



计算方法丛书

刚性常微分方程 初值问题的数值解法

袁兆鼎 费景高 刘德贵 著



科学出版社

内 容 简 介

本书叙述了在计算机上求解刚性常微分方程的初值问题的数值解法, 提供了处理刚性常微分方程的基本思想和对方法进行理论分析的基础。本书内容包括: 刚性常微分方程的问题举例和数值方法的稳定性理论, Runge-Kutta 方法及其推广, Padé 近似的处理方法和结果, 单步方法和多步方法等。

本书可供高等院校有关专业的师生、计算数学工作者、工程技术人员参考。

计算方法丛书 刚性常微分方程初值问题的 数值解法

袁兆鼎 费景高 刘德贵 著
责任编辑 林 鹏 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年11月第一版 开本: 850×1168 1/32

1987年11月第一次印刷 印张: 15 3/4

印数: 0001—3,000 字数: 415,000

统一书号: 13031·3912

本社书号: 5142·13-1

定价: 4.45 元

《计算方法丛书》编委会

主 编 冯 康

副主编 石钟慈 李岳生

编 委 王仁宏 王汝权 孙继广 何旭初 吴文达

李庆扬 李德元 林 群 周毓麟 席少霖

徐利治 郭本瑜 袁兆鼎 黄鸿慈 蒋尔雄

雷晋干 滕振寰

序 言

自然界和工程技术中的很多现象,例如自动控制系统的运行、电力系统的运行、飞行器的运动、化学反应的过程、生态平衡的某些问题等,其数学模型是常微分方程(组)的初值问题。很多偏微分方程也可以化为常微分方程组的初值问题求近似解。一般说来,常微分方程(组)的数值解法是比较成熟的,理论比较完整,也有很多方法可供选择。但是,有一类常微分方程组,在求数值解时遇到相当大的困难,这类常微分方程组解的分量有的变化很快,有的变化缓慢。常常出现这种现象:变化快的分量很快地趋于它的稳定值,而变化慢的分量缓慢地趋于它的稳定值。从数值解的观点看来,当解变化快时应该用小步长积分,当变化快的分量已趋于稳定,或者说已没有变化快的分量出现时,就应该用较大的步长积分。但是理论和实践都说明,很多方法,特别是显式方法的步长仍不能放大,否则便出现数值不稳定现象,即误差急剧增加,以致掩盖了真解,使求解过程无法继续进行。

常微分方程组的这种性质叫做刚性(Stiff),这一问题近二十年来引起了很多计算数学工作者的重视,他们从理论上探讨这类问题的实质,并从各个角度寻求适用的数值解法。关于刚性已有公认的数学定义,也建立了数值稳定性和稳定区域的概念,并且发表了大量数值解法的论文,取得了许多研究成果,在这里特别应当提到 G. Dahlquist, J. C. Butcher, C. W. Gear 等人,他们都做了重要的工作。

六十年代初,在我们的工作中也发现了这个问题。我们和其他单位的同志都做过一些工作。本书第一、十一、十二这三章主要是我们多年来在实际工作中的一些经验的总结。

刚性常微分方程组数值解法的研究还有很多问题尚待解决。

非线性问题数值稳定性的研究刚开始,在解各种实际问题,特别是复杂的大系统问题时,需要有更适用的算法,同时也需要研究各种相关的问题。

这本书介绍了刚性常微分方程组初值问题数值解法的一些基本的研究成果和实际构造算法的思路,并给出一些研究和构造算法的背景材料,以便于实际解题的技术人员参考,本书也可作为在这个领域开始工作的计算数学和数学工作者的读物。

本书共十三章。第一章是对刚性常微分方程的概念和常用的数值稳定性定义的总的叙述,第二章介绍解刚性常微分方程线性多步法的稳定性理论。这两章是阅读本书的基础。第四章介绍了与刚性常微分方程数值解法研究有关的 Padé 近似的一些处理方法和结果。第三章、第五章至十三章均是介绍刚性常微分方程数值解法和处理的思想。

