

邵士敏 主编
北京大学出版社

研究生入学考试 **数学** 模拟试题

研究生入学考试
数学

模拟试题

研究生入学考试 数学模拟试题

主 编 邵士敏

撰稿人 娄元仁 周建莹 文 丽

邵士敏 庄大蔚 张立昂

北 京 大 学 出 版 社

新登字(京)159号

图书在版编目(CIP)数据

研究生入学考试数学模拟试题/邵士敏主编. —北京: 北京大学出版社, 1993.9

ISBN 7-301-02319-7

I. 研…

II. 邵…

III. ① 数学-研究生-入学考试-试题 ② 研究生-数学-入学考试-试题

IV. O1-44

书 名: 研究生入学考试数学模拟试题

责任者: 邵士敏 主编

出版者地址: 北京大学校内 邮政编码: 10087

排印者: 北京大学印刷厂印刷

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

版本记录: 787×1092毫米 32开本 14印张 320千字

1993年10月第一版 1993年10月第一次印刷

印数: 0001—6,000册

定 价: 9.20元

前 言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习应考，我们按照国家教委制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，编写了这本书。

本书对 I 类至 V 类数学，每类选编了 8 套题，共 40 套模拟试题及解答。每套题中各部分所占比例及题型结构均按大纲的要求编排，题目内容基本上覆盖了大纲的要求。在每套题的解答中，对于填空题和选择题只给出了答案或简单的提示和解答，对计算题、应用题、证明题等则给出较详细的解答。

在编写过程中，参考了过去近几年的考题，并对各类试题进行了研究，使模拟试题更符合实战要求。此外，编写时，不仅注意选编一些基本题，也注意选一些较难的、有趣的题，以便培养考生的数学解题能力。只有提高了能力，才能顺利应考。书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，不另作说明。

参加本书编写的人员均为北京大学数学系的教授、副教授，他们是：娄元仁（第 I 类题）、周建莹（第 II 类题）、文丽、邵士敏（第 III 类题）、庄大蔚（第 IV 类题）、张立昂（第 V 类题）。

由于时间仓促，难免有疏误之处，望读者提出宝贵意见。

编 者

1993年6月于北京大学

目 录

数学 I 模拟试题

数学 I	第 1 套题	(3)
数学 I	第 2 套题	(7)
数学 I	第 3 套题	(11)
数学 I	第 4 套题	(15)
数学 I	第 5 套题	(19)
数学 I	第 6 套题	(23)
数学 I	第 7 套题	(27)
数学 I	第 8 套题	(31)

数学 I 模拟试题解答

数学 I	第 1 套题解答	(35)
数学 I	第 2 套题解答	(40)
数学 I	第 3 套题解答	(46)
数学 I	第 4 套题解答	(54)
数学 I	第 5 套题解答	(61)
数学 I	第 6 套题解答	(66)
数学 I	第 7 套题解答	(72)
数学 I	第 8 套题解答	(79)

数学Ⅱ 模拟试题

数学Ⅱ	第 1 套题	(88)
数学Ⅱ	第 2 套题	(92)
数学Ⅱ	第 3 套题	(96)
数学Ⅱ	第 4 套题	(100)
数学Ⅱ	第 5 套题	(104)
数学Ⅱ	第 6 套题	(108)
数学Ⅱ	第 7 套题	(113)
数学Ⅱ	第 8 套题	(117)

数学Ⅱ 模拟试题解答

数学Ⅱ	第 1 套题解答	(121)
数学Ⅱ	第 2 套题解答	(126)
数学Ⅱ	第 3 套题解答	(134)
数学Ⅱ	第 4 套题解答	(142)
数学Ⅱ	第 5 套题解答	(151)
数学Ⅱ	第 6 套题解答	(158)
数学Ⅱ	第 7 套题解答	(166)
数学Ⅱ	第 8 套题解答	(174)

数学Ⅲ 模拟试题

数学Ⅲ	第 1 套题	(182)
数学Ⅲ	第 2 套题	(185)
数学Ⅲ	第 3 套题	(188)
数学Ⅲ	第 4 套题	(191)

数学Ⅲ	第 5 套题	(194)
数学Ⅲ	第 6 套题	(198)
数学Ⅲ	第 7 套题	(202)
数学Ⅲ	第 8 套题	(205)

数学Ⅲ 模拟试题解答

数学Ⅲ	第 1 套题解答	(208)
数学Ⅲ	第 2 套题解答	(215)
数学Ⅲ	第 3 套题解答	(222)
数学Ⅲ	第 4 套题解答	(231)
数学Ⅲ	第 5 套题解答	(239)
数学Ⅲ	第 6 套题解答	(247)
数学Ⅲ	第 7 套题解答	(252)
数学Ⅲ	第 8 套题解答	(258)

