

陶庆生 编著

计算机代数及其应用

DAISHU
JIQIYINGYONG



浙江大学出版社

计算机代数及其应用

陶庆生 编著

浙江大学出版社

(浙)新登字 10 号

内 容 简 介

计算机代数是一门研究利用计算机进行符号计算或公式推导的新兴学科。本书介绍了计算机代数软件系统和应用的概况,以 REDUCE 语言为例叙述了计算机代数系统的基本结构和使用方法,从数学模型的自动建造和解析求解、数值算法的辅助构造和分析等方面重点阐述了计算机代数的应用方法和技巧,并给出了应用于数学、物理、力学、机械、土木等领域的 22 个 REDUCE 程序及其算例。

本书是作者多年来研究生教学和科研工作的结晶。

本书内容取材新颖、适应面宽,主要面向理工科研究生与高年级本科生,并可供广大科技工作者自学使用。

J5660/07

计算机代数及其应用

陶庆生 编 著

责任编辑 朱谨准

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社电脑室排版

浙江省煤田地质勘探公司制图印刷厂

浙江省新华书店发行

开本 850×1168 1/32 7 印张 字数 175 千字

1991 年 10 月第 1 版 1991 年 10 月第 1 次印刷

印数 0001—2000

ISBN 07—308—00856—8/O·109 定价:2.40 元

前 言

计算机代数是一门研究利用计算机进行符号代数计算的新兴学科,它与数值计算构成了科学计算的两大支柱。计算机代数系统的研究与开发已有近四十年的历史,MACSYMA、REDUCE、mu-MATH/Derive,SMP/Mathematica 等几个著名的计算机代数系统目前已在全世界流行,并在科学技术的许多领域中得到应用。但国内外有关计算机代数方面的教材尚很缺乏。

作者于 1985 年起开始在研究生课程中讲授计算机代数及其应用的内容,本书是五年多来课程讲义不断积累和更新的产物。此次编写拓宽了教材的适应面,主要面向理工科研究生与高年级本科生,并可供广大科技工作者自学使用。

全书共分五章。第一章介绍计算机代数的任务、系统、应用和研究等方面的概况;第二章介绍著名的计算机代数系统 REDUCE 语言的句法及其代数运算功能;第三章通过 REDUCE 在高等数学中的应用,介绍 REDUCE 语言的使用方法和技巧;第四章介绍计算机代数在自动建模和解析求解方面的应用;第五章介绍计算机代数在数值算法的符号处理上的应用。

后三章各节均给出 REDUCE 程序和算例,并阐述程序的基本原理,对程序逐段注释。注释时采用 REDUCE 语言中的注释符号%作为注释序号的引导符,使得含注释标记的程序依然可以正常使用。书中提供的程序均可在 IBM PC 微型计算机上运行,可直接用来进行科学和工程中某些实际问题的计算。若需机读程序或有关软件,请直接与作者本人联系。

后三章内容的涉及面较宽,其中包括高等数学、数值方法、弹性力学、分析力学、机器人学、控制理论、传热学、非线性振动、板壳理论、结构分析等方面的若干内容。但由于各节内容相互依赖性不强,使用时可酌情舍弃。

本书部分内容来自作者本人的研究结果。

作者在进行计算机代数及其应用的研究和撰写本书时,曾得到不少学长、同事和学生的帮助。在此表示深深的谢意!首先应该向美国斯坦福大学机械工程系 T. R. Kane 教授致谢,他是第一位向作者介绍计算机代数的“引路人”。本书的编写出版,曾得到浙江大学力学系丁浩江教授、谢贻权教授和钟秉章副教授的鼓励和推荐,在此表示衷心的感谢!作者在计算机代数的应用研究中,曾得到美国加州大学伯克利分校土木工程系 R. L. Taylor 教授、日本大学理工学院数学系小林英恒教授、浙江大学数学系郭竹瑞教授、浙江大学化工系胡上序教授、江西工业大学计算机系衷仁保教授的有关指教,并曾得到在浙江大学学习过的周明、常海、于政、丁毅、吴国庆、尹雪辉、蒋冬云、卓勇、蒋明晓等同志的合作,在此一一致谢。

