可靠性与寿命数据的统计分析方法

〔美国〕 N·R·曼
R·E 沙费尔
N·D 辛普瓦拉

中国电子学会电子产品可靠性与质量管理

可靠性与寿命数据的统计分析方法

〔美国〕 N·R·曼　R·E·沙费尔　N·D·辛普瓦拉　著

魏宗舒　丁　元　王万中　林举干　周纪芗　王玲玲　费鹤良　译

魏宗舒　徐福祯　吕乃刚　校

中国电子学会电子产品可靠性与质量管理专业学会

内 容 提 要

本书是一本系统论述可靠性统计方法的著作．内容比较丰富，包括失效模型与寿命分布，加速寿命试验，可靠性数据的统计估计和假设检验，可靠性贝叶斯方法，可靠性估计的非参数方法，拟合优度检验和蒙特卡洛模拟方法以及系统可靠性等．书中论述的许多可靠性统计方法都是六十年代末，七十年代初发展起来的最新技术，学习它可使读者进入可靠性研究的较新领域，获得可靠性统计的有效工具．

本书根据原版翻译，适合电子、宇航、核能、机械等部门从事可靠性工作的研究、设计与试验人员阅读，也可供大学概率统计、计算机、电子以及管理科学等专业高年级或研究生参考．

METHODS FOR STATISTICAL ANALYSIS
OF RELIABILITY AND LIFE DATA

Nancy R•Mann　　Ray E•Schafer
Nozer D•Singpurwalla
Published by John Wiley & Sons, Inc. 1974

可靠性与寿命数据的统计分析方法

中国电子学会电子产品可靠性与质量管理专业学会出版
（广州市1252信箱9分箱）
广东省农垦总局印刷厂印刷
1980年12月印刷　　开本787×1092　1/16
版面字数568,000
内部发行　　定价3.00元

序

可靠性已成为一门学科，它预测、估计或最优化存活的概率、平均寿命，或一般部件、系统的寿命分布．在过去十年中，由于政府和用户的日益重视，可靠性这门学科发展很快．近年来，数学家们，经济学家们以及那些从事环境科学和寿命科学研究的人员，也由于可靠性和统计学间的相互影响而对可靠性表示兴趣．

可靠性虽然被许多人认为只是概率论和统计学对一类特殊问题的应用，但却推动了统计学中一些新领域的发展．一个发展是用非参数方法来刻划分布函数和研究这些刻划中的更新理论、估计理论、排列成序和选择的理论，等等．有关可靠性中统计方法方面的大量文章的发表，以及为学习统计学、运筹学、工业工程、系统工程和土木工程的学生开设了越来越多具有研究生水平的可靠性统计学课程，都是可靠性与统计学之间密切关系的明证．我们写这本书的目的，不仅是为这些学生提供一本适合于研究生水平的教科书，而且为可靠性专业工程师提供通常在工作中要用到的各种统计方法的一本范围宽广的参考资料．我们相信这本书可以作为一学期读完的一本教材，读者要求有一定的数学基础，接触过微积分学、概率论和统计学．

本书第二、三章介绍所需要的概率和统计方法，作为发展其余部分的基础．中心内容从第四章提出和发展失效模型开始．其余部分主要是讲解估计的各种方法和技巧，所收集的材料不是以前没有在教科书上见到过，就是见到过而一般不易获得的．第八、九章分别讨论了可靠性的贝叶斯方法和加速寿命试验．这两个专题目前在文献中很受重视，因此，我们认为有足够的重要性把它们包括在本书之中．

在每章末了（有时在每节之后）附有习题待解．这些习题是为了把可靠性的理论和实际很好的联系在一起而提出来的．在每章末了还附有参考文献，但由于篇幅的限制，不可能把有关考虑过的题目所写的那些文章或书籍全部包括在内，而只能罗列一些基本文献．感兴趣的读者可应用这些文献编出自己的参考资料，以适应其特殊需要．

（下略）

N·R· 曼
R·E· 沙费尔
N·D· 辛普瓦拉

加利福尼亚、华盛顿，1973年8月

目　录

第一章　绪　言

1.1　可靠性和寿命试验中的统计方法

本书主要讲述解决与可靠性概念有关问题的统计方法．可靠性在本书中均理解为"一台设备(或一个另件、组件)在所遇到的工作条件下在指定的时间内完成规定任务的概率"．本书包括作为可靠性问题的分析与解决方法的基础的统计理论．它给研究、掌握和应用这些方法提供了进一步的理解．