本书利用了国内外许多作者的材料,审校者和出版社的同志也提出了许多很好的意见,在此表示感谢。由于作者水平所限,缺点和错误在所难免,欢迎读者批评指正。

作者

1984 年春

目 录

第一章 引论	1
§ 1 刚性常微分方程.....	1
§ 2 常用的稳定性定义.....	12
§ 3 一些刚性方程的例子	17
§ 4 稳定区域的计算	25
第二章 线性多步公式的稳定性	31
§ 1 线性多步公式.....	31
§ 2 线性多步公式的 A 稳定性.....	33
§ 3 线性多步公式的 $A(\alpha)$ 稳定性.....	42
§ 4 线性多步公式的 A_0 稳定性.....	48
§ 5 线性多步公式的刚性稳定性.....	57
第三章 向后差分方法	63
§ 1 向后差分公式.....	63
§ 2 向后差分公式的稳定性.....	76
§ 3 求解刚性方程的数值方法的计算危险性问题.....	86
§ 4 广义向后差分公式.....	92
§ 5 应用二阶导数的 Enright 方法.....	100
第四章 e^z 的有理分式近似	112
§ 1 Padé 近似和可接受性	112
§ 2 e^z 的 Padé 近似的零点和极点	119
§ 3 e^z 的有理近似在虚轴上的模	126
§ 4 A 可接受性	134
第五章 指数拟合方法	139
§ 1 指数拟合方法.....	140
§ 2 应用广义 Hermite-Birkhoff 内插的指数拟合多步方法.....	149
§ 3 矩阵多步方法的指数拟合.....	162
§ 3.1 积分公式的推导.....	163

§ 3.2	稳定性分析	167
§ 3.3	局部截断误差分析	171
§ 3.4	矩阵 Q 的选取	174
§ 4	一类特殊刚性方程的修正线性多步方法	175
第六章	Richardson 外插方法	186
§ 1	截断误差的渐近展开式	186
§ 2	Richardson 外插方法	201
§ 3	利用梯形法的整体外插	210
§ 4	平滑过程	214
§ 5	用内插法求中间点上高精度近似值	218
§ 6	应用平滑和外插的隐式中点方法	224
§ 7	利用梯形公式局部外插的数值方法	229
第七章	具有可变系数的线性多步方法	236
§ 1	具有可变矩阵系数的多步方法	236
§ 2	稳定化方法的阶	241
§ 3	可变系数多步方法的稳定性分析	244
§ 4	A 稳定方法的例子	253
第八章	边界层方法	259
§ 1	奇异摄动问题的解的渐近展开式	259
§ 2	边界层型数值方法	269
§ 3	渐近变换方法	278
§ 3.1	导数的拟稳定性	278
§ 3.2	非线性刚性系统导数的拟稳定性	287
第九章	隐式 Runge-Kutta 方法	297
§ 1	隐式 Runge-Kutta 公式	297
§ 2	隐式 Runge-Kutta 方法的 A 稳定性	310
§ 3	隐式 Runge-Kutta 方法的其他稳定性	314
第十章	隐式 Runge-Kutta 方法的实现	327
§ 1	等效代换的迭代方法	327
§ 2	修改的 Newton 迭代方法	331
§ 3	对角线隐式 Runge-Kutta 方法	334
§ 4	Rosenbrock 的半隐式 Runge-Kutta 方法	341

§ 5 Butcher 矩阵变换及相应的方法	345
§ 6 广义 Runge-Kutta 方法	355
第十一章 组合方法	359
§ 1 例子	359
§ 2 基本算法公式	361
§ 3 方法的收敛性和误差阶	369
§ 4 稳定性分析	378
第十二章 自动控制系统常微分方程组的数值解法	391
§ 1 问题的提出	391
§ 2 计算稳定性	397
§ 3 右函数中避免导数的计算	402
§ 4 框图的变换	409
§ 5 非正规格式的计算稳定性	411
§ 6 其它问题的处理	413
第十三章 处理刚性方程的一些其它方法	417
§ 1 等效系统替代方法	417
§ 2 光滑近似特解方法 (SAPS)	424
§ 3 一类非线性方法	431
§ 3.1 方法 I	432
§ 3.2 方法 II	435
§ 3.3 方法 III	437
§ 3.4 方法 IV	438
§ 3.5 方法 V	441
§ 4 矩阵分解方法(系统方法)	442
§ 4.1 线性系统的数值求解方法	442
§ 4.2 矩阵分解方法	453
§ 5 线性多步平均算法	463
§ 6 块方法	475
参考文献	489

