

高等学校教学用书

概週期函数

Б. М. 列維坦著

高等教育出版社

高等学校教学用书



数 函 期 週 概

B. M. 列維坦 著
余家榮 張延昌 譯

高等教育出版社

本書是由蘇聯國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的列維坦 (Б. М. Левитан) 著“概週期函數”(Почти-периодические функции) 1953 年版譯出。原書系著者根據他在哈爾科夫大學及莫斯科大學的講義編成的。

本書共分兩編,分別由武漢大學余家榮、張延昌譯出。

本書第一編內容為實變數的概週期函數及在群上的概週期函數,第二編內容為解析及調和概週期函數。

概 週 期 函 數

Б. М. 列維坦著

余家榮, 張延昌譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·1 開本 850×1163 1/32 印張 10 11/16 字數 276,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—8,000

定價(3) ¥ 1.20

序

本書是根据我过去分別在國立哈尔科夫 A. M. 高尔基大学以及在國立莫斯科 M. B. 罗蒙諾索夫大学的講稿編成的。

虽然概週期函數論出現較晚,可是現在对这理論的各种問題,已經積累了丰富的文献,因而要在一本書中敘述整个理論的概要是'非常困难的。我只希望讀者在讀过本書后,能够順利地研讀当代雜誌中關於概週期函數論主要方面問題的各种文献。正是为此,我在本書中也講述了解析概週期函數的基本理論。

A. И. 普列斯納教授看过本書的原稿,並且提出了一系列很寶貴的意見。我在最后校閱本書時,曾經參照了他的意見。

此外, A. C. 柯凡科教授与 B. A. 馬尔欽科教授也提出了一系列寶貴的意見。

謹向这几位教授致以誠摯的謝意。

Б. М. 列維坦

一九五二年十一月二十日於莫斯科

譯 者 說 明

本書正文中方括号內的數字及俄文字母系指示本書末尾的參考文獻。如^[23,a]表示參考文獻中所引、列維坦著的第一篇論文。

目 錄

序	7
---------	---

第一篇 实变數概週期函數及在羣上的概週期函數

緒論

第一章 一致概週期 (H. H.) 函數	17
§ 1. 一致 H. H. 函數的定義及其初等性質	17
§ 2. 關於一致 H. H. 函數的不定積分的定理	25
§ 3. 傅立叶級數	27
§ 4. 傅立叶級數的形式運算	34
§ 5. 基本定理	38
§ 6. 基本定理的證明	43
§ 7. 近似定理, N. 魏納法	53
§ 8. 近似定理, 波赫納-費叶法 ^[3,a]	56
§ 9. 若干類一致 H. H. 函數的傅立叶級數的絕對收斂性判別法	61
§ 10. 若干類一致 H. H. 函數的傅立叶級數的收斂性判別法, 傅立叶指數有唯一 ¹ 的極限點在無窮远处的情形	64
§ 11. 若干類一致 H. H. 函數的傅立叶級數的收斂性判別法, 傅立叶指數有唯一 ¹ 的極限點在有限远处的情形	72
§ 12. 一類有界的不定積分的一致 H. H. 函數	76
§ 13. 近似定理的 H. H. 波果列波夫証法	78
第二章 概週期的算術性質	88

§ 1. 傅立叶指數與概週期的關係	88
§ 2. 克羅內格定理	90
§ 3. 克羅內格-范爾定理	92
§ 4. 極限週期函數	95
§ 5. 單變數極限週期函數	99

