不足之处，恳切地希望读者批评指正.

**编　者**

1999年12月

# 目　　录

# 第 1 章　基本概念和基本定理

本章是微分方程的理论基石. 主要研究非线性微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

解的存在唯一性定理,其中 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n$,$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}^n$,$\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集. 我们要证明:当 $\boldsymbol{f}$ 满足一定的条件时,非线性系统(1)存在经过 $\boldsymbol{E}$ 中的每一个点 $\boldsymbol{X}_0 \in \boldsymbol{E}$,有定义在一个最大存在区间 $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$ 上的唯一解;解对初值和参数的连续依赖性定理;解的最大存在区间和由微分方程所定义的流或动力系统的基本概念.

## §1.1　基本概念和定义

在开始讨论非线性微分方程组的基本定理之前,我们先给出一些基本概念和定义. 我们在本书中只考虑自治系统

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}),$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$不显含 $t$. 而下述系统

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{X}), \tag{2}$$

称为非自治系统,其中 $\boldsymbol{f}$ 依赖于自变量 $t$. 但是,非自治系统可以通过令

$$x_{n+1} = t,$$

再加上一个方程式

$$\dot{x}_{n+1} = 1,$$

这样,在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$空间中就变成了自治系统. 维数增加了,当然问题的难度也就增加了.

注意到微分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}),$$

与积分方程

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}(0) + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}s \tag{3}$$

是等价的,因而只要 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$连续,微分方程(1) 的解就存在,但这不能保证解的唯一性.

**例 1**　底部有洞的圆柱形的水桶(如图 1-1),放满水后,水开始往下流. 我们设水高为 $h(t)$,洞的截面积为 $a$,圆柱形的截面积为 $A$,水往下流的速度为 $v(t)$,则在洞口流出的水的体积等于在圆柱形水桶中减少的体积

$$av(t) = Ah'(t). \tag{4}$$

此外,如果我们假定能量守衡,则当水从圆柱形水桶流出小量时,在它的顶部失去的势能等于水流出洞口时的动能. 若 $\rho$ 是水的密度,则水的质量是$(\Delta h)A\rho$,并且

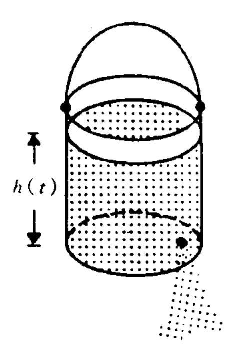


图 1-1　有洞的圆柱形水桶

$$[(\Delta h)A\rho]gh = \left(\frac{1}{2}\right)[(\Delta h)A\rho]v^2,$$

因而

$$v^2 = 2gh, \tag{5}$$

结合式(4)和式(5),得

$$(h'(t))^2 = 2g\left(\frac{a}{A}\right)^2 h(t),$$

或

$$h' = -c\sqrt{h},\ 其中\ c = \sqrt{2g}\left(\frac{a}{A}\right). \tag{6}$$

在圆柱形水桶中的水平面近似地遵循方程式(6),这与物理上的 Torricell 定律是一致的.

我们将方程式(6)转化为

$$x' = -c\sqrt{x} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

其中 $x=0$ 对应于水从桶中流完,$x=1$ 对应于满桶水.

用分离变量法

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = -c\int \mathrm{d}t,$$

加上初始条件 $x(0)=1$(满桶水),它的解为

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{c^2}{4}(t-t_e)^2 & 0 \leqslant t \leqslant t_e, \\ 0 & t > t_e, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $t_e = 2/c$,是水从满到流空所需的时间. 这个解对满桶水,即 $x(0)=1$ 作为初始条件是唯一确定的. 非唯一性出现在流空,即 $x(t_e)=0$ 作为初始条件,如图 1-2 所示,黑线表示相应于满桶水作为初始条件的解,这是唯一的. 而流空即 $x(t_e)=0$ 作为初始条件的解,是将黑线(在其左边)平行移动的那些曲线,且在 $t$ 轴上达到 $t_e$ 这点. 这不是唯一的.

