高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

概率论讲义

学习指导书

沈恒范 编

高等

高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

概率论讲义学习指导书

沈 恒 范 编

高等教育出版社

本书是根据我社出版的沈恒范编《概率论讲义》(第二版编写的，采用本指导书时必须以上述书籍作为课本方能配合使用.

本书除一般的学习方法指导外，对《概率论讲义》(第二版)中的某些重点和难点作了必要的阐述，补充了一些示范性的例题，每章之后并附有内容提要．本书目的在于帮助读者顺利阅读课本，克服解题过程中可能遇到的困难，以便更好地掌握概率论的基本概念、基本理论及基本方法，从而提高使用概率论的知识去解决实际问题的能力.

本书的内容编排顺序与《概率论讲义》(第二版)相一致，还附有五份测验题，供读者检查学习效果之用.

本书可作为高等工业学校函授学生及自学读者的学习用书，也可作全日制工科学生参考用书.

责任编辑　丁鹤龄

ZR10/03

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

概率论讲义学习指导书

沈恒范 编

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
青浦任屯印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张4.75　字数110,000
1983年4月第1版　1983年9月第1次印刷
印数 00,001—50,000
书号 13010·0865　　定价 0.56 元

前　言

概率论是研究随机现象的规律性的科学. 随着现代科学技术的发展，概率论在自然科学、社会科学和工农业生产中得到了越来越广泛的应用. 因此，在我国高等学校的很多专业的教学计划中，概率论已被列为必修课程之一.

本书是为高等工业学校函授生及自学概率论的读者学习《概率论讲义》(第二版)而编写的指导书. 除一般的学习方法指导外，对《概率论讲义》中的某些重点和难点作了必要的阐述，补充了一些示范性的例题，每章之后附有内容提要. 其目的在于帮助读者顺利阅读该书，并解决解题过程中可能遇到的困难，以便更好地掌握概率论的基本概念、基本理论及基本方法，从而提高应用概率论的知识解决实际问题的能力. 另外，附有五份测验题，供读者检查学习效果之用.

本书编写过程中，曾得到吉林工业大学数学教研室全体同志的支持和帮助，编者谨致谢意.

限于编者的水平，本书一定存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正.

沈恒范

1982年10月

面积累了大量
国际会议 提纲
1.3.5.7

目　　录

关中
前言　一般性　贝叶斯

一般学习方法指导

《概率论讲义》(第二版，以下简称《讲义》)的主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律及中心极限定理等概率论的基本知识；以及参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等数理统计的初步知识.

按照1981年12月高等工业学校函授教学工作会议审订的《高等工业学校工程数学函授教学大纲》(草案)的要求，读者应当学习《讲义》第一至五章的绝大部分内容（凡不属于上述大纲内容的章节，本书均以星号*表明）. 读者在学习这部分内容时，应着重搞清概率论的一些基本概念，如随机事件的频率与概率、随机变量的分布函数、分布密度、数学期望、方差、相关系数等；并且应熟练地掌握和运用概率论的一些基本定理和公式，如概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式、关于数字特征的定理、切贝谢夫定理、贝努里定理、中心极限定理等；此外，还应熟悉一些常见的概率分布，如二项分布、泊松分布、均匀分布、正态分布等.

《讲义》第六至九章叙述了数理统计的初步知识. 由于这些内容未列入《高等工业学校工程数学函授教学大纲》(草案)中，读者可结合专业的需要，选学其中的部分或全部内容. 在学习这几章时，应搞清数理统计的一些基本概念，如总体、样本、点估计的无偏性及一致性、置信概率及置信区间等；并熟练地掌握和运用数理统计的基本理论和方法，如假设检验、方差分析、回归分析等，解决一些实际问题；此外，还应熟悉数理统计中几个常用的概率分布，如χ^2分布、t分布、F分布等.

读者自学《讲义》时，最重要的环节就是要仔细阅读、深入钻研

每章每节的内容．阅读应当按顺序逐章逐节地进行．对于每一节，可以先粗略地读一遍，初步了解一下该节的主要内容，然后再进行仔细阅读，即逐字逐句地搞清每一概念，弄懂每一定理（或公式）及其证明、每一例题及其解法．这时，不仅是阅读，而且应当进行必要的分析推理及计算．只有这样，才能对基本内容理解深透．对于重点和难点，还可以结合本书的补充论述和例题一起来阅读．

在阅读的基础上，应当通过解答习题来加深对所学内容的理解．解题时，要独立思考，严格认真．《讲义》中的习题是附在各章之后的，数量较多，并有少量习题较难．因此，读者可以在读完每一节之后，按本书指定的部分习题进行解答．本书未指定的习题可以根据自己的学习情况选作．

