邵士敏　主编
北京大学出版社

研究生入学考试
数学模拟试题

研究生入学考试
数学
模拟试题

研究生入学考试
数学模拟试题

主　编　邵士敏

撰稿人　娄元仁　周建莹　文　丽

邵士敏　庄大蔚　张立昂

北京大学出版社

新登字（京）159号

图书在版编目（CIP）数据

研究生入学考试数学模拟试题/邵士敏主编.—北京：北京大学出版社，1993.9

ISBN 7-301-02319-7

Ⅰ. 研…

Ⅱ. 邵…

Ⅲ. ①数学-研究生-入学考试-试题 ②研究生-数学-入学考试-试题

Ⅳ. O1-44

书　　名：**研究生入学考试数学模拟试题**

责 任 者：邵士敏　主编

出版者地址：北京大学校内　邮政编码：10087

排 印 者：北京大学印刷厂印刷

发 行 者：北京大学出版社

经 销 者：新华书店

版本记录：787×1092毫米　32开本　14印张　320千字

1993年10月第一版　1993年10月第一次印刷

印数：0001—6,000册

定　　价：9.20元

前　　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习应考，我们按照国家教委制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，编写了这本书。

本书对Ⅰ类至Ⅴ类数学，每类选编了8套题，共40套模拟试题及解答。每套题中各部分所占比例及题型结构均按大纲的要求编排，题目内容基本上覆盖了大纲的要求。在每套题的解答中，对于填空题和选择题只给出了答案或简单的提示和解答，对计算题、应用题、证明题等则给出较详细的解答。

在编写过程中，参考了过去近几年的考题，并对各类试题进行了研究，使模拟试题更符合实战要求。此外，编写时，不仅注意选编一些基本题，也注意选一些较难的、有趣的题，以便培养考生的数学解题能力。只有提高了能力，才能顺利应考。书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，不另作说明。

参加本书编写的人员均为北京大学数学系的教授、副教授，他们是：娄元仁（第Ⅰ类题）、周建莹（第Ⅱ类题）、文丽、邵士敏（第Ⅲ类题）、庄大蔚（第Ⅳ类题）、张立昂（第Ⅴ类题）。

由于时间仓促，难免有疏误之处，望读者提出宝贵意见。

编　者

1993年6月于北京大学

目　　录

数学Ⅰ　模拟试题

数学Ⅰ　模拟试题解答

数学Ⅱ　模拟试题

数学Ⅱ　模拟试题解答

数学Ⅲ模拟试题

数学Ⅲ　模拟试题解答

数学Ⅳ　模拟试题

数学Ⅳ　模拟试题解答

数学Ⅴ　模拟试题

数学Ⅴ　模拟试题解答

数学Ⅰ　模拟试题

适用的招生专业：力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术。

考试内容：高等数学、线性代数、概率论或复变函数，其中概率论与复变函数之间由考生自选一门应试。

高等数学包括：1．函数、极限、连续；2．一元函数的微分学；3．一元函数的积分学；4．向量代数和空间解析几何；5．多元函数的微分学；6．多元函数的积分学；7．无穷级数；8．常微分方程。

线性代数包括：1．行列式；2．矩阵；3．向量；4．线性方程组；5．矩阵的特征值和特征向量；6．二次型。

概率论包括：1．随机事件和概率；2．随机变量及其概率分布；3．二维随机变量及其概率分布；4．随机变量的数字特征；5．大数定律和中心极限定理。

复变函数包括：1．复数和复变函数；2．复变函数的积分；3．级数与留数；保角映射。

试卷结构：

（一）内容比例

高等数学约68％；

线性代数约20％；

概率论或复变函数约12％。

（二）题型比例

填空题与选择题约30%；

解答题（包括证明题）约70%。

数学Ⅰ　第1套题

一、填空题（每小题3分，满分15分）

（1）若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，则 $f(\cos x)$ 的定义域为____________________.

（2）点 $(1,0,1)$ 到平面 $3x+4y-5z+12=0$ 的距离为____________________.

（3）设 $\varphi(x)=\int_0^{1-x^2} e^{-t^2}dt$，则 $\varphi'(x)=$____________.

（4）

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n) = \underline{\qquad\qquad}.$$

（5）若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都是单位向量，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$. 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$__________________.

二、选择题（每小题3分，满分12分）

（1）设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy$ 等于（　　）.