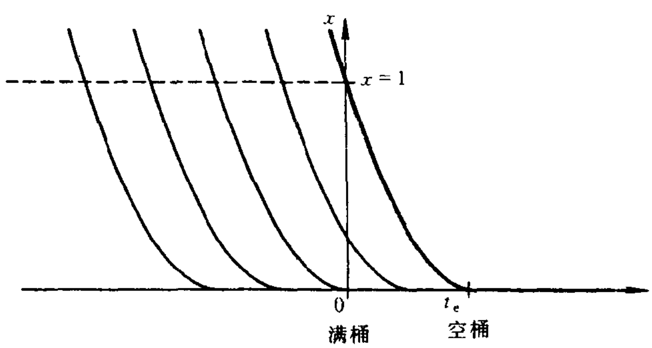



图 1-2 $x' = -c\sqrt{x}$ 的图像

在我们开始证明非线性系统(1)的解的存在唯一性基本定理之前,让我们引进关于函数 $\boldsymbol{f}$ 的导数 $\boldsymbol{Df}$ 的概念和记号.

**定义 1** 函数 $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 在点 $\boldsymbol{X}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ 称为可微的,如果有一个线性变换 $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X}_0) \in L(\boldsymbol{R}^n)$,满足

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-Df(x_0)h|}{|h|}=0,$$

线性变换 $Df(x_0)$ 称为函数 $f$ 在点 $X_0$ 的导数. 如果 $f$ 在某集合 $E$ 的每点处都可微,则称 $f$ 在 $E$ 上可微.

下面的定理给出了用坐标计算导数的方法.

**定理 1** 若 $f: R^n \to R^n$ 在点 $X_0$ 可微,则所有的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(i,j=1,\ldots,n)$ 在 $X_0$ 存在,并且对所有的 $X\in R^n$,有

$$Df(X_0)X=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0)x_j.$$

这样,如果 $f$ 是可微的,导数 $Df$ 是 $n\times n$ 的 Jacobi 矩阵

$$Df=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right].$$

**例2** 求出函数

$$f(X)=\begin{bmatrix} x_1-x_2^2 \\ -x_2+x_1x_2\end{bmatrix}$$

的导数并计算它在点 $X_0=(1,-1)^{\mathrm{T}}$ 的值.

我们首先计算偏导数的 Jacobi 矩阵

$$Df=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2x_2\\ x_2 & -1+x_1\end{bmatrix},$$

于是

$$Df(1,-1)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

在本书的大多数定理中,我们假定函数 $f(X)$ 是连续可微的. 也就是说,导数 $Df$ 作为映射 $Df: R^n\to L(R^n)$ 来考虑,在某个开子集 $E\subset R^n$ 上是连续函数. 线性空间 $R^n$ 和 $L(R^n)$ 是分别用 Euclid 范数 $|\ |$ 和算子范数 $\|\ \|$ 赋范的.

**定义 2** 假定 $V_1$ 和 $V_2$ 是两个分别具有范数 $\|\ \|_1$ 和 $\|\ \|_2$ 的赋范线性空间,称

$$F: V_1\to V_2$$

在点 $X_0\in V_1$ 是连续的,如果对任意的 $\varepsilon>0$,都有 $\delta>0$,使得只要 $\|X-X_0\|_1<\delta$,就有

$$\|F(X)-F(X_0)\|_2<\varepsilon,$$

$F$ 称为在集合 $E\subset V_1$ 上是连续的,如果它在每一点 $X\in E$. 上是连续的. 如果 $F$ 在 $E\subset V_1$ 上连续,我们记 $F\in C(E)$,或 $C^0(E)$.

**定义 3** 假定在 $f: E\to R^n$ 在 $E$ 上是可微的,如果导数 $Df: E\to L(R^n)$ 在 $E$ 上是连续的,则称 $f$ 在 $E$ 上为 $C^1(E)$ 的函数,记为 $f\in C^1(E)$.

下面的定理给出了确定函数 $f$ 是否属于 $C^1(E)$ 的简单的方法.