第一章 引 论

本章介绍刚性常微分方程的概念,描述用数值方法解这种方程时遇到的困难. 我们还将列出对刚性方程的数值解法进行分析时常用的一些稳定性定义,并给出几个不同学科中出现的刚性方程的简单的例子. 最后叙述稳定性区域的计算方法.

§ 1 刚性常微分方程

在可以用常微分方程来描述的许多实际的物理或化学过程中,往往包含许多复杂的子过程及它们之间的相互作用,其中有的子过程表现为快变化的,而另一些相对来说是慢变化的,并且变化速度可以相差非常大的量级. 相应地,描述这些过程的常微分方程的解中也将包含快变分量和慢变分量. 如果在一个过程中的快变子过程与慢变子过程的变化速度相差非常大,在数学上称这种过程具有刚性 (Stiff), 而描述这种过程的常微分方程称为刚性方程.

为精确地描述过程的刚性性质,考虑线性系统

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + \phi(t), \quad (1.1)$$

其中 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ 是待求的 t 的 m 维向量函数, 而 $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t))^T$ 是已知的向量函数, t 是独立变量, 可看成是时间, A 是 $m \times m$ 矩阵. 不失一般性, 假定矩阵 A 的 Jordan 标准型是对角矩阵, 其特征值为

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

相应的特征向量记成 ξ_k . (1.1) 的解有形式

$$y(t) = \sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \psi(t). \quad (1.2)$$

假定 $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, 即(1.1)是渐近稳定的. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} \xi_k \rightarrow 0$, 则称 $\sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} \xi_k$ 为(1.1)的暂态解, 而称项 $\psi(t)$ 为稳态解. 各个 $e^{\lambda_k t}$ 称作(1.1)的齐次方程组的解分量(简称解分量).

暂态解 $\sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} \xi_k$ 可以表示成解分量

$$u_k(t) = e^{\lambda_k t} = e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t} \quad k = 1, \dots, m$$

的线性组合. 实部 α_k 确定 $u_k(t)$ 的衰减特性, 而虚部 β_k 确定这个量的振荡特性. 对于一个稳定系统, λ_k 的实部 α_k 一定是负的. 工程上称量 $\tau_k = -1/\alpha_k$ 为时间常数, 用它来表征量 $u_k(t)$ 的衰减速度. 因为每经过时刻 τ_k , $e^{\alpha_k t}$ 衰减 e^{-1} 倍, 即约 $\frac{1}{3}$ 倍, $-\alpha_k$ 越大衰减越快. $e^{i\beta_k t}$ 的振荡频率为 $\beta_k/2\pi$, β_k 越大, 振荡越快. 一般 $u_k(t)$ 是衰减的或振荡衰减的, 但各个 $u_k(t)$ 的衰减速度之间的差异可能是很大的, 这由刚性比来刻画.

定义 1.1 (Lambert^[67]) 线性系统(1.1)称作是刚性方程, 如果有

(i) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$,

(ii) $r = \max_{k=1, \dots, m} |\operatorname{Re} \lambda_k| / \min_{k=1, \dots, m} |\operatorname{Re} \lambda_k| \gg 1$,

比值 r 称作刚性比.

根据这个定义, 我们来描述刚性方程所具有的一些性质.