在阅读和解题过程中，读者如果对某些问题虽经反复思考仍然不清楚或者得不到正确答案时，可以记下来，写信给函授教师，请求书面答疑或留待面授时解决．

读者在学完《讲义》每一章之后，应当对这一章的主要内容（包括概念、定理、公式等）进行小结．虽然本书已列举了各章的内容提要，但我们还是希望读者能自己独立地来完成这项工作，这样可以更好地理解和掌握学到的知识．在小结的基础上，读者再来解答本书中的测验题，以便检查自己的学习效果．如果成绩不理想，则应当进行必要的补课，暂时不要进行下一章的学习．我们强调学习必须循序渐进，切忌急于求成．

第一章　随机事件及其概率

随机事件及其概率是概率论的最基本的概念.《讲义》第一章的很多概念、定理及公式是学习全书的理论基础，读者必须正确理解，深刻领会.

《讲义》第一章首先阐明了在大量重复试验中随机事件的频率的稳定性，从而引出随机事件的概率的概念．然后叙述概率的古典定义，以便于计算古典概型中随机事件的概率．这一章的重点是关于计算概率的一系列定理和公式，如概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式、贝叶斯公式等．最后讨论了独立试验序列中的二项概率公式及其近似公式.

§1.1　随机事件·频率与概率

《讲义》§1.1向读者介绍了概率论中最基本的概念——必然事件、不可能事件、随机事件、频率、概率等．读者可以结合实例正确理解这些基本概念.

1. 在自然界和生产实践中，广泛地存在着一类随机现象，这就是在完全相同的综合条件下出现的结果可能是不相同的.例如，工人生产机械零件，虽然使用同一台机床，加工的材料也相同，但是制造出来的零件可能是合格品，也可能是废品．我们说，加工的结果具有随机性，“生产合格品”这样的事件可能发生，也可能不发生，我们把它叫做随机事件．又如，射击运动员向某一目标进行射击，虽然使用同一枪支，子弹的质量也相同，但是射击的结果可能击中10环，也可能击中9环或8环，甚至脱靶．因此，射击的结果具有随机性，“击中10环”这样的事件是随机事件.

2. 通常说，某个工人生产的产品的合格品率为95%，这就是说，如果让这个工人生产100个机械零件，则合格品大约有95个左右. 显然，一个熟练工人生产的产品的合格品率比一个徒工生产的产品的合格品率要高得多. 由此可见，一个熟练工人生产合格品与一个徒工生产合格品虽然都是随机事件，但它们发生的可能性却大不相同，前者的可能性显然比后者的可能性大.

人们从实践中得到的这种关于随机事件发生的可能性大小的认识，正是随机事件的频率及概率的概念的现实来源.

随机事件可能性的大小可以在大量重复试验中显示出来.

设随机事件A在n次重复试验中发生了m次，则比值$\frac{m}{n}$叫做A的频率，记作$W(A)$. 由于随机事件A在各次试验中可能发生，也可能不发生，所以它在n次试验中发生的次数(称为频数)m可能等于0(n次试验中A一次也不发生)，可能等于1(n次试验中A只发生一次)，……，也可能等于n(n次试验中A每次都发生). 我们说，事件A在n次试验中发生的频数m是一个随机变量，它可能取得$0, 1, 2, \cdots, n$这$n+1$个数中的任一个值. 于是，随机事件A的频率$W(A)=\frac{m}{n}$也是一个随机变量，它可能取得的值介于0与1之间. 这说明随机事件的频率究竟取得什么值具有随机性.

然而，经验表明，当试验重复多次时随机事件的频率又具有稳定性. 除《讲义》中抛掷钱币的实验结果外，这里我们再举一个例子.

例 进行这样的试验：从$0, 1, 2, \cdots, 9$这十个数字中随机取一个数字. 重复进行这个试验10000次，将每次取得的数字依次记下来，我们就得到一个包括10000个数字的"随机数表". 在这个随机数表里，可以发现$0, 1, 2, \cdots, 9$这十个数字中各个数字出现的频率稳定在0.1的附近. 现在我们把一个随机数表等分为10段，

每段包括 1000 个随机数，统计每 1000 个随机数中数字“7”出现的频率，得到如下的结果：

段　　序 ($n=1000$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
“7”出现频数 m	95	88	95	112	95	99	82	89	111	102
“7”出现频率 m/n	0.095	0.088	0.095	0.112	0.095	0.099	0.082	0.089	0.111	0.102

由上表可见，每 1000 个随机数中“7”出现的频率也稳定在 0.1 的附近.

类似的例子可以举出很多. 这说明随机事件在大量重复试验中存在着一种客观规律性——频率的稳定性. 因为它是通过大量统计显示出来的，所以称为统计规律性.