**定理 2** 假定 $E$ 是 $R^n$ 中的开子集,而 $f: E\to R^n$,当且仅当偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(i,j=1,\ldots,n)$ 存

在且在 $\boldsymbol{E}$ 上连续，则 $f\in C^1(\boldsymbol{E})$.

**附注** 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开子集 $\boldsymbol{E}$，用同样的方法定义函数 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}^n$ 的高阶导数 $\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)$. 可以证明 $\boldsymbol{f}\in C^k(\boldsymbol{E})$，当且仅当偏导数

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}$$

$(i,j_1,\ldots j_k=1,\ldots,n)$ 存在且在 $\boldsymbol{E}$ 上连续. 此外，$\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0):\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}^n$ 且对 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$，我们有

$$\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\sum_{j_1,j_2=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}}x_{j_1}y_{j_2}.$$

对 $\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0):(\boldsymbol{E}\times\cdots\times\boldsymbol{E})\to\boldsymbol{R}^n$ 有类似的公式.

函数 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}^n$ 称为在开子集 $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{R}^n$ 中是解析的，如果它的每一个分量 $f_j(\boldsymbol{X})$ $(j=1,\ldots,n)$ 在 $\boldsymbol{E}$ 中解析. 也就是说，对 $j=1,\ldots,n$，$f_j(\boldsymbol{X})$ 在 $\boldsymbol{E}$ 中每一点的某个邻域中有收敛的 Taylor 级数.

## 习题 1

1. (1) 计算下列函数的导数：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}x_1+x_1x_2^2\\-x_2+x_2^2+x_1^2\end{bmatrix};\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}x_1+x_1x_2^2+x_1x_3^2\\-x_1+x_2-x_2x_3+x_1x_2x_3\\x_2+x_3-x_1^2\end{bmatrix}.$$

(2) 找出上述函数的零点，即使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)=0$ 的 $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{R}^n$，并计算在这些点的 $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X})$ 的值.

(3) 对第 1 题中(1)的第一个函数 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$，计算 $\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)(x,y)$，其中 $\boldsymbol{X}_0=(0,1)$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的零点.

2. 找出最大的开子集 $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{R}^2$，使得

(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\dfrac{-x_1}{|\boldsymbol{X}|^3}\\\dfrac{-x_2}{|\boldsymbol{X}|^3}\end{bmatrix}$ 是连续可导的.

(2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{X}|+\dfrac{1}{|x_1-1|}\\\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2+2}\end{bmatrix}$ 是连续可导的.

3. 证明初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=|x|^{1/2},\\x(0)=0,\end{cases}$$

经过点 $(0,0)$ 有 2 个不同的解. 在 $(t,x)$ 平面上画出这些解.

4. 证明初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=x^3,\\x(0)=2,\end{cases}$$

在区间 $(-\infty,b)$，$b\in\mathbf{R}$ 存在解. 在 $(t,x)$ 平面上画出这解，并研究 $x(t)$ 当 $t\to b^-$ 时的性态.

5. 证明初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{1}{2x},\\x(1)=1,\end{cases}$$

在区间$(0,\infty)$上存在解 $x(t)$，$x(t)$是确定的且在$[0,\infty)$上是连续的.

6. 证明函数 $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{R}^2\to L(\boldsymbol{R}^2)$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix},$$

对所有的 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^2$ 是连续的.

## §1.2 存在唯一性定理

在这一节中，我们将对自治系统

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}), \tag{1}$$

在 $\boldsymbol{f}$ 满足一定的条件下，用 Picard 逐次逼近法建立解的存在唯一性基本定理. 比较现代的方法是用压缩映象原理来证明.