(i) 刚性方程是渐近稳定的, 解曲线从不同的初值都将趋向于它的稳态解. 但各个解分量的衰减特性是不同的. 衰减快的称作快变分量, 衰减慢的称作慢变分量. 刚性方程的解曲线将很快衰减到由慢变分量所确定的解曲线上. 例如, 考虑二阶齐次方程

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

它的解有形式 $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ 其中 c_1 和 c_2 是二个任意常数, 由初始条件确定, λ_1 和 λ_2 是它的特征方程的根, 即

$$\lambda_1 \approx -\frac{1}{\mu} + 1 + \mu,$$

$$\lambda_2 \approx -1 - \mu.$$

当 $\mu > 0$ 很小时, $y(t)$ 将很快地衰减到解曲线

$$\tilde{y}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

因此刚性方程的解曲线可分为二段, 开始的一段为快变段, 解曲线中的快变部分迅速地衰减到可忽略的程度, 将快变段称作边界层, 其所经历的时间记作 τ_{BL} , 一般它取为快变分量衰减到原来的 $\frac{1}{20}$ 时的时间, 即取 $\tau_{BL} \approx 3/|\operatorname{Re} \lambda_i|$. 另外一段是慢变段, 或称边界层外的段, 它由 $|\operatorname{Re} \lambda_i|$ 较小的解分量来刻画. 当然上面将解曲线的分段是相对的, 例如, 对于特征值为

$$\lambda_1 = -10^5, \lambda_2 = -10^3, \lambda_3 = -1$$

的三个方程的线性方程组, 对 λ_2 来说 $\tau_{BL_2} = 3 \cdot 10^{-3}$, 而对 λ_1 来说 $\tau_{BL_1} = 3 \cdot 10^{-5}$.

(ii) 刚性方程组具有奇异摄动的性质. 由于解曲线中的快变部分在边界层内很快地衰减掉, 在边界层外, (1.1) 的解曲线中所含的量的个数减少, 使得解曲线的各个坐标之间不再是线性独立的, 而存在若干个代数关系式. 利用这些关系式, 可以用低阶的方程组代替(1.1). 为了说明这个性质, 考虑刚性方程组

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = -501y^{(1)} + 500y^{(2)} \quad (1.3)$$

$$\frac{dy^{(2)}}{dt} = 500y^{(1)} - 501y^{(2)}.$$

它的解为

$$y^{(1)}(t) = 0.5[y^{(1)}(0) - y^{(2)}(0)]e^{-1001t} + 0.5[y^{(1)}(0) + y^{(2)}(0)]e^{-t},$$

$$y^{(2)}(t) = -0.5[y^{(1)}(0) - y^{(2)}(0)]e^{-1001t} + 0.5[y^{(1)}(0)$$

$$+ y^{(2)}(0)]e^{-t}.$$

在边界层外近似有等式

$$y^{(1)}(t) = y^{(2)}(t), \quad (1.4)$$

利用这个等式, 可以将二阶方程(1.3)降阶为微分方程

$$\frac{dy^{(2)}}{dt} = -y^{(2)}$$

和代数方程 (1.4) 的代数微分方程组. 这种性质在导数前含有小参数的微分方程组

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{aligned} \quad (1.5)$$

中是常见的. (1.5) 是刚性方程最早的例子之一. 当 $\mu \rightarrow 0$ 时, (1.5) 的解将收敛到退化组

$$\begin{aligned} f(t, \bar{x}, \bar{y}) &= 0, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= g(t, \bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

的解, 可以利用刚性方程组的奇异摄动性质来构造计算方法.

(iii) 定义 1.1 实际上表明矩阵 A 是病态的.