3. 随机事件 A 的频率的稳定性表明客观上存在着一个常数，大量重复试验中随机事件 A 的频率就在这个常数的附近摆动. 这个常数是一个介于 0 与 1 之间的数，它表明随机事件 A 发生的可能性的大小. 我们把这个常数叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$. 概率的这个定义通常称为概率的统计定义.

概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法：当试验重复多次时，我们把随机事件 A 的频率 $W(A)$ 作为随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值.

§ 1.2　事件的关系及运算

《讲义》§ 1.2 叙述了事件的关系及运算，如包含、和、积、互不相容、对立、等等，这些概念都是概率论的基本概念，读者应对它们有正确的理解.

1. 在研究实际问题时，往往需要考虑试验结果中各种可能的

事件，而这些事件是相互关联的．研究事件之间的关系，进而研究这些事件的概率之间的关系，就能够利用简单的事件的概率去推算较复杂的事件的概率．为此，读者应当善于把某些复杂的事件表示为若干个简单的事件的和或积．要实现这一点，除了正确理解事件的关系及运算外，还必须对具体问题进行具体分析．

例 1　检查产品质量时，从一批产品中任意抽取 5 件样品进行检查，则可能结果是：未发现次品，发现 1 件次品，发现 2 件次品，…，发现 5 件次品．设事件 A_i 表示“发现 i 件次品”($i=0,1,2,3,4,5$)，显然这些事件是互不相容的．现在考虑一些较复杂的事件，并用 $A_0, A_1, \cdots, A_5$ 表示出来：

(1)“发现 2 件或 3 件次品”(设为事件 B)可以表示为

$$B=A_2+A_3.$$

(2)“最多发现 2 件次品”(设为事件 C)可以表示为

$$C=A_0+A_1+A_2.$$

(3)“至少发现 1 件次品”(设为事件 D)可以表示为

$$D=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5.$$

或

$$D=\bar{A}_0.$$

例 2　如图 1 所示的电路中，设事件 A、B、C 分别表示继电器接点 a、b、c 闭合，事件 D 表示灯亮，则因为当接点 a 闭合，且接点 b、c 中至少有一个闭合时，指示灯必亮；而当指示灯亮时，必然是接点 a 闭合且 b、c 中至少有一个闭合；所以有

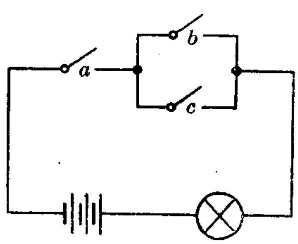

图 1

$$D=A(B\cup C).$$

*2．如果读者具备有关集合论的初步知识，则不难理解事件的关系及运算实质上与集合的关系及运算是完全一致的．我们可

以用集合论的观点来研究随机事件. 设试验的所有可能的基本试验结果的集合用 U 表示(每一基本试验结果是 U 的一个元素), 则随机事件 A 就是 U 的子集, 必然事件就是 U 本身, 不可能事件就是空集 V. 事件的关系及运算与集合的关系及运算对照列表如下:

符　号	集　合　论	概　率　论
$A \subset B$	集合 A 是集合 B 的子集	事件 A 包含于事件 B
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并集	事件 A 与 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与 B 的交集	事件 A 与 B 的积事件
$AB = V$	集合 A 与 B 不相交	事件 A 与 B 互不相容
$\bar{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件

补充习题

1. 设 A、B、C 表示三个随机事件, 试将下列事件用 A、B、C 表示出来:

(1) 仅 A 发生. $A \cap C$

(2) A、B、C 都发生.

(3) A、B、C 都不发生.

(4) A、B、C 不都发生.

(5) A 不发生, 且 B、C 中至少有一事件发生.

(6) A、B、C 中至少有一事件发生.

(7) A、B、C 中恰有一事件发生.

(8) A、B、C 中至少有二事件发生.

(9) A、B、C 中最多有一事件发生.

答: (1) $A\bar{B}\bar{C}$. (2) ABC. (3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. (4) $\overline{ABC}$. (5) $\bar{A}(B \cup C)$. (6) $A \cup B \cup C$. (7) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$. (8) $AB \cup AC \cup BC$. (9) $\overline{AB \cup AC \cup BC}$ 或 $\bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}\bar{C} \cup \bar{B}\bar{C}$.

2. 袋中有十个球, 分别编有 1 至 10 共十个号码. 从袋中任取一个球, 设事件 A 表示"取得的球的号码是奇数", 事件 B 表示"取得的球的号码是偶数", 事件 C 表示"取得的球的号码小于 5", 则

(1) $A\cup B$　(2) AB　(3) $\bar{C}$　(4) $A\cup C$

(5) AC　(6) $\bar{A}\bar{C}$　(7) $\overline{B\cup C}$　(8) $\overline{BC}$

分别表示什么事件？

答：(1)必然事件 U. (2)不可能事件 V. (3)取得的球的号码不小于5. (4)取得的球的号码是 1, 2, 3, 4, 5, 7 或 9. (5)取得的球的号码是 1 或 3. (6)取得的球的号码是 6, 8 或 10. (7)取得的球的号码是 5, 7 或 9. (8) 取得的球的号码是 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 或 10.