（A）$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$；　（B）$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$；

（C）$\int_0^1 dy\int_1^y f(x,y)dx$；　（D）$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 ( )．

(A) $a=1$，$b=1$； (B) $a=1$，$b=-1$；

(C) $a=-1$，$b=1$； (D) $a=-1$，$b=-1$．

(3) 对任意实数 x，有 ( )

(A) $e^{-x}\leqslant 1-x$； (B) $e^{-x}\leqslant 1+x$；

(C) $e^{-x}\geqslant 1-x$； (D) $e^{-x}\geqslant 1+x$．

(4) 零为矩阵 A 的特征值是 A 为不可逆的 ( )．

(A) 充分条件； (B) 必要条件；

(C) 充要条件； (D) 非充分、非必要条件．

三、(每小题 5 分，共15分)

(1) 设 $z=\log_{xy}\sqrt{1+x^2}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$．

(3) 计算 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$．

四、(8 分) 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$ 的通解．

五、(8 分) 计算 $\iint\limits_{S^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 外侧．

六、(8 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^{\alpha}\dfrac{1}{n}$ 的收敛性，其中 α 为实数．

七、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(b>a)$．证明 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 的充要条件是 $f(x)\equiv 0$．

八、（7分）求方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

的解。

九、（7分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$线性无关。令 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,{}_s=\alpha_s+\alpha_1$。试讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性。

概率论

十、填空题（每小题3分，共6分）

（1）甲箱中有2个白球1个红球，乙箱中有1个白球2个红球。现由甲箱随机抽取一球放入乙箱内，再从乙箱内随机抽取一球，则最后取得白球的概率是________。

（2）设随机变量ξ的分布密度函数为

$$\varphi(x)=Ae^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

则$A=$______。

十一、（6分）设随机变量ξ_1与ξ_2独立，且概率分布密度函数分别为$p_1(x_1)$和$p_2(x_2)$。证明随机变量$\eta=\xi_1+\xi_2$的概率分布密度函数为

$$p(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_1(x_1)p_2(x-x_1)\mathrm{d}x_1.$$

复变函数

十、填空题（每小题3分，共6分）

(1) 设函数 $f(z)=ay^3+bx^2y+\mathrm{i}(x^3+cxy^2)$ 在全平面上解析。则 $a=$ ________，$b=$ ________，$c=$ ________。

(2) 设C为正向圆周$|z|=2$，则

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z-1}{z(z+1)}\mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}.$$

十一、（6 分）设分式线性映射 $W=f(z)$将$|z|<2$映射成右半平面 $\mathrm{Re}W>0$，且满足 $f(0)=1$，$f'(0)>0$，试求该映射 $W=f(z)$。

数学Ⅰ　第2套题

一、填空题（每小题3分，共15分）

（1）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}-y=0$ 确定，则

$\frac{dy}{dx}=$ ______。

（2）设 S 为外侧球面 $x^2+y^2+z^2=4$，则

$\iint\limits_S z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dz\,dx=$ ______。

（3）过点 $(1,1,-1)$ 和两平面 $x+y-z=0$，$x-y+z-1=0$ 交线的平面方程是______。

（4）级数 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$ 在区间______上收敛于______。

（5）设 A 是3阶方阵，$|A|=-3$，则 $|A^2|=$ ______，$|3A|=$ ______。

二、选择题（每小题3分，共12分）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$ 等于（　）。

（A）1；　（B）-1；　（C）-2；　（D）2。

（2）设 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y''-y'+5y=0$，若 $f(x_0)<0$，$f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0（　）

（A）取极大值；　（B）取极小值；

（C）附近单调增加；　（D）附近单调减小。

（3）若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，x_1、x_2 是 (a,b) 内

两点且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使（ ）。

（A） $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（B） $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$；

（C） $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$；

（D） $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$。

(4) n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充要条件是（ ）。

（A） 存在不全为 0 的 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0;$$

（B） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任两个向量都线性无关；

（C） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示；

（D） $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示。

三、（9 分） 计算 $\int_0^\pi \cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x$，其中 m、n 为整数。

四、（9 分） 求微分方程 $y''-4y'+4y=3\mathrm{e}^{2x}$ 的通解。

五、（8 分） 求正常数 a 和 b，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=4$$

成立。

六、（9 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=0.5$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$。证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$|f'''(\xi)|\geqslant 12.$$

七、（9 分） 在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到以 $A(1,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(0,0,3)$

为顶点的平面三角形上的一点 $M(\alpha,\beta,\gamma)$ 上，问当 α,β,γ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 最大？并求出 W 的最大值。

八、（8分）假设矩阵 A 和 B 满足如下关系式

$$AB = A + 2B,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

求矩阵 B。

九、（9分）对一切实数 λ，讨论下方程组

$$\begin{cases} (\lambda+1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + (\lambda+1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda \end{cases}$$

的可解性，并求出所有解。

概率论

十、填空题（每小题3分，共6分）

（1）已知随机变量 x 服从二项分布，且 $E(x)=1.6$，$D(x)=1.28$，则二项分布的参数 $n=$ ________，$p=$ ________。

（2）已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{3}{16}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为 ________。

十一、（6分）设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0, \end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数。