书中错误和疏漏之处敬请读者批评指正。

作 者

1990 年 12 月于浙江大学

目 录

前 言

第一章 绪 论..... 1

习题 4

参考文献 4

第二章 REDUCE 语言简介..... 8

§ 2.1 引言..... 8

§ 2.2 句法元素 11

§ 2.3 表达式 12

§ 2.4 说明 16

§ 2.5 命令 21

§ 2.6 前缀算符 23

§ 2.7 表达式处理 28

§ 2.8 代换 35

§ 2.9 矩阵代数 38

§ 2.10 文件处理..... 39

习题..... 41

参考文献..... 43

第三章 REDUCE 应用指南 44

§ 3.1 微积分学 44

§ 3.2 拉普拉斯变换 49

§ 3.3 常微分方程 58

§ 3.4 偏微分方程 63

§ 3.5 正交多项式 68

§ 3.6 矩阵分析 74

§ 3.7 矢量分析 81

§ 3.8 小结 89

习题..... 90

参考文献	93
第四章 自动建模与解析求解	94
§ 4.1 弹性力学基本方程	94
§ 4.2 哈密顿正则运动方程	99
§ 4.3 机器人动力学方程	105
§ 4.4 线性控制系统分析	116
§ 4.5 传热学摄动求解	124
§ 4.6 范德波尔方程摄动解	131
§ 4.7 圆板的非线性弯曲	137
§ 4.8 小结	142
习题	143
参考文献	145
第五章 数值算法的符号处理	147
§ 5.1 埃尔米特插值	147
§ 5.2 帕第逼近	155
§ 5.3 数值积分	160
§ 5.4 有限差分	165
§ 5.5 常微分方程数值算法	171
§ 5.6 有限元显式刚度矩阵	181
§ 5.7 结构分析符号求解	191
习题	204
参考文献	206
附录 REDUCE 程序一览表	208
索引	209

第一章 绪 论

计算机代数是一门研究利用计算机进行符号代数计算的新兴学科。计算机代数系统正日趋完善,并在科学和技术的许多领域中得应用^{[1] - [8]}。

计算机代数(Computer Algebra)在文献上有时称为符号与代数计算(Symbolic and Algebraic Computation)或符号计算,日文中常称为“数式处理”,国内有时也称之为公式处理。

科学计算包括数值计算和符号计算两大内容。计算机代数的任务就是为在计算机上实现科技工作中符号处理过程的机械化和自动化提供一个有效的工具。

定量描述是现代科技的一个特点。定量描述的基础是数学,而数学中充满着符号代数运算,即使是数值计算中算法的构造与分析也不例外。科学理论的证明、公式推导和解析表达等,一般需要经过一个复杂的符号代数计算过程,这一过程往往是繁琐的、容易出错的、甚至是困难的。计算机在这一过程中提供帮助,无疑会促进科学技术的研究和发展,并给其它学科一个强大的推动。

随着电子计算机的诞生,借助于计算机进行符号代数运算的研究就已开始。六十年代出现了第一个通用的计算机代数系统 FORMAC,此后,REDUCE、MACSYMA、SCRATCHPAD、SAC、Mathematica 等大型通用系统相继问世,其中不少系统如今既能在大中型计算机上运行,也能在 IBM PC/XT 等微型计算机上运行。美国惠普(Hewlett—Packard)公司不久前还推出世界上第一台袖珍符号计算器 HP—28S。国内已先后引进了 MACSYMA、REDUCE、SAC、Derive 和 Mathematica 等计算机代数系统,并在计算机代数系统的研究与开发上做了一些工作,其中包括:中国科学院陈东岳等人曾研制出 FCY 系统^[9],江西工业大学衷仁保等人新近研制出 CASC 系统^[10]。

计算机代数系统一般具有如下功能:多项式和有理函数的加、减、乘、除、幂等运算;单变量和多变量多项式在整数域上的因式分解;表达式的化简;矩阵的加、减、乘、转置、求逆、求迹、求行列式值等运算;初等函数的符号微分和积分;各种形式的代换和公式匹配;代数方程组求解;FORTRAN 格式输出等。基于这些基本功能,可以编制各种应用程序。

计算机代数已在不少领域得到应用,并取得了可喜的成就。例如,在数学、物理学、化学、力学、天文学、地球科学、生物学和计算机科学等基础学科以及在机械工程、土木工程、电子电工、航空航天等技术部门,计算机代数得到了较为广泛的应用^{[11]~[14]}。