应用统计方法在可靠性意义下估计诸参数，其所需数据通常是来自寿命试验．寿命试验是将有关另件或组件的样品置于代表实际工作状态的应力和环境条件下进行，在试验期间，记下逐次的失效时间．由于失效是按次出现的，因此，次序统计量理论在分析寿命试验数据中起着重要的作用．同时，由于这类试验在某种意义上往往是非常昂贵的，所以，适用于好多应用场合的大子样理论和有关的极限定理，在这里必须非常慎重地加以使用．

用于分析寿命数据的统计方法的文献散布在许多专业杂志中：Annals of Mathematical Statistics, Journal of the American Statistical Association Technometrics, Naval Research Logistic Quarterly, and I.E.E.E Transactions on Reliability等等．巴罗和普罗西安（Barlow和Proschan 1965）探讨了可靠性发展历史并引证了这些参考文献．上面列举的杂志是以熟练掌握各种数学知识的读者为对象的，因而其中的许多可靠性知识不能为从事实际工作的工程师、统计学者、学生，以及研究工作者所取得．本书就是为了适当地兼顾这两个方面而写的．它介绍了对失效时间或寿命时间数据作有效利用的统计方法．

1.2　目的和范围

本书企图作为：（a）学校的研究生学习可靠性统计方法课程的入门教科书，（b）从事可靠性的实际工作者和研究人员或关心寿命数据分析的人员的参考书．为此，我们试图使本书做到完整并尽可能地吸收最新的材料．但是，对于可靠性的统计理论的某些新的结果，由于它们的深奥和相当专门化的特点，这里还没有包括甚至没有提到．

本书共有十章．第二、三章试图分别给出概率和统计以相当简洁的论述．把这两章包括在此，主要是使本书多少能够自成体系，尽管许多读者在概率和统计方面已经有了一些基础．第三章包括与后来正文发展有关的统计理论的一些专题．对于接触统计不多的使用者来说，有选择地阅读第三章的内容是有裨益的．

本书的核心部分从第四章的统计失效模型开始。这一章的特点是从考虑某些内在的物理过程来导出常用的失效（概率）分布。学习这一章将使读者具备寻求或研究许多特殊情况的失效分布的能力。

第五章给出第四章中许多模型的参数的点估计和区间估计的方法。第六章与第五章有紧密联系，讨论了可靠性假设检验，并特别论述了在给定风险的前提下，确定样本容量的问题。

第七章考虑可靠性中某些专题和某些非参数方法。非参数方法在可靠性中起着重要的作用，许多内容非常广泛的可靠性数学理论是在非参数方法的基础上发展起来的。第七章给出了这一理论的提要，还介绍了带未知参数的各种失效分布的数据的拟合检验方法及用蒙特卡洛法由计算机产生统计分布的技术。

第八、九章包括迄今尚未在教科书或其它综合形式中出现过的材料。第八章论述可靠性的贝叶斯方法。第九章讨论加速寿命试验的推断。贝叶斯方法已相当广泛地用于可靠性分析，尤其是在（美国）国防部的机构中。因此，有必要对这个题目专辟一章。从经济的观点来看，加速寿命试验是很重要的，可以预料，随着分析这种试验结果的技术的发展，将来的寿命试验多数将是加速的。希望第九章能相当完整地包括至今一切有意义的结果。

第十章是关于系统可靠性。它包括许多人可能认为是纯粹概率的一些材料。包含这些材料的目的是为了完整性及使读者在分析系统可靠性问题方面具有某些深入理解的能力，第十章的其余部分论述分析系统可靠性的有用的统计技术。

在各章的末尾（有时是一节之后）提供了一些习题。其中有些习题是想帮助读者较熟练地运用书中的方法，有些习题是为了给出书中一些材料的证明，还有一些习题则是对正文材料的扩充。由于可取得的文献相当丰富，所以有必要将某些材料纳入习题。

参 考 文 献

Barlow, R.E and F.Proschan(1965) Maithematical of Reliability, John Wiley and Sons, New york.