对于非线性系统

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1.7)$$

的刚性性质可以按下面的方式定义. 令 $\tilde{y}(t) (t \in [a, b])$ 为 (1.7) 的满足初始条件 $\tilde{y}(a) = y_0$ 的精确解. 我们在解 $\tilde{y}(t)$ 的邻域中来考察 (1.7) 的解的特性. 在这个邻域中, (1.7) 可以用线性摄动方程

$$\frac{dy}{dt} = J(t)(y - \tilde{y}(t)) + f(t, \tilde{y}(t))$$

或者

$$\frac{dy}{dt} = J(t)y + [f(t, \tilde{y}(t)) - \tilde{y}(t)] \quad (1.8)$$

来近似,其中 $J(t)$ 是在点 $(t, \tilde{y}(t))$ 处计算 $f(t, y)$ 的 Jacobi 矩阵 $\partial f(t, y)/\partial y$ 的值. 如果 $J(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上的变化充分小,则在这个区间上它可以用某一个固定的 $J(t_0)$ 代替, $t_0 \in [a, b]$. 作这样的替代后, (1.8) 具有 (1.1) 的形状. 因此, 在 $[a, b]$ 上 (1.7) 的解可以近似地表成

$$y(t) \approx \tilde{y}(t) + \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t} \xi_i, \quad (1.9)$$

其中 c_i 是常数, λ_i 和 ξ_i 分别是 $J(t_0)$ 的特征值和相应的特征向量, $i = 1, \dots, m$. 这样, 只要在定义 1.1 中用 $J(t_0)$ 的特征值代替 (1.1) 中的矩阵 A 的特征值, 我们就可以定义 (1.7) 在区间 $[a, b]$ 上的刚性性质. 这表示 (1.7) 的刚性性质可以由它的右函数的 Jacobi 矩阵的特征值来定义, 这时定义 1.1 中的刚性比是依赖于 t_0 的, 可以称作局部刚性比. 但是, 非线性微分方程的解的相态是非常复杂的, 这样定义的刚性比并不象对线性方程那样一定能刻画解曲线所具有的性质. 为了说明, 只需考虑三阶变系数线性方程组

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad (1.10)$$

其中当 $t \in [0, 1]$ 时

$A(t) =$

$$\begin{bmatrix} -1 + 100 \cos 200t & +100(1 - \sin 200t) & 0 \\ -100(1 + \sin 200t) & -(1 + 100 \cos 200t) & 0 \\ 1200(\cos 100t + \sin 100t) & 1200(\cos 100t - \sin 100t) & -501 \end{bmatrix},$$

这时矩阵 $A(t)$ 的特征值为常值

$$\lambda_1 = -501, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1.$$

按照上述刚性微分方程的定义, (1.10) 在 $[0, 1]$ 上是刚性方程组, 但实际上 (1.10) 是不稳定的, 其解有形式

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= c_1 e^{99t} \cos 100t + c_2 e^{-101t} \sin 100t, \\ y^{(2)}(t) &= -c_1 e^{99t} \sin 100t + c_2 e^{-101t} \cos 100t, \\ y^{(3)}(t) &= 2c_1 e^{99t} + 3c_2 e^{-101t} + c_3 e^{-501t}, \end{aligned}$$

常数 c_1, c_2, c_3 由初始条件确定。对于大多数工程问题, 用局部 Jacobi 矩阵的特征值可以刻划非线性常微分方程的稳定性, 这方面的结果可参见秦元勋的[10]或许淞庆的[13]。

在实际问题中, 刚性比可高达 10^6 以上的量级。如果 r 的量级为 10, 称作是临界刚性的。

刚性方程在文献中也称作病态方程或坏条件方程, 具有差别大的时间常数问题或具有大的 Lipschitz 常数的问题。这种类型的问题在控制系统工程, 电子网络, 生物学, 物理及化学动力学过程中经常遇到。例如, 在控制系统中, 控制部件一般反应灵敏, 是快变的, 具有小的时间常数, 而受控物体一般惯性大, 是慢变的, 具有大的时间常数。对于宇宙航行中的运载器, 通常是通过控制部件来控制质心的运动。姿态运动是快变的, 而质心运动是慢变的。在多成分的化学反应中, 有些反应速度快, 几乎瞬时就达到稳定状态; 而有些反应速度慢, 两者的差别可以有好几个量级。对于复杂的电子网络, 由于不同的寄生电容的影响, 时间常数也有很大的差异。在传热、扩散、分馏等过程中, 把分布参数离散化成集中参数而得到的常微分方程组经常是刚性方程。在 §3 中, 我们从一些不同的学科选取几个例子来加以说明。