数学Ⅳ 模拟试题

数学Ⅳ	第 1 套题	(265)
数学Ⅳ	第 2 套题	(269)
数学Ⅳ	第 3 套题	(273)
数学Ⅳ	第 4 套题	(277)
数学Ⅳ	第 5 套题	(281)
数学Ⅳ	第 6 套题	(285)
数学Ⅳ	第 7 套题	(289)
数学Ⅳ	第 8 套题	(293)

数学Ⅳ 模拟试题解答

数学Ⅳ	第 1 套题解答	(297)
-----	----------	-------

数学Ⅳ	第 2 套题解答		(303)
数学Ⅳ	第 3 套题解答		(308)
数学Ⅳ	第 4 套题解答		(315)
数学Ⅳ	第 5 套题解答		(321)
数学Ⅳ	第 6 套题解答		(329)
数学Ⅳ	第 7 套题解答		(335)
数学Ⅳ	第 8 套题解答		(343)

数学Ⅴ 模拟试题

数学Ⅴ	第 1 套题		(352)
数学Ⅴ	第 2 套题		(356)
数学Ⅴ	第 3 套题		(360)
数学Ⅴ	第 4 套题		(364)
数学Ⅴ	第 5 套题		(369)
数学Ⅴ	第 6 套题		(373)
数学Ⅴ	第 7 套题		(377)
数学Ⅴ	第 8 套题		(381)

数学Ⅴ 模拟试题解答

数学Ⅴ	第 1 套题解答		(385)
数学Ⅴ	第 2 套题解答		(392)
数学Ⅴ	第 3 套题解答		(399)
数学Ⅴ	第 4 套题解答		(404)
数学Ⅴ	第 5 套题解答		(412)
数学Ⅴ	第 6 套题解答		(418)
数学Ⅴ	第 7 套题解答		(425)
数学Ⅴ	第 8 套题解答		(432)

数学 I 模拟试题

适用的招生专业：力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术。

考试内容：高等数学、线性代数、概率论或复变函数，其中概率论与复变函数之间由考生自选一门应试。

高等数学包括：1. 函数、极限、连续；2. 一元函数的微分学；3. 一元函数的积分学；4. 向量代数和空间解析几何；5. 多元函数的微分学；6. 多元函数的积分学；7. 无穷级数；8. 常微分方程。

线性代数包括：1. 行列式；2. 矩阵；3. 向量；4. 线性方程组；5. 矩阵的特征值和特征向量；6. 二次型。

概率论包括：1. 随机事件和概率；2. 随机变量及其概率分布；3. 二维随机变量及其概率分布；4. 随机变量的数字特征；5. 大数定律和中心极限定理。

复变函数包括：1. 复数和复变函数；2. 复变函数的积分；3. 级数与留数；保角映射。

试卷结构：

(一) 内容比例

高等数学约68%；

线性代数约20%；

概率论或复变函数约12%。

(二) 题型比例

填空题与选择题约30%；

解答题（包括证明题）约70%。

数学 I 第 1 套题

一、填空题 (每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 则 $f(\cos x)$ 的定义域为

(2) 点 $(1, 0, 1)$ 到平面 $3x + 4y - 5z + 12 = 0$ 的距离为

(3) 设 $\varphi(x) = \int_0^{1-x^2} e^{-t^2} dt$, 则 $\varphi'(x) =$

(4)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) =$$

(5) 若 a, b, c 都是单位向量, 且 $a + b + c = 0$. 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a =$

二、选择题 (每小题 3 分, 满分 12 分)

(1) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$ 等于 ().

(A) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx;$ (B) $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx;$

(C) $\int_0^1 dy \int_1^y f(x, y) dx;$ (D) $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx.$

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 则 ().

- (A) $a = 1, b = 1$; (B) $a = 1, b = -1$;
(C) $a = -1, b = 1$; (D) $a = -1, b = -1$.

(3) 对任意实数 x , 有 ().

- (A) $e^{-x} \leq 1 - x$; (B) $e^{-x} \leq 1 + x$;
(C) $e^{-x} \geq 1 - x$; (D) $e^{-x} \geq 1 + x$.

(4) 零为矩阵 A 的特征值是 A 为不可逆的 ().

- (A) 充分条件; (B) 必要条件;
(C) 充要条件; (D) 非充分、非必要条件.

三、(每小题 5 分, 共 15 分)

(1) 设 $z = \log_{xy} \sqrt{1 + x^2}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2) 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2 + x} - x)$.

(3) 计算 $\int \sec^3 x dx$.