第二章 概 率 论 基 础

本书1．1节给出了可靠性的一个定义．从这个定义可以清楚地看到概率论在研究可靠性中所起的重要作用．这一章的目的是使读者熟悉概率论中一些常用的方法．然而，这里所介绍的内容并不完整也不详细，而且所介绍的方法仅与可靠性应用有关．希望学习这章后，能给读者以概率论方面的实际工作的知识，以便很快进入本书的中心内容．

概率论是与研究随机现象的分析方法有关的．“一个**随机现象**是由一个这样的特性所刻划的实验现象：即它的观察在一组给定的条件下并不总是出现相同的观察结果，而是在具有**统计规律性**的方式下出现不同结果”（Parzen 1960）．事实上，概率论是与能够作出具有某一已知或假设条件的随机现象的陈述有关的．为了提出有关随机现象的公理，我们引入随机现象的样本描述空间的概念．一个样本描述空间是现象的所有可能结果的描述的集合．

由上述，显然人们要求更多地了解集合和它们的特性．2．1节就是企图提供这个内容．在进入2．1节之前，将指出一个在可靠性中感兴趣的随机现象的例子．

产品中某单元的寿命是一个随机现象．这里，关键的思想是：把某个元件进行寿命试验之前，试验的精确结果是无法预言的．

另一个涉及随机现象的例子是上述随机寿命是否超过某个固定数T．如果观察到随机寿命超过T，当然这意味着该元件继续工作到时间T．

对上述两类的随机现象，本书将作详细的研究．

2.1 集 合 论 基 础

一个集合是一组称为元素的事物．组这个字是不明显地用成为集合或集体中的成员按照规定所应有的性质来定义的．在本书中，集合用一个大写字母如A来表示．而它的元素将用小写字母来表示．

例：假定A是正偶数的集合，即

$$A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

A也可写成

$$A=\{y: y=2I,\ I\text{是正整数}\}.$$

在以上两种情况中的一种，A中成员所应有的性质，即定义组的性质是y必须是一个正偶数．

定义：

1．y是集合A的一个元素，并记作$y\in A$．

2. 若集合A_1的每个元素也是另一个集合A_2的元素，则称A_1为A_2的子集，并记作$A_1 \subset A_2$。

3. 集合的相等。如果$A_1 \subset A_2$，且$A_2 \subset A_1$，就说$A_1 = A_2$。

4. 讨论中所有元素的全体有时称为宇宙或空间，并用S表示。

例：设S是正、负整数的集合，即

$$S = \{y: y = \pm I,\ I\text{是正整数}\}$$

那么，正整数的集合，譬如记作A_1，是满足$A_1 \subset S$。上述例子中的A是满足$A \subset A_1 \subset S$。

5. 集合$\overline{A}$表示A是不属S的元素，并称$\overline{A}$为A等于S的余集。

例：上述例子中的A_1的余集$\overline{A}_1$是负整数的集合。在讨论某给定的集合A和它的余集$\overline{A}$时，重要的是确定S。例如，如果$A = \{y: 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\}$，$S = \{y: 0 \leqslant y \leqslant 2\}$，那么，$\overline{A} = \{y: \frac{1}{2} < y \leqslant 2\}$。但是，如果$S = \{y: 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，那么$\overline{A} = \{y: \frac{1}{2} < y \leqslant 1\}$。

6. 没有元素的集合称为空集或零集，并以$\varnothing$符号表示。

通常，集合中的元素的数目是无关紧要的，但是，三种情况应予指明。

a. 有限集。有限集的元素能与正整数的集合1，2…，n建立1—1对应。其中n是有限的。

例：$A = \{y: y = 2, 4, 6, 8, 10\}$；那么，元素的数目是5。

b. 可数无限集。这类集合的元素能与正整数建立1—1对应。

例：$A = \{y: y = 2I,\ I\text{是正整数}\}$，即让I对应于2I，我们看到A的元素能和正整数I的集合1—1匹配，因此A是可数无限的或简称可数的。

c. 不可数集。这些是不属上述两类中任一类的集合。

例：$A = \{y: 0 \leqslant y \leqslant 1\}$。

对集合定义两个基本运算。

1. 集合的并。$A_1 \cup A_2$是属于A_1或A_2或属于两者的元素的集合。

例：如果$A_1 = \{0 \leqslant y \leqslant 1\}$，$A_2 = \{\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\}$，那么