**定义 1** 假定 $\boldsymbol{E}$ 是$\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集，函数 $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}^n$ 称为在开子集$\boldsymbol{E}$ 上满足 Lipschitz 条件，如果存在常数 $L$ 使得对所有的$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{E}$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})| \leqslant L|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|,$$

函数 $\boldsymbol{f}$ 称为在$\boldsymbol{E}$ 上满足局部 Lipschitz 条件，如果对每一点 $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{E}$，都有一个 $\boldsymbol{X}_0$ 的 ε-邻域，$\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)\subset\boldsymbol{E}$和常数$L_0$，使得对所有的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)$，有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})| \leqslant L_0|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|.$$

**引理** 设 $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集，$\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{R}^n$，如果 $\boldsymbol{f}\in C^1(\boldsymbol{E})$，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上是局部Lipschitz的.

**证明** 因为 $\boldsymbol{E}$ 是$\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集，任取一点 $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{E}$，都有 $\varepsilon>0$，使得$\overline{\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)}\subset\boldsymbol{E}$. 令

$$L = \max_{|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0|<\varepsilon} \|\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X})\|$$

是连续函数 $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X})$在紧集$|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0|\leqslant\varepsilon$ 的最大值. 对 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\varepsilon$，置 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}$，因为 $\boldsymbol{N}_\varepsilon$ 是凸集，故对 $0\leqslant s<1$，$\boldsymbol{X}+s\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{N}_\varepsilon$. 定义函数 $\boldsymbol{F}[0,1]\to\boldsymbol{R}^n$：

$$\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{u}),$$

则由链导法则

$$\boldsymbol{F}'(s) = \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},$$

因而

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}(1) - \boldsymbol{F}(0) = \int_0^1 \boldsymbol{F}'(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\mathrm{d}s,$$

故有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})| &\leqslant \int_0^1 |\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^1 \|\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{u})\|\,|\boldsymbol{u}|\mathrm{d}s \\ &\leqslant L|\boldsymbol{u}| = L|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}|.\end{aligned}$$

这就完成了证明.

注意到 $\boldsymbol{X}(t)$是初值问题

$$\begin{cases}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0\end{cases} \tag{2}$$

的解,当且仅当 $\boldsymbol{X}(t)$是积分方程

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}s$$

的解.

逐次逼近法是通过定义函数序列

$$\boldsymbol{u}_0(t) = \boldsymbol{X}_0$$

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s))\mathrm{d}s \tag{3}$$

$(k=0,1,2,\ldots,)$来逼近这个积分方程的解.

**定理** (存在唯一性基本定理).设 $\boldsymbol{E}$ 是包含$\boldsymbol{X}_0$ 的 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集,$\boldsymbol{f}\in C^1(\boldsymbol{E})$,则存在 $a>0$,使得初值问题

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}),$$

$$\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0,$$

在区间$[-a,a]$上有唯一解 $\boldsymbol{X}(t)$.

**证明** 因为$\boldsymbol{f}\in C^1(\boldsymbol{E})$,由引理知,存在一个 $\varepsilon$ 邻域$\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)\subset\boldsymbol{E}$ 和常数$L_0$,使得对所有的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in \boldsymbol{N}_0(\boldsymbol{X}_0)$,有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})| \leqslant L_0|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|.$$

设 $b=\varepsilon/2$,则连续函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$在紧集

$$\boldsymbol{N}_0 = \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^n \| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0| \leqslant b\}$$

上是有界的,设

$$M = \max_{X\in \boldsymbol{N}_0}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})|.$$

设 $\boldsymbol{u}_k(t)$是由式(3)所定义的逐次逼近系列,令 $a<\min(\frac{\varepsilon}{2M},\frac{1}{L_0})$使得在区间$[-a,a]$上 $\boldsymbol{u}_k(t)$有定义且连续,并满足

$$\max_{[-a,a]}|\boldsymbol{u}_k(t) - \boldsymbol{X}_0| \leqslant b. \tag{4}$$

那么,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(t))$在区间$[-a,a]$上有定义且连续,并且

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s))\mathrm{d}s,$$

在区间$[-a,a]$上有定义且连续,并满足

$$|\boldsymbol{u}_{k+1}(t) - \boldsymbol{X}_0| \leqslant \int_0^t |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s))|\mathrm{d}s \leqslant Ma,$$

对所有的 $t\in[-a,a]$都成立.因此由归纳法,对所有的 $t\in[-a,a]$,$\boldsymbol{u}_k(t)$有定义且连续,并满足式(4)$(k=1,2,3\cdots)$.