§ 6. 集 $\Pi\{f(x)\}$	103
§ 7. 一致 $\Pi. \Pi.$ 函數的輻角定理	107
§ 8. 一致 $\Pi. \Pi.$ 函數的分佈函數	113
第三章 唯一性定理的推廣	118
§ 1. 初步說明, N 概週期 ($N \Pi. \Pi.$) 函數的定義及其最簡單的性質	118
§ 2. $N \Pi. \Pi.$ 函數的傅立叶級數	126
§ 3. $N \Pi. \Pi.$ 函數的近似定理與唯一性定理	129
§ 4. 波赫納-費叶法在 $N \Pi. \Pi.$ 函數上的推廣	133
§ 5. $N \Pi. \Pi.$ 函數是一致 $\Pi. \Pi.$ 函數的若干條件	137
第四章 有概週期系數的線性微分方程組	143
§ 1. 關於線性微分方程組的若干一般知識	143
§ 2. 線性微分方程組的概週期解	147
§ 3. 常系數微分方程	155
第五章 在各種度量下的概週期函數	158
§ 1. 初步說明, 度量空間論的若干知識	158
§ 2. 斯捷潘諾夫 $\Pi. \Pi.$ 函數的初等性質	165
§ 3. $S \Pi. \Pi.$ 函數的兩例	174
§ 4. $S^p \Pi. \Pi.$ 函數的緊密性及正規性	180
§ 5. 范爾 $\Pi. \Pi.$ 函數的初等性質	184
§ 6. $W^p \Pi. \Pi.$ 函數的平均值定理 W^2 及 $S^2 \Pi. \Pi.$ 函數的巴舍伐等式	190
§ 7. $W^p(S^p) \Pi. \Pi.$ 函數的近似定理	194
§ 8. $W^p(S^p) \Pi. \Pi.$ 函數的傅立叶級數的波赫納-費叶求和法	200
§ 9. 空間 W^p 的不完全性	202
§ 10. 貝西可維奇 $\Pi. \Pi.$ 函數	206
第六章 在羣上的概週期函數	211
§ 1. 在羣上的 $\Pi. \Pi.$ 函數的定義及其初等性質	211
§ 2. 平均值定理	214
§ 3. 羣的酉表現, 舒爾補助定理, 正交關係	222
§ 4. 傅立叶級數, 巴舍伐等式, 唯一性定理	228
§ 5. 唯一性定理的證明	231
§ 6. 近似定理	235
§ 7. 拓撲羣, 亞培爾羣	241

§ 8. 緊密羣	245
§ 9. 廣义位移运算符及其相關的廣义概週期函數	247

第二篇 解析及調和概週期函數

緒論	251
第一章 解析概週期函數	252
§ 1. 解析函數論中的一些知識	252
§ 2. 解析 Π, Π 函數的定義及其初等性質	259
§ 3. 狄黎赫萊級數	264
§ 4. 解析 Π, Π 函數的狄黎赫萊級數的收斂性	272
§ 5. Π, Π 函數在 $\sigma = +\infty$ 的性質(與維爾斯德拉斯及比卡定理相類似的結果)	275
§ 6. 解析 $S \Pi, \Pi$ 函數	280
§ 7. 關於解析 Π, Π 函數在概週期帶外的性質	282
第二章 解析概週期函數的平均運動及其值點的密度	290
§ 1. 有關解析函數的幾個補助定理	290
§ 2. 解析 Π, Π 函數的平均運動及它的零點的密度	297
§ 3. 燕森函數	300
§ 4. 凸函數	304
§ 5. 解析 Π, Π 函數的燕森函數, 平均運動以及零點密度間的聯繫	307
§ 6. 無零點的帶, 週期函數	310
§ 7. 狄黎赫萊指數有上界或有下界的函數	314
第三章 調和概週期函數	316
§ 1. 調和 Π, Π 函數的最簡單的性質	316
§ 2. 調和 Π, Π 函數的傅立叶級數	319
§ 3. 共軛函數也是 Π, Π 函數的條件	324
參考文獻	332
中俄名詞對照表	338
中俄人名對照表	340

高等学校教学用书



数 函 期 週 概

B. M. 列維坦 著
余家榮 張延昌 譯

高等教育出版社

本書是由蘇聯國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的列維坦 (Б. М. Левитан) 著“概週期函數”(Почти-периодические функции) 1953 年版譯出。原書系著者根據他在哈爾科夫大學及莫斯科大學的講義編成的。

本書共分兩編，分別由武漢大學余家榮、張延昌譯出。

本書第一編內容為實變數的概週期函數及在群上的概週期函數，第二編內容為解析及調和概週期函數。

概 週 期 函 數

Б. М. 列維坦著

余家榮，張延昌譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·1 開本 850×1163 1/32 印張 10 11/16 字數 276,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—8,000