$$A_1 \cup A_2 = \{0 \leqslant y \leqslant \tfrac{3}{2}\}$$

注意并运算是组成新集合的一种手段。并运算应用到任意的集合A_1，A_2，…A_k上去，集合

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

是明确定义了的。并且，即使集合A_i的个数是可数无限的。

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

依然是明确定义了的。

2. 集合的交。$A_1 \cap A_2$是既属于A_1又属于A_2的元素的集合。

例：如果$A_1 = \{0 \leqslant y \leqslant 1\}$，$A_2 = \{\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\}$，那么

$A_1 \cap A_2 = \{\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\}$。

再则，交$A=\bigcap_{i=1}^{k}A_i$和$A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$

是明确定义了的。它是由同时属于每个集合A_i的元素组成的集合。

应用上面给出的定义和刚定义的二种运算，我们能够容易地建立下列结果：

a. $A\bigcup A=A$.

b. $A\bigcap A=A$.

c. $A\bigcup S=A$.

d. $A\bigcap S=A$.

e. 若$A_1\subset A_2$，则$A_1\bigcap A_2=A_1$.

f. $A\bigcup\overline{A}=S$.

g. 若$A_1\subset A_2$，则$\overline{A}_2\subset\overline{A}_1$.

h. $A\bigcap\overline{A}=\varnothing$.

i. $\varnothing\subset A$，A是任意集合.

j. $A\bigcup\varnothing=A$.

k. $A\bigcap\varnothing=\varnothing$.

上面的证明留给读者作习题。

集合的成功的运用要求使用合乎规则的符号。例如，如果$A=\{1, 2, 3\}$，那么，A有且仅有三个元素。集合$A_1=\{1, 2\}$是A的一个子集，但不是A的一个元素。事实上，具有n个元素的集合有2^n个子集（见本章结尾的习题）。对于$A=\{1, 2, 3\}$，它有$2^3=8$个子集：

$A_1=\{1, 2, 3\}$，　　$A_5=\{1\}$，

$A_2=\{1, 3\}$，　　$A_6=\{2\}$，

$A_3=\{1, 2\}$，　　$A_7=\{3\}$，

$A_4=\{2, 3\}$　　$A_8=\varnothing$.

注意A的成员元素3与A的子集$\{3\}$之间有基本的差别。元素3没有子集，而集合$\{3\}$有一个元素，即3，且有$2^1=2$个子集，即$\{3\}$和$\varnothing$。集合的一个重要运算是任何集合写成不相交集合的并。例如，如果A_1和A_2是两个集合，容易证明

$$A_2=(A_2\bigcap A_1)\bigcup(A_2\bigcap\overline{A}_1).$$

2.2 样本描述空间，随机变量和概率的定义

2.2.1 样本描述空间和随机变量

假定对于任一指定的实验或试验，所有可能结果的集合是能够区别的，但未必能一一列举。这个结果的集合称为**样本描述空间**。应该指出：对于这个试验，S是完全的，即S包括所有可能的结果。S中的结果也可看作基本结果，因为没有一个单一的结果包含多于一个可观察的结果。S的结果也是互不相容的，因为对任一指定的实验，一次有且仅有S中一个结果出现。当S的结果不是数值时，在样本描述空间S上定义一个数值函数常常是有益的。