其次,因为对所有的 $t\in[-a,a]$,$k=1,2,3\cdots$,$\boldsymbol{u}_k(t)\in N_0$,由 $\boldsymbol{f}$ 对所有的$t\in[-a,a]$,满足 Lipschitz 条件

$$|\boldsymbol{u}_2(t) - \boldsymbol{u}_1(t)| \leqslant \int_0^t |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_1(s)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0(s))|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant L_0\int_0^t |\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_0(s)|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant L_0 a \max_{[-a,a]} |\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{X}_0|$$

$$\leqslant L_0 ab,$$

因此可假定

$$\max_{[-a,a]} |\boldsymbol{u}_j(t) - \boldsymbol{u}_{j-1}(t)| \leqslant (L_0 a)^{j-1} b, \tag{5}$$

而对所有的 $t \in [-a,a]$ 和某个 $j \geqslant 2$

$$|\boldsymbol{u}_{j+1}(t) - \boldsymbol{u}_j(t)| \leqslant \int_0^t |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_j(s)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j-1}(s))| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant L_0 \int_0^t |\boldsymbol{u}_j(s) - \boldsymbol{u}_{j-1}(s)| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant L_0 a \max_{[-a,a]} |\boldsymbol{u}_j(t) - \boldsymbol{u}_{j-1}(t)| \leqslant (L_0 a)^j b.$$

这样,由归纳法,式(5)对 $j = 2,3,\cdots$ 成立,置 $\alpha = L_0 a$ 则 $0 < \alpha < 1$,对 $t \in [-a,a]$ 和 $m > k > N$,我们有

$$|\boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_k(t)| \leqslant \sum_{j=k}^{m-1} |\boldsymbol{u}_{j+1}(t) - \boldsymbol{u}(t)|$$

$$\leqslant \sum_{j=N}^{\infty} |\boldsymbol{u}_{j+1}(t) - \boldsymbol{u}_j(t)|$$

$$\leqslant \sum_{j=N}^{\infty} \alpha^j b = \frac{\alpha^N}{1-\alpha} b.$$

最后一个式子当 $N \to \infty$ 时趋向于 0. 所以对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $N$,使得 $m, k \geqslant N$ 时,有

$$\| \boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{u}_k \| = \max_{[-a,a]} |\boldsymbol{u}_m(t) - \boldsymbol{u}_k(t)| < \varepsilon, \tag{6}$$

也就是 $\{\boldsymbol{u}_k\}$ 是在 $C([a,b])$ 上的连续函数的 Cauchy 序列. 由于 $\boldsymbol{u}_k(t)$ 当 $k \to \infty$ 时,对所有的 $t \in [-a,a]$ 一致收敛于连续函数 $\boldsymbol{u}(t)$,在方程式(3)两边取极限,对所有的 $t \in [-a,a]$,连续函数

$$\boldsymbol{u}(t) = \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{u}_k(t)$$

满足积分方程式

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{X}_0 + \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(s)) \mathrm{d}s. \tag{7}$$

这样,$\boldsymbol{u}(t)$ 就是初值问题(2)的解. 下面我们证明唯一性.