天体运动学是率先应用计算机代数的领域之一。著名的例子是1970年 Deprit 在小型计算机上用计算机代数复核了 C. Delaunay 关于日地月三体问题的计算。Delaunay 的工作花去了约20年时间,完成于1867年。而 Deprit 用计算机重复这一工作只用了20小时,并且发现了 Delaunay 结果中的个别错误。

多体系统动力学方程的推导,是计算机代数应用于数学建模的典型例子。无论是研究机器人、航天器,还是研究人体的运动,建立其动力学方程常常是极为繁琐、但又必须非常仔细的一项工作。现在,这些工作都开始用计算机代数来进行^{[15]~[17]}。有关这方面的研究论文已有十篇之多。

计算机代数在非线性系统分析中倍受重视。尤其在寻求非线性系统的摄动解方面,计算机代数更是不可缺少的一个有效工具^[18]。例如,计算机代数在流体力学和非线性振动摄动求解中的应用已有不少成果^{[19][20]},在非线性系统控制中也开始得到应用^[21]。

即使在数值算法方面,计算机代数的应用也日益增多。H. B. Keller 等人将计算机代数用于生成高阶差分算子的研究常被列为这类应用的一个典型^[22]。用计算机代数来推导有限元单元刚度矩阵显式、自动生成有限元的 FORTRAN 程序以及进行有限元算法的分析等工作^{[23]~[25]}更显示着计算机代数的实用价值。计算机代

数还在其它数值算法的构造和分析方面得到应用^{[26][27]}。

在机械优化设计、结构的稳定分析、随机振动、裂缝扩展分析、热力学方程推导、传热方程求解、反应动力学方程求解、弹塑性本构方程推导、电工网络分析等方面,计算机代数也都得到了应用^{[28]—[31]}。

作为一门新兴学科,计算机代数的研究正方兴未艾。不少学术团体、学术刊物和学术会议正致力于此项研究。

美国计算机协会符号与代数处理专业委员会(ACM SIGSAM—Special Interest Group on Symbolic and Algebraic Manipulation of Association for Computing Machinery)是其中最有影响的一个学术组织,SIGSAM Bulletin 是该组织的定期出版刊物。1985年创刊的《符号计算期刊》(Journal of Symbolic Computation)是计算机代数方面理论水平较高的学术刊物。已多次召开以计算机代数为主题的学术会议。近十年来的学术会议愈加频繁,其中包括:

SYMSAC '1981, Snowbrid, Utah, USA

SYMSAC '1986, Waterloo, Ontario, Canada

EUROCAL '1983, Kingston-on-Thames,

EUROCAL '1985, Linz, Austria

EUROCAL '1987, Leipzig, Germany

EUROCAM '1982, Marseille, France

EUROCAM '1984, Cambridge, England

ISSAC '1988, Rome, Italy

ISSAC '1990, Tokyo, Japan

ISSAC '1991, Bonn, Germany

著名的学术系列丛书《计算机科学讲义》(Lecture Notes in Computer Sciences)中卷号为144、162、174、203、204、216、358、378的图书均为计算机代数学术会议的论文集。

近年来,美国机械工程师协会(ASME)的冬季学术年会也几次将符号计算列为主题。其中包括1988年度的“流体力学与传热学中的符号计算”(Symbolic Computation in Fluid Mechanics and

Heat Transfer)、1990 年度的“符号计算及其对力学的冲击”(Symbolic Computation and its Impact on Mechanics)。

可以相信,随着研究的深入,计算机代数系统将更加得到完善,计算机代数的应用也将深入各个学科,并取得更大成就。

习 题

- 1.1 利用文献检索工具,查找十篇近十年内发表的计算机代数方面的论文。
- 1.2 列举自己专业领域中若干符号演算工作,并讨论它们在计算机上实现的可能性。

参考文献

- [1] 陶树平,计算机代数及其应用,世界科学,1(1985),26—29
- [2] 斯英古,符号计算介绍,数值计算与计算机应用,1(1989),49—53;2(1989),121—128
- [3] R. Pavelle, M. Rothstein, J. Fitch, Computer Algebra, *Scientific American*, Dec. (1981), 136—152
- [4] M. MacCallum, Computer Algebra—Tomorrow's Calculator, *New Scientist*, Oct. (1986), 52—55
- [5] J. Davenport, The World of Computer Algebra, *New Scientist*, Sept. (1988), 71—72
- [6] R. H. Rand, *Computer Algebra in Applied Mathematics — An Introduction to MACSYMA*, Pitman, (1984)
- [7] B. Buchberger, G. E. Collins and R. Loos (editors), *Computer Algebra — Symbolic and Algebraic Computation*, Springer-Verlag, New York, (1982)
- [8] J. H. Davenport, et al., *Computer Algebra — Systems and Algorithms for Algebraic Computation*, Academic Press, (1988)