例1．设一件产品从时间0开始工作并观察T个单位时间，看它是否在整个时间T内工作还是未在工作。因此，S是由两个结果组成：

A_1=产品工作了T个单位时间；

A_2=产品未工作T个单位时间。

S上的一个数值化函数可定义如下：

$f(A_1)=1$（产品工作了整个时间T），

$f(A_2)=0$（产品没有在整个时间T内工作）；

从而得到一个由元素（1，0）组成新的样本描述空间。是否有必要构造这样一个函数完全看具体的情况。这点将在以后作更详细的讨论。

例2．设一件产品在连续时间监测下工作并记录其寿命x，那么

$$S=\{x: 0\leqslant x<\infty\}.$$

这仅表明寿命可以是零与无限之间的任一实数这个事实。可以看到S的结果是数值化的，集合S是无限不可数的。

这两个例子阐明反复出现的两类可靠性问题。第一类问题仅关心寿命是否超过某固定时间T；而第二类关心的是寿命的精确值。

定义：

一个随机变量是定义在样本描述空间上的一个数值函数。

通常该函数就是恒等函数。在这一情况中，随机变量的值可看成样本描述空间的元素。

一个事件是样本描述空间的任一子集。

如果一个事件A_1的出现排除另一个事件A_2的出现，即如果$A_1\cap A_2=\varnothing$，则称事件A_1和A_2是互不相容的。

如果A_1和A_2是任意二个事件，$A_1\cup A_2$意味着A_1或A_2或A_1和A_2两者，而$A_1\cap A_2$意味着A_1和A_2。

例：假定扔二个六面体的骰子。令A_1是面上数字之和为7这一事件；A_2是恰好其中一个的顶面上出现2的事件。$A_1\cup A_2$是这样的事件：和是7或者一个顶面上的恰好出现2或者两者兼有，而$A_1\cap A_2$是顶面上的和是7且恰好一个顶面上是2这一事件。在这个例子中，应注意S_2的元素是随机变量对。

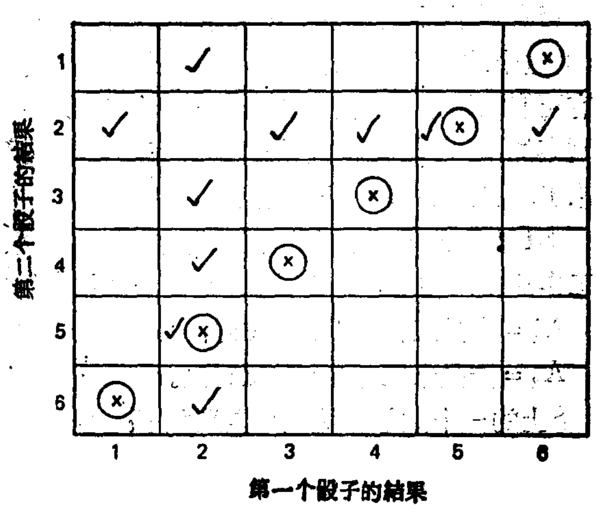
事件A_1是样本描述空间S_1的子集

$$S_1=\{x: x=2,\ 3,\ 4\cdots,\ 12\}$$

其中x是两个顶面上点子的和。事件A_2是样本描述空间S_2的一个子集。

$$S_2=\{(x_1,\ x_2): (1,\ 1)\ (1,\ 2),\ \cdots(6,\ 6)\}$$

其中x_1表示第一个骰子顶面上出现的点子，x_2表示第二个骰子顶面上出现的点子。不难看出，S_2由36个元素组成，而S_1是由11个元素组成的。仔细考察S_1，可看出它是派生的样本描述空间，即骰子上出现的不是和数，而需要一种机械的操作（加）以得出S_1。事实上，S_1中的点子为S_2的点子所代表。



右表是S_2的表格式的表示，那些

“⊗”表示36个可能的元素中的和为7的那些元素（即事件A_1中的）。事件A_2是用“✓”表示的。因此36个中有6个元素（6个⊗）表示A_1，10个元素表示A_2，还可看到，样本描述空间S_2非常整齐地定义了所有可能的结果。再回到$A_1 \cap A_2$和$A_1 \cup A_2$两个事件，从表中可看到，事件$A_1 \cap A_2$是由含“✓”和“⊗”两者的方格所表示，共有二个这样的元素，即（2，5）和（5，2）。事件$A_1 \cup A_2$是由含“✓”或“⊗”号或两者的方格所表示。这样的元素有14个，这能够从表中直接读出或算出如下

（10个“✓”）+（6个“⊗”）-（2个“✓”和“⊗”）

最后2个要减去是因为含“✓”和“⊗”两者的方格被算了二次——一次是在算“✓”时，一次是在算“⊗”时。习题2.4中将看到（De Morgan's法则）$\overline{(A_1 \cup A_2)} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$，该法则在这里是容易给予验证的。$\overline{(A_1 \cup A_2)}$是表中由不含符号的那些方格所表示的元素集（36－14＝22个）。