设 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是初值问题(2)在 $[-a,a]$ 上的 2 个解,则连续函数 $|\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)|$ 在一点 $t_1 \in [-a,a]$ 达到最大值. 因此

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \| = \max_{[-a,a]} |\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)| = \left| \int_0^{t_1} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(s)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}(s))) \mathrm{d}s \right|$$

$$\leqslant \int_0^{t_1} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(s)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}(s))| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant L_0 \int_0^{t_1} |\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{v}(s)| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant L_0 a \max_{[-a,a]} |\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)|$$

$$\leqslant L_0 a \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \|.$$

但 $L_0a<1$,因而最后一个不等式只有当 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|=0$ 才成立.这样在 $[-a,a]$ 上,$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}(t)$.我们已经证明了逐次逼近序列(3)一致收敛于初值问题(2)在区间 $[-a,a]$ 上的唯一解,其中 $a$ 是满足 $0<a<\min(\frac{b}{M},\frac{1}{L_0})$ 的任意一个数.

**附注** 用同样的方法可以证明初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}),\\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0,\end{cases}$$

在某个区间 $[t_0-a,t_0+a]$ 上有唯一解.

## 习题 2

1. 对初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2,\\ x(0)=1,\end{cases}$$

求出它的前 3 个逐次逼近序列 $\boldsymbol{u}_1(t)$,$\boldsymbol{u}_2(t)$ 和 $\boldsymbol{u}_3(t)$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,对初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX},\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0,\end{cases}$$

证明逐次逼近序列(3)收敛于它的解 $\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0$.

3. 如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},t)$ 对 $t$ 包含 $t=0$ 的某个区间中连续,对 $\boldsymbol{X}$ 在包含 $\boldsymbol{X}_0$ 的某个开集 $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{R}^n$ 上是连续可导的,对初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},t),\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0,\end{cases}$$

用逐次逼近法证明存在 $a>0$,使得在区间 $[-a,a]$ 上有唯一解 $\boldsymbol{X}(t)$.

提示:定义

$$\boldsymbol{u}_0(t)=\boldsymbol{X}_0,$$

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_0^t\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s),s)\mathrm{d}s.$$

用证明存在唯一性基本定理的方法,证明逐次逼近序列 $\boldsymbol{u}_k(t)$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{X}(t)$.

4. 如果矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[-a_0,a_0]$ 上连续,对初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi},\\ \boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I},\end{cases}$$

(其中 $\boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 单位阵)用逐次逼近法证明存在 $a>0$,使得在在区间 $[-a,a]$ 上有唯一的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

提示:定义

$$\boldsymbol{\Phi}_0(t)=\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{k+1}(t)=\boldsymbol{I}+\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\Phi}_k(s)\mathrm{d}s.$$

事实上,连续矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在紧集 $[-a_0,a_0]$ 对所有 $t$ 满足 $\|\boldsymbol{A}(t)\|\leqslant M_0$,以此来证明逐次逼近序列 $\boldsymbol{\Phi}_k(t)$ 在某个区间 $[-a,a]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{\Phi}(t)$,其中 $a<1/M_0$,$a\leqslant a_0$.

5. 设 $\boldsymbol{V}$ 是赋范线性空间,$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$,对所有的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$,满足

$$\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})\|\leqslant c\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|,$$

其中 $0<c<1$,则 $\boldsymbol{T}$ 称为压缩映像.

**定理** (压缩映像原理):设 $\boldsymbol{V}$ 是完备赋范线性空间,$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ 是压缩映像,则存在唯一的 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}$,使得 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$.

设 $f\in C^1(\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{E}$, 对 $\boldsymbol{I}=[-a,a]$ 和 $\boldsymbol{u}\in C(\boldsymbol{I})$, 令

$$T(\boldsymbol{u})(t)=\boldsymbol{X}_0+\int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(s))\mathrm{d}s.$$

定义 $C(\boldsymbol{I})$ 的一个闭子集 $\boldsymbol{V}$, 并用压缩映像原理, 若常数 $a$ 充分小, 证明积分方程(7)对所有的 $t\in[-a,a]$ 有唯一解 $\boldsymbol{u}(t)$.