由定义 1.1 可以看到, 刚性性质是数学问题本身的性质, 它不依赖于求解这个问题的数值方法。但是正是由于这个性质, 使得传统的常微分方程的数值积分方法遇到极大的困难。为了克服这个困难, 刚性常微分方程数值积分方法的研究成为数值方法中最活跃的方向之一。

为了说明传统的数值方法求解刚性方程所遇到的困难, 首先把问题做一些简化。假定(1.1)的矩阵 A 的 Jordan 标准型是对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, 即有 $m \times m$ 矩阵 S , 使

$$S^{-1}AS = \Lambda.$$

将 S^{-1} 左乘(1.1), 并令 $z = S^{-1}y$, 得

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z + S^{-1}\phi(t). \quad (1.11)$$

这表示若考虑 y 的某个线性变换的象 $z = S^{-1}y$ 时, z 的 m 个分量各满足一个独立的标量方程

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = \lambda_k z^{(k)} + \phi_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.12)$$

$\phi_k(t)$ 为 $S^{-1}\phi(t)$ 的第 k 个分量. 而 $y = Sz$.

假设 y 的初值 y_0 有一个误差 Δy_0 . 显然(1.1)的解 y 的误差 Δy 满足方程

$$\frac{d\Delta y}{dt} = A\Delta y,$$

即 Δy 满足(1.1)的齐次组

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (1.13)$$

只是初值取 Δy_0 . 同理可得误差 Δy 的象 $\Delta z = S^{-1}\Delta y$ 满足

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z. \quad (1.14)$$

用 Euler 法解(1.1)得到的差分方程组是

$$y_{n+1} = y_n + h(Ay_n + \phi(t_n)). \quad (1.15)$$

假设在某一步有一个误差,以后计算不再有误差,考虑 y_n 的误差 Δy_n 变化的情况. 不失一般性,假定这个误差是初值 y_0 的误差,用同一个符号 Δy_0 表示它. 显然 Δy_n 满足(1.15)的齐次组

$$y_{n+1} = y_n + hAy_n, \quad (1.16)$$

其初值是 $y_0 = \Delta y_0$, 即是用 Euler 法解齐次组(1.13)所得的差分方程组.

类似地取变换 $z_n = S^{-1}y_n$, (1.16)变成

$$z_{n+1} = z_n + h\Lambda z_n, \quad (1.17)$$

初值 $z_0 = S^{-1}\Delta y_0$, 这相当于用 Euler 法解(1.14)所得的差分方程组. (1.14)的 m 个方程

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = \lambda_k z^{(k)}, \quad k = 1, \dots, m,$$

是相互独立的, (1.17)中的 m 个方程

$$z_{n+1}^{(k)} = z_n^{(k)} + h\lambda_k z_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

也互相独立,将上述的处理方法应用到其它的数值积分方法上,也可得到类似的结果。因此,研究(1.1)的数值积分中误差的变化,在很大程度上可以归结为用同一个方法研究标量方程初值问题

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad y(0) = y_0 \quad (1.18)$$

的解的性质。因为工程问题要求 $\text{Re} \lambda < 0$, 所以我们也做这样的假定。这个微分方程叫做试验方程,许多计算稳定性的定义都以它为基础。一般说,当 n 无限增大时,误差无限增加的数值方法是不可用的,而误差趋于零的数值方法是可用的。由于上面的对非线性系统的线性扰动理论的考虑,试验方程对于误差变化即计算稳定性的研究具有很广泛的代表性。

考虑用固定步长的数值方法求解问题(1.18)。令 $h > 0$ 为数值积分的步长, $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots$ 为积分的节点, y_i 为解得的精确解 $y(t_i)$ 的近似值。

定义 1.2 用一个数值积分方法以定步长 h 解试验方程(1.18),当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y_n \rightarrow 0$, 则称用步长 h 的这个数值积分过程为计算稳定的,或简称