2.2.2 概率的定义

从实用的观点来看，对概率的如下解释似乎是最实用的。

设S是样本描述空间，A是S的一个事件。现考虑n次的重复试验，其结果为S所描述。设X是在n次重复试验中A出现的次数，那么事件A的概率〔记为P（A）〕定义为

$$P(A) \equiv \lim_{n \pm \infty} \left(\frac{X}{n}\right) \tag{2.1}$$

应注意的是对于固定的n，量（X/n）是A出现的相对频率。由于让$n \to \infty$（即做无限多次试验）在实际上是不可能的，因此许多概率和统计方法论述如何估计P（A）这个问题。许多场合，通过观察样本描述空间S常能看出极限（2.1）是什么。

例．设试验是随机地扔一颗匀称的六面骰子。那么，随机变量是所出现的数字，且

$$S = \{x : x = 1, 2 \cdots 6\}.$$

如果A≡是某次扔骰子2朝上这一事件，那么

$$P(A) = \lim_{n \pm \infty} \left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{6}.$$

换言之，如果样本描述空间的每个结果是等可能的，那么，

$$P(A) = \frac{\text{S中对应于A的元素数}}{\text{S中元素的总数}} \tag{2.2}$$

在骰子的例中，

$$P(A) = 1/6$$

数学上，一个事件A的概率P（A）是定义在S的任意子集A上的函数，它满足：

（i）$P(A) \geq 0$；

（ii）$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，如果对每个i、j，$i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$；

（iii）$P(S) = 1$

显然，定义（2.1）满足这三条性质。

用文字来表达，上述条件意味着概率函数总是在0与1之间；互不相容的事件的并

的概率是各个事件的概率的和；以及S中的一个结果总会出现的。上述条件（i），(ii)和（iii）被作为概率论的公理。这些公理导出了若干重要法则。

法则1，加法，对任二个事件A_1和A_2有

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

证明：事件A_1，A_2及它们的余能够同时被观察，并且也可以无遗漏地用$A_1 \cap A_2$，$A_1 \cap \bar{A}_2$，$\bar{A}_1 \cap A_2$或$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$表示出来，这四个事件还是互不相容的，因此，

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)$$

应用公理（ii）得到

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) \qquad (2.3)$$

然后注意（集合A_1相对A_2的分解，将是相同的运算。）

$$A_1 = (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$
$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cup \bar{A}_1).$$

于是

$$P(A_1) = P(A_1 \cup \bar{A}_2) + P(A_1 \cap A_2) \qquad (2.4)$$
$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \bar{A}_1). \qquad (2.5)$$

因此，由（2.3）和（2.4）

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2),$$

但由（2.5）$P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$所以

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

详细地给出这一简单的证明是为了阐明求一个事件的概率的重要方法，把事件分解成互不相容的形式。

例。考虑2.2.1节骰子的例子，如上，设A_1表示顶面上的和是7的事件，A_2是恰好一个顶面上出现2的事件。那么，应用加法法则直接得出

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

并利用公式（2.2）给出

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} - \frac{2}{36} = \frac{7}{18}.$$

用分解公式（2.3）也能导出答案：

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{8}{36} = \frac{7}{18}.$$

法则2。不等式、若$A_1 \subset A_2$，即若事件A_1蕴含事件A_2，则$P(A_1) \leqslant P(A_2)$。在精确概率是未知的或不能计算时，这个结果能给出一个事件的概率的有用的界限。

证明：这个证明再次表明把一个事件分解成互不相容的形式的重要性。

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \bar{A}_1),$$

但是，由假设$A_1 \subset A_2$，显然$A_1 \subset A_2 \cap A_1$，并且，无论何时$A_1 \cap A_2$发生，A_1也发生。所以

$$A_1 = A_2 \cap A_1, \quad A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1).$$

因此，应用公理（ii），$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap \bar{A}_1)$。这意味着$P(A_2) - P(A_1)$

$=P(A_2\cap\bar{A}_1)$。但是，由公理（i），每个P是$0<P$。于是$P(A_2)-P(A_1)=P(A_2\cap\bar{A}_1)\geq 0$，因此$P(A_2)\geq P(A_1)$。