§1.3 概率的古典定义

《讲义》§1.3 叙述了概率的古典定义，根据这个定义我们可以直接计算某些特殊情况下随机事件的概率.

1. 所谓古典概型是指这种类型的试验，它具有下列特点：

(1) 试验中所有可能的基本试验结果只有有限个；

(2) 这些结果具有等可能性、互不相容性、完备性(同时具备这三种性质的事件叫做试验的基本事件).

这时，随机事件 A 的概率定义如下：

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}.$$

由此可见，利用概率的古典定义计算概率时，我们应当首先确定试验的基本事件的总数，再确定随机事件 A 所包含的基本事件数，则后者与前者之比即为所求的概率 $P(A)$.

2. 为了正确计算古典概型中基本事件的总数及随机事件 A 所包含的基本事件数，从而正确计算概率 $P(A)$，读者应当熟悉关于排列与组合的基本知识. 现在我们扼要介绍这方面的内容，供读者参考（完全没有学过排列与组合知识的读者还应当参阅有关这方面的书籍）.

[1] **选排列**　从 n 个不同的元素中，每次取 $m(m<n)$ 个元素按一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中每次取 m 个元素

的选排列．所有不同排列的种数叫做排列数，用符号 A_n^m 表示．我们有

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

例 1 用 1, 2, 3, 4, 5 五个数字共可组成多少个没有重复数字的三位数？

解 这是从 5 个不同元素中每次取 3 个元素的选排列，因为

$$A_5^3=5\cdot4\cdot3=60,$$

所以共可组成 60 个没有重复数字的三位数．

例 2 在 1000 到 6000 之间，共有多少个没有重复数字的奇数？

解 显然，符合题意的数应具备下列条件：

(1) 千位上必须是 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字之一；

(2) 个位上必须是 1, 3, 5, 7, 9 这五个数字之一

为了避免重复，我们按千位上的数字是偶数或奇数分成两类情形来考虑：

(1) 设千位上是偶数，即是 2 或 4，有 A_2^1 种排法；这时，个位上可以是五个奇数中的任一个，有 A_5^1 种排法；至于百位和十位上，可以是除去已排定的两个数字以外的八个数字中的任意两个，有 A_8^2 种选法．所以这一类数有 $A_2^1A_5^1A_8^2$ 个．

(2) 设千位上是奇数，即是 1, 3 或 5，有 A_3^1 种排法；这时，个位上可以是除去已排定那个数字以外的四个奇数中的任一个，有 A_4^1 种排法；百位和十位上仍有 A_8^2 种排法．所以这一类数有 $A_3^1A_4^1A_8^2$ 个．

于是，符合题意的数共有

$$A_2^1A_5^1A_8^2+A_3^1A_4^1A_8^2=1232(\text{个}).$$

[2] **全排列** n 个不同的元素排成一列叫做 n 个不同元素的全排列．所有不同排列的种数叫做全排列数，用符号 P_n 表示．易

知

$$P_n = A_n^n = n!.$$

例 3 用 a、b、c、d、e 五个字母进行全排列，共有多少种排法？如果规定 a 和 b 必须排在一起，则共有多少种排法？

解 五个不同字母的全排列数为

$$P_5 = 5! = 120.$$

如果 a 和 b 必须排在一起，则可以先把 a 和 b 看作一个元素，与其余三个字母共看作四个元素进行全排列，排列数为 P_4；但是，a 和 b 排在一起时，又可以互换位置，即两个元素进行全排列，排列数为 P_2；因此，所求排列数为

$$P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48.$$

[3] **可重复排列** 从 n 个不同的元素中，取 m 个元素进行排列，并且每个元素都可以重复选取，叫做 n 个不同元素在 m 个位置上的可重复排列．所有不同排列的种数为

$$N = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{m\text{个}} = n^m.$$

例 4 某城市的电话号码由五个数字组成，最多可以安装多少个不同号码的电话？

解 因为组成电话号码的五个数字中，每个数字都可以是 0，1，2，…，9这十个数字中的任一个，所以这是 10 个不同元素在 5 个位置上的可重复排列问题，我们有

$$N = 10^5 = 100000,$$

即可以安装 100000 个不同号码的电话．

[4] **组合** 从 n 个不同的元素中，每次选取 $m(m \leqslant n)$ 个元素组成一组，而不考虑顺序如何，叫做从 n 个不同元素中每次取 m 个元素的组合．所有不同组合的种数叫做组合数，用符号 C_n^m 表示．我们有