定價(3) ¥ 1.20

目 錄

序	7
---------	---

第一篇 实变數概週期函數及在羣上的概週期函數

緒論

第一章 一致概週期 (II. II.) 函數	17
------------------------------	----

§ 1. 一致 II. II. 函數的定義及其初等性質	17
§ 2. 關於一致 II. II. 函數的不定積分的定理	25
§ 3. 傅立叶級數	27
§ 4. 傅立叶級數的形式運算	34
§ 5. 基本定理	38
§ 6. 基本定理的證明	43
§ 7. 近似定理. N. 魏納法	53
§ 8. 近似定理. 波赫納-費叶法 ^[3,a]	56
§ 9. 若干類一致 II. II. 函數的傅立叶級數的絕對收斂性判別法	61
§ 10. 若干類一致 II. II. 函數的傅立叶級數的收斂性判別法. 傅立叶指數有唯一 ¹ 的極限點在無窮遠處的情形	64
§ 11. 若干類一致 II. II. 函數的傅立叶級數的收斂性判別法. 傅立叶指數有唯一 ¹ 的極限點在有限遠處的情形	72
§ 12. 一類有界的不定積分的一致 II. II. 函數	76
§ 13. 近似定理的 H. H. 波果列波夫証法	78

第二章 概週期的算術性質	88
--------------------	----

§ 1. 傅立叶指數與概週期的關係	88
§ 2. 克羅內格定理	90
§ 3. 克羅內格-范爾定理	92
§ 4. 極限週期函數	95
§ 5. 單變數極限週期函數	99

§ 6. 集 $\Pi\{f(x)\}$	103
§ 7. 一致 $\Pi. \Pi.$ 函數的輻角定理	107
§ 8. 一致 $\Pi. \Pi.$ 函數的分佈函數	113
第三章 唯一性定理的推廣	118
§ 1. 初步說明, N 概週期 ($N \Pi. \Pi.$) 函數的定義及其最簡單的性質	118
§ 2. $N \Pi. \Pi.$ 函數的傅立叶級數	126
§ 3. $N \Pi. \Pi.$ 函數的近似定理與唯一性定理	129
§ 4. 波赫納-費叶法在 $N \Pi. \Pi.$ 函數上的推廣	133
§ 5. $N \Pi. \Pi.$ 函數是一致 $\Pi. \Pi.$ 函數的若干條件	137
第四章 有概週期系數的線性微分方程組	143
§ 1. 關於線性微分方程組的若干一般知識	143
§ 2. 線性微分方程組的概週期解	147
§ 3. 常系數微分方程	155
第五章 在各種度量下的概週期函數	158
§ 1. 初步說明, 度量空間論的若干知識	158
§ 2. 斯捷潘諾夫 $\Pi. \Pi.$ 函數的初等性質	165
§ 3. $S \Pi. \Pi.$ 函數的兩例	174
§ 4. $S^p \Pi. \Pi.$ 函數的緊密性及正規性	180
§ 5. 范爾 $\Pi. \Pi.$ 函數的初等性質	184
§ 6. $W^p \Pi. \Pi.$ 函數的平均值定理 W^2 及 $S^2 \Pi. \Pi.$ 函數的巴舍伐等式	190
§ 7. $W^p(S^p) \Pi. \Pi.$ 函數的近似定理	194
§ 8. $W^p(S^p) \Pi. \Pi.$ 函數的傅立叶級數的波赫納-費叶求和法	200
§ 9. 空間 W^p 的不完全性	202
§ 10. 貝西可維奇 $\Pi. \Pi.$ 函數	206
第六章 在羣上的概週期函數	211
§ 1. 在羣上的 $\Pi. \Pi.$ 函數的定義及其初等性質	211
§ 2. 平均值定理	214
§ 3. 羣的酉表現, 舒爾補助定理, 正交關係	222
§ 4. 傅立叶級數, 巴舍伐等式, 唯一性定理	228
§ 5. 唯一性定理的證明	231
§ 6. 近似定理	235
§ 7. 拓撲羣, 亞培爾羣	241