提示: 因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上是局部 Lipschitz 的, $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{E}$, 故有正的常数 $\varepsilon$ 和 $L_0$, 使在 $\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)\subset E$ 上定义 2 的条件能满足. 令 $\boldsymbol{V}=\{\,\boldsymbol{u}\in C(\boldsymbol{I})\mid \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{X}_0\|\leqslant\varepsilon\}$, 则 $\boldsymbol{V}$ 是完备的, 因为它是 $C(\boldsymbol{I})$ 的闭子集. 证明:

(1) 对所有的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$

$$\|\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})\|\leqslant aL_0\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|.$$

(2) 对 $t\in[-a,a]$, $\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)$, 正的常数 $a$ 可以选得充分小.

6. 在存在唯一性基本定理的条件下, 如果 $\boldsymbol{X}(t)$ 是初值问题(2)在区间 $\boldsymbol{I}$ 上的解, 则二阶导数 $\ddot{\boldsymbol{X}}(t)$ 在 $\boldsymbol{I}$ 上连续.

7. 证明如果 $\boldsymbol{f}\in C^1(\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{E}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个紧的凸子集, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上满足 Lipschitz 条件.

8. 证明如果 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上满足 Lipschitz 条件, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上是一致连续的.

9. (1) 证明函数 $\boldsymbol{f}(x)=1/x$ 在 $\boldsymbol{E}=(0,1)$ 上是不一致连续的.

提示: 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 都有 $\delta>0$, 使得对所有的 $x,y\in\boldsymbol{E}$, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

则 $f$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上是一致连续的. 如果存在一个 $\varepsilon>0$, 使得对所有的 $\delta>0$, 存在 $x,y\in\boldsymbol{E}$, $|x-y|<\delta$, 而

$$|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon,$$

这样, $f$ 在 $\boldsymbol{E}$ 上是不一致连续的.

取 $\varepsilon=1$, 证明对所有的 $\delta>0$, $\delta<1$, $x=\delta/2$ 和 $y=\delta$, 此时, $x,y\in(0,1)$, $|x-y|<\delta$, 而

$$|f(x)-f(y)|>1.$$

(2) 证明 $f(x)=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不满足 Lipschitz 条件.

10. 证明如果 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 可导, 则存在 $\delta>0$ 和 $L_0>0$, 使得对所有的 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$, 都有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)|\leqslant L_0|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0|.$$

## §1.3 解对初始条件和参数的连续依赖性

在这一节中, 我们研究初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{Y}\end{cases}\tag{1}$$

的解对初始条件 $\boldsymbol{Y}$ 的连续依赖性. 如果在式(1)中函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ 依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}\in\boldsymbol{R}^m$, 即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu})$, 则方程的解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mu})$ 也连续依赖于参数 $\boldsymbol{\mu}$. 我们先引入一个引理.

**引理**(Gronwall 不等式) 假定 $g(t)$ 是连续的实值函数, 满足 $g(t)\geqslant0$ 且对所有的 $t\in[0,\alpha]$

$$g(t)\leqslant C+K\int_0^t g(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $C,K$ 是正的常数, 则对所有的 $t\in[0,\alpha]$, 有

$$g(t)\leqslant C\mathrm{e}^{Kt}.$$

**证明** 设 $G(t)=C+K\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$, $t\in[0,\alpha]$. 则对 $t\in[0,a]$, $G(t)\geqslant g(t)$ 且 $G(t)>0$. 由微积分基本定理, 知

$$G'(t)=Kg(t),$$

所以对 $t\in[0,\alpha]$

$$\frac{G'(t)}{G(t)}=\frac{Kg(t)}{G(t)}\leqslant\frac{KG(t)}{G(t)}=K,$$

因而

$$\ln G(t)\leqslant Kt+\ln G(0),$$
$$G(t)\leqslant G(0)\mathrm{e}^{Kt}=C\mathrm{e}^{kt},$$