- [9] 陈东岳,符号处理语言 FCY 文本,电子计算机参考资料,2 (1979),53—62
- [10] 衷仁保等,计算机代数与符号演算语言 CASC,计算机学报,5(1990),357—366
- [11] T. Cline, et al., Symbolic Computing in Engineering Design, *AI EDAM*, 3,3(1989),195—206
- [12] A. I. Beltzer, Engineering Analysis via Symbolic Computation, *Applied Mechanics Reviews*, 43,6(1990),119—127
- [13] R. Pavelle, Computer Algebra: Capabilities and Application to Problems in Engineering and the Sciences, in *Artificial Intelligence Application in Chemistry*, ed. T. H. Pierre and B. A. Hohne, ACS, (1986)
- [14] A. K. Noor, et al., Computerized Symbolic Manipulation in Structural Mechanics——Progress and Potential, *Computers and Structures*, 10, (1979), 95—118
- [15] D. A. Levinson, Equations of Motion for Multiple-Rigid-Body Systems via Symbolic Manipulation, *J. Spacecraft*, 14, 8 (1977),479—485
- [16] M. C. Leu, N. Hemati, Automated Symbolic Derivation of Dynamic Equations of Motion for Robotic Manipulators, *J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 108, (1986), 172—179
- [17] 丁晓江、沈瑞华,使用符号化形式语言 Mathematica 进行机器人操作器的计算,计算机工程与应用,6(1990),70—74
- [18] R. H. Rand, D. Armbruster, *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Springer-Verlag, New York, (1987)
- [19] 李家春,用 Symbolic Computation 计算毛细重力波六阶解,力学与实践,2(1988),37—39
- [20] W. H. Hui, G. Tenti, Symbolic Computation of the Stokes

- Wave, in *Application of Computer Algebra*, ed. , R. Pavelle, Kluwer Academic Pub. , Boston, (1985), 329—337
- [21] O. Akhrif, G. L. Blankenship, Computer Algebra Algorithms for Nonlinear Control, in *Advanced Computing Concepts and Techniques in Control Engineering*, ed. , M. J. Denham and A. J. Laub, (1988), 53—80
- [22] H. B. Keller , V. Pereyra , Symbolic Generation of Finite Difference Formulas , *Mathematics of Computation* , 32 , 144 (1979), 955—971
- [23] T. Y. Chang, H. Q. Tan, D. Zheng, M. W. Yuan, Application of Symbolic Method to Hybrid/Mixed Finite Elements and Computer Implementation, *Computers and Structures*, 35, 4(1990), 293—299
- [24] A. R. Korncoff, S. J. Fenves, Symbolic Generation of Finite Element Stiffness Matrices, *Computers and Structures* 10, (1979), 119—124
- [25] K. C. Park, D. L. Flaggs, An Operational Procedure for the Symbolic Analysis of the Finite Element Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42, 1(1984), 37—46
- [26] A. K. Noor, C. D. Balch, Hybrid Perturbation / Bubnov - Galerkin Technique for Nonlinear Thermal Analysis , *AIAA J.* , 22, 2(1984), 287—294
- [27] 张家驹, 高阶 Adams 公式的系数, 计算物理, 5, 3(1988), 370—374
- [28] A. S. Almgren, A. M. Agogino, A Generation and Correction of the Welded Beam Optimal Design Problem Using Symbolic Computation, *J. Mech. Transm. and Automation in Design*, 111, (1989). 137—140
- [29] I. Elishakoff , Jianguo Tang , Buckling of Polar Orthotropic

Circular Plates on Elastic Foundation by Computerized Symbolic Algebra , *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 68, (1988), 229—247

- [30] 陶庆生, 计算机代数在固体力学中的应用, 见: 现代数学与力学, (钱伟长、郭友中主编), 科学出版社, (1989), 571—573
- [31] Qingsheng Tao, Canonical Form of Kane's Dynamical Equations for Multibody Systems , in *Proceedings of the Int . Conference on Dynamics , Vibration and Control* , (ed . Zhaolin Wang), Beijing University Press, (1990), 716—721