法则3. 对任一事件A，$P(A)+P(\bar{A})=1$。

证明：样本描述空间S可分解为$S=A\cup\bar{A}$，且A和$\bar{A}$互不相容。于是，应用公理（ii）便得到

$$P(S)=P(A)+P(\bar{A}),$$

但由公理（iii），$P(S)=1$，所以

$$1=P(A)+P(\bar{A}).$$

法则4. $P(A\cap\bar{A})=0$。事件$A\cap\bar{A}$有时称为不可能的事件。

证明. 应用法则1，得到

$$P(A\cup\bar{A})=P(S)=P(A)+P(\bar{A})-P(A\cap\bar{A})$$

然后利用公理（iii）和法则3给出

$$P(S)=1=1-P(A\cap\bar{A})$$

所以

$$P(A\cap\bar{A})=0.$$

法则5. 如果两个事件A_1和A_2是互不相容的，则$P(A_1\cap A_2)=0$。

证明. 应用法则1得到

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2),$$

但利用公理（ii）得出

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

因此

$$P(A_1\cap A_2)=0.$$

定义：

已知A_2出现的条件下，A_1的条件概率$P(A_1|A_2)$定义为

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}\qquad \text{如果}P(A_2)\neq 0$$

若$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)$，则称$A_1$和$A_2$是独立的。

例. 扔一个普通的六面骰子，设A_1是顶面出现的数≥ 2的事件；A_2是顶面恰好出现5的事件。计算$P(A_2|A_1)$。应用定义得到

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)},\ P(A_1)\neq 0$$

显然

$$P(A_1)=P(\text{顶面出现}2+\text{顶面出现}3)+\cdots+P(\text{顶面出现}6)=\tfrac{5}{6}$$

又因

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1|A_2)P(A_2)$$
$$P(A_2)=\tfrac{1}{6};\ P(A_1|A_2)=1.$$

因此，

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6}, \quad P(A_2 \mid A_1) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}.$$

这个例子说明一个经常出现的情况：在计算$P(A_2 \mid A_1)$时，通常的困难是看不出$P(A_1 \cap A_2)$是什么，但利用关系式

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \mid A_2)\,P(A_2)$$

可以求得$P(A_1 \cap A_2)$.

2.3 组合分析初步

因为公式（2.2）对能点数出样本描述空间S中的元素及对应的一个任意事件中的元素常是有用的，为此，需要某些点数法则．它们全都可由一个法则推出．

法则．如果事件A_1能以a_1种方式出现，事件A_2能以a_2种方式出现，则事件$A_1 \cap A_2$能以$a_1 a_2$种方式出现．

例．考虑一个由N个单元组成的系统，每一个单元具有二种状态：工作和不工作．这个系统相对于它的N个单元，总共有不同状态数

$$2 \times 2 \times 2 \times \cdots N\text{次} = 2^N.$$

2.3.1 排列与组合

考虑N个可辨别的物体并假定从中选择了x个（$0 \leqslant x \leqslant N$）构成一个集合．问有多少不同的集合能被挑选？如果重复应用上述法则，那么第一个物体能有N种挑选方式；第二个物体能有$N-1$种挑选方式（因为仅剩下$N-1$个可供挑选第二个物体）等等．最后，第x个物体必定从剩下的$N-(x-1)=N-x+1$个物体中挑选．于是，从N个可辨别的物体中挑选x个物体有

$$N(N-1)(N-2)\cdots(N-x+1) \tag{2.6}$$

不同方式．

重要的是要明确如何理解“不同”．按上面的构造方法，即使两个集合包含相同的物体，它们也许是不同的集合．只要挑选的次序是不同的，这些集合便认为是不同的集合．

例1．假定可辨物体是字母a，b，c，d．又假定$x=2$，即从四个物体取出二个，问能够构成多少种不同的集合．公式（2.6）给出的答案是

$$N(N-1)\cdots(N-x+1) = 4 \times 3 = 12.$$

这12种集合可列出如下：

ab，ac，ad，bc，bd，cd，

ba，ca，da，cb，db，dc.

例1的两个方面是重要的．

1．如果集合包含不同物体或者即使包括相同的物体，但选择的次序不同，则它们是认为不同的．这样一些集合称为排列．

2．有时点数排列实际上是不可能的，而必须用（2.6）代之．