§ 8. 緊密羣	245
§ 9. 廣義位移運算子及其相關的廣義概週期函數	247

第二篇 解析及調和概週期函數

緒論	251
第一章 解析概週期函數	252
§ 1. 解析函數論中的一些知識	252
§ 2. 解析 Π, Π 函數的定義及其初等性質	259
§ 3. 狄黎赫萊級數	264
§ 4. 解析 Π, Π 函數的狄黎赫萊級數的收斂性	272
§ 5. Π, Π 函數在 $\sigma = +\infty$ 的性質(與維爾斯德拉斯及比卡定理相類似的結果)	275
§ 6. 解析 $S \Pi, \Pi$ 函數	280
§ 7. 關於解析 Π, Π 函數在概週期帶外的性質	282
第二章 解析概週期函數的平均運動及其值點的密度	290
§ 1. 有關解析函數的幾個補助定理	290
§ 2. 解析 Π, Π 函數的平均運動及它的零點的密度	297
§ 3. 燕森函數	300
§ 4. 凸函數	304
§ 5. 解析 Π, Π 函數的燕森函數, 平均運動以及零點密度間的聯繫	307
§ 6. 無零點的帶, 週期函數	310
§ 7. 狄黎赫萊指數有上界或有下界的函數	314
第三章 調和概週期函數	316
§ 1. 調和 Π, Π 函數的最簡單的性質	316
§ 2. 調和 Π, Π 函數的傅立葉級數	319
§ 3. 共軛函數也是 Π, Π 函數的條件	324
參考文獻	332
中俄名詞對照表	338
中俄人名對照表	340

序

本書是根据我过去分別在國立哈尔科夫 A. M. 高尔基大学以及在國立莫斯科 M. B. 罗蒙諾索夫大学的講稿編成的。

虽然概週期函數論出現較晚,可是現在对这理論的各种問題,已經積累了丰富的文献,因而要在一本書中敘述整个理論的概要是'非常困难的。我只希望讀者在讀过本書后,能够順利地研讀当代雜誌中關於概週期函數論主要方面問題的各种文献。正是为此,我在本書中也講述了解析概週期函數的基本理論。

A. И. 普列斯納教授看过本書的原稿,並且提出了一系列很寶貴的意見。我在最后校閱本書時,曾經參照了他的意見。

此外, A. C. 柯凡科教授与 B. A. 馬尔欽科教授也提出了一系列寶貴的意見。

謹向这几位教授致以誠摯的謝意。

Б. М. 列維坦

一九五二年十一月二十日於莫斯科

譯 者 說 明

本書正文中方括号內的數字及俄文字母系指示本書末尾的參考文獻。如^[23,a]表示參考文獻中所引、列維坦著的第一篇論文。

第一篇 实变數概週期函數及在羣上的概週期函數

緒 論

1. 我們考慮兩個連續週期函數 $f(x)$ 及 $g(x)$ 。設 p 是 $f(x)$ 的週期, q 是 $g(x)$ 的週期。如果 p 与 q 是可公度的, 也就是說, 如果有兩個整數 m 及 n 存在, 使得 $mp=nq$, 那么和式 $h(x)=f(x)+g(x)$ 也是週期函數, 而且它的週期是 $T=mp=nq$ 。如果函數 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的週期是不可公度的, 那么這兩函數的和不是週期函數。但是自然可以料想到, 兩個被加函數的週期性应当對它們的和有重大的影响。為了說明究竟有怎樣的影響, 我們要應用下面的定理^①。

設 p 与 q 是任意兩實數。無論數 $\delta>0$ 是怎樣, 可以指出正數 $L=L(\delta)$, 使得在每個長為 L 的區間內, 至少有一數 τ 滿足下列不等式組:

$$|\tau-s_1p|<\delta, \quad |\tau-s_2q|<\delta, \quad (1)$$

其中 s_1 与 s_2 是整數。

利用這定理, 容易推出兩個週期函數的和的重要性質。取任意的正數 ε , 並且选取 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得當 $|h|<\delta$ 時,

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |g(x+h)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

由於函數 $f(x)$ 与 $g(x)$ 連續, 這樣选取 δ 是可能的。

① 這定理是克羅內格(Kronecker)的一個重要的定理的特別情形(參考第二章, §2)。