由此对 $t\in[0,\alpha]$,有

$$g(t)\leqslant C\mathrm{e}^{Kt}.$$

**定理1**(对初始条件的连续依赖性) 设 $\boldsymbol{E}$ 是包含 $\boldsymbol{X}_0$ 的 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个开子集,$\boldsymbol{f}\in C^1(\boldsymbol{E})$,则存在 $a>0$ 和 $\delta>0$,使得对所有的 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$,初值问题

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{Y}\end{cases}$$

有唯一解 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Y})$,$\boldsymbol{u}\in C^1(\boldsymbol{G})$,$\boldsymbol{G}=[-a,a]\times\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$;此外,对每一个 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$,$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Y})$在 $t\in[-a,a]$是 $t$ 的二阶连续可微函数.

**证明** 因为$\boldsymbol{f}\in C^1(\boldsymbol{E})$,由1.2节中的引理有一个 $\varepsilon$ 邻域$\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)\subset\boldsymbol{E}$ 和常数$L_0>0$,使得对所有的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\varepsilon(\boldsymbol{X}_0)$,有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})|\leqslant L_0|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|.$$

正如基本存在定理证明的那样,令 $\boldsymbol{N}_0=\left\{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{R}^n\,\middle|\,|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0|\leqslant\varepsilon/2\right\}$,$M_0$ 是$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})|$在 $\boldsymbol{N}_0$ 上的最大值,$M_1$ 是$\|\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{X})\|$在 $\boldsymbol{N}_0$ 上的最大值.设 $\delta=\varepsilon/4$,对 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$定义逐次逼近系列

$$\boldsymbol{u}_0(t,\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y},$$
$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t,\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}+\int_0^t\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s,\boldsymbol{Y}))\mathrm{d}s. \tag{2}$$

假定 $\boldsymbol{u}_k(t,\boldsymbol{Y})$对所有的$(t,\boldsymbol{Y})\in G=[-a,a]\times\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$是确定的和连续的,且对所有的 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$

$$\|\boldsymbol{u}_k(t,\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{X}_0\|<\varepsilon/2, \tag{3}$$

其中$\|\ \|$表示对所有的 $t\in[-a,a]$的最大值.对 $k=0$,这显然是满足的.再假定对 $k$ 是满足的,则由式(2)所确定的逐次逼近系列 $\boldsymbol{u}_{k+1}(t,\boldsymbol{Y})$在 $\boldsymbol{G}$ 上连续.因为连续函数的连续函数是连续的,并且连续函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s,\boldsymbol{Y}))$的上述积分也是 $t$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的连续函数.且对 $t\in[-a,a]$和 $\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)\subset N_0$

$$\|\boldsymbol{u}_{k+1}(t,\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{Y}\|<\int_0^t|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_k(s,\boldsymbol{Y}))|\mathrm{d}s\leqslant M_0a.$$

这样,对 $t\in[-a,a]$,$\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{N}_\delta(\boldsymbol{X}_0)$,其中 $\delta=\varepsilon/4$,我们有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_{k+1}(t,\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{X}_0\|&\leqslant\|\boldsymbol{u}_{k+1}(t,\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{Y}\|+\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}_0\|\\&\leqslant M_0a+\varepsilon/4<\varepsilon/2,\end{aligned}$$

只要 $M_0a<\varepsilon/4$,即 $a<\varepsilon/(4M_0)$.这样,上述归纳法在 $a<\varepsilon/(4M_0)$的假定下对所有的 $k=1,2,3\cdots$,$(t,\boldsymbol{Y})\in\boldsymbol{G}$ 都成立.

下面我们证明逐次逼近系列 $\boldsymbol{u}_k(t,\boldsymbol{Y})$,当 $k\to\infty$时,对所有的$(t,\boldsymbol{Y})\in\boldsymbol{G}$ 一致收敛于连续函数 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{Y})$.正如基本存在定理证明的那样,对所有的$(t,\boldsymbol{Y})\in\boldsymbol{G}$