四、(8 分) 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ 的通解.

五、(8 分) 计算 $\iint_{S^+} x dy dz + y^2 dz dx + z^3 dx dy$, 其中 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ 外侧.

六、(8 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^a \frac{1}{n}$ 的收敛性, 其中 a 为实数.

七、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($b > a$). 证明 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 的充要条件是 $f(x) \equiv 0$.

八、(7分) 求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

的解。

九、(7分) 已知向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s (s \geq 2)$ 线性无关。令 $\beta_1 = a_1 + a_2, \beta_2 = a_2 + a_3, \dots, \beta_{s-1} = a_{s-1} + a_s, \beta_s = a_s + a_1$ 。试讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性。

概率论

十、填空题 (每小题3分, 共6分)

(1) 甲箱中有2个白球1个红球, 乙箱中有1个白球2个红球。现由甲箱随机抽取一球放入乙箱内, 再从乙箱内随机抽取一球, 则最后取得白球的概率是_____。

(2) 设随机变量 ξ 的分布密度函数为

$$\varphi(x) = Ae^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

则 $A =$ _____。

十一、(6分) 设随机变量 ξ_1 与 ξ_2 独立, 且概率分布密度函数分别为 $p_1(x_1)$ 和 $p_2(x_2)$ 。证明随机变量 $\eta = \xi_1 + \xi_2$ 的概率分布密度函数为

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x_1)p_2(x-x_1)dx_1.$$

复变函数

十、填空题 (每小题3分, 共6分)

(1) 设函数 $f(z) = ay^3 + bx^2y + i(x^3 + cxy^2)$ 在全平面上解析. 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 则

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z(z+1)} dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

十一、(6分) 设分式线性映射 $W = f(z)$ 将 $|z| < 2$ 映射成右半平面 $\operatorname{Re} W > 0$, 且满足 $f(0) = 1$, $f'(0) > 0$, 试求该映射 $W = f(z)$.

数学 I 第 2 套题

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} - y = 0$ 确定, 则

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 设 S 为外侧球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 则

$$\iiint_S z dx dy + x dy dz + y dz dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 过点 $(1, 1, -1)$ 和两平面 $x + y - z = 0$, $x - y + z - 1 = 0$ 交线的平面方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 级数 $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$ 在区间 $\underline{\hspace{2cm}}$ 上收敛于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 A 是 3 阶方阵, $|A| = -3$, 则 $|A^2| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|3A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 12 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x}$ 等于 ().

(A) 1; (B) -1; (C) -2; (D) 2.

(2) 设 $y = f(x)$ 满足微分方程 $y'' - y' + 5y = 0$, 若 $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 ()

(A) 取极大值; (B) 取极小值;
(C) 附近单调增加; (D) 附近单调减小.

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上可导, x_1, x_2 是 (a, b) 内

两点且 $x_1 < x_2$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 ().

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;

(B) $f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b - x_1)$;

(C) $f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2 - a)$;

(D) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

(4) n 维向量组 $a_1, a_2, \dots, a_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充要条件是 ().

(A) 存在不全为 0 的 s 个数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s = 0;$$

(B) $a_1, a_2, \dots, a_s$ 中任两个向量都线性无关;

(C) $a_1, a_2, \dots, a_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示;

(D) $a_1, a_2, \dots, a_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

三、(9 分) 计算 $\int_0^\pi \cos mx \cos nx dx$, 其中 m, n 为整数.

四、(9 分) 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ 的通解.

五、(8 分) 求正常数 a 和 b , 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 4$$

成立.

六、(9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 $f(0) = 0, f(1) = 0.5, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. 证明在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得

$$|f'''(\xi)| \geq 12.$$

七、(9 分) 在变力 $F = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到以 $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$

为顶点的平面三角形上的一点 $M(\alpha, \beta, \gamma)$ 上, 问当 α, β, γ 取何值时, 力 F 所作的功 W 最大? 并求出 W 的最大值.

八、(8分) 假设矩阵 A 和 B 满足如下关系式

$$AB = A + 2B,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

求矩阵 B .

九、(9分) 对一切实数 λ , 讨论下方程组

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda \end{cases}$$

的可解性, 并求出所有解.

概率论

十、填空题 (每小题 3 分, 共 6 分)

(1) 已知随机变量 x 服从二项分布, 且 $E(x) = 1.6$, $D(x) = 1.28$, 则二项分布的参数 $n =$ _____, $p =$ _____.

(2) 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$,

$P(AC) = \frac{3}{16}$, 则事件 A, B, C 全不发生的概率为 _____.

十一、(6分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

求随机变量 $Z = 2X + Y$ 的概率密度函数.