第二章 REDUCE 语言简介

本章简要介绍 REDUCE 语言句法及其代数运算功能。

§ 2.1 引言

在现有的计算机代数系统中, REDUCE 最为普及, 能在多种计算机(包括 IBM PC/XT 微型计算机)上运行。REDUCE 的句法与通用程序设计语言 Pascal 接近, 易学易用, 这就是本书选择 REDUCE 语言的原因之一, 后面各章中的计算机代数应用程序也以 REDUCE 语言的形式给出。

REDUCE 软件系统是美国的 A. C. Hearn 等人研制的产品。第 1 版诞生于 1967 年。此后, 该系统不断得到发展。本书使用的是 1985 年 4 月推出的 REDUCE 3.2 版本。

REDUCE 3.2 的主要功能有:

- (1) 任意长整数及有理数的算术四则运算;
- (2) 任意精度浮点数的算术四则运算;
- (3) 单变量或多变量的多项式代数运算, 包括求最大公因式以及整系数的多项式因式分解;
- (4) 具有多项式或符号系数的矩阵代数运算, 包括求行列式、矩阵求逆以及线性代数方程组求解;
- (5) 微分与积分;
- (6) 表达式处理, 包括化简与代换。

1987 年 6 月, REDUCE 3.3 版问世。该版在 3.2 版的基础上略有改进, 如增加了有理式的二维输出功能, 完善了求解代数方程符 SOLVE 和多项式因式分解算符 FACTORIZE 的句法形式等等。本章对这些改进将略做介绍。

REDUCE 是一个交互式计算机代数系统。REDUCE 的“程序”

实际上由一系列独立的语句组成,每一语句按顺序由系统逐一解释、求值并显示结果。当然,这些语句可以是函数调用、循环语句或条件语句等。

下面给出交互使用 REDUCE 的一个简单例子。基中“LISP BREduce”为 IBM PC/XT 机上进入 REDUCE 系统的命令。REDUCE 每一命令前的序号和冒号“:”以及运算结果均由系统交互给出。REDUCE 命令的结束符为“;”或“\$”,用“\$”时系统则不输出该命令的运算结果。“BYE”命令用来退出 REDUCE 返回到操作系统。后面举例时,不再重述进入和退出 REDUCE 系统的这一细节。

C>LISP BREduce

REDUCE 3.2 15-APR-85...

1: (X+Y+Z) * * 2;

$$X^2 + 2 * X * Y + 2 * X * Z + Y^2 + 2 * Y * Z + Z^2$$

2: DF((X+Y) * * 3, X, 2);

6 * (X + Y)

3: INT(A * X * * 2, X);

$$(A * X^3) / 3$$

4: FOR K := 1 : 30 PRODUCT K;

265252859812191058636308480000000

5: MATRIX A;

6: A := MAT((A11, A12), (A21, A22));

A(1, 1) := A11


```

A(1,2) := A12

A(2,1) := A21

A(2,2) := A22

7: A * (-1);

MAT(1,1) := A22/(A11 * A22 - A12 * A21)

MAT(1,2) := (- A12)/(A11 * A22 - A12 * A21)

MAT(2,1) := (- A21)/(A11 * A22 - A12 * A21)

MAT(2,2) := A11/(A11 * A22 - A12 * A21)

8: DET(A);

A11 * A22 - A12 * A21

9: BYE;
C>

```

- 第 1 句: 表达式展开;
- 第 2 句: 求函数 $(x+y)^3$ 对 x 的二阶导数;
- 第 3 句: 求函数 ax^2 关于 x 的不定积分;
- 第 4 句: 求阶乘 $30!$;
- 第 5 句: 说明 A 为矩阵;
- 第 6 句: 矩阵赋值;
- 第 7 句: 矩阵求逆;
- 第 8 句: 求行列式;
- 第 9 句: 退出 REDUCE 系统。

上例演出了 REDUCE“代数(ALGEBRAIC)”模式下部分命令的使用。REDUCE 的另一模式,“符号(SYMBOLIC)”模式,则允许用户直接调用 LISP 指令。这两种模式分别对应两种数据类型:“代数表达式”与 LISP 语言的“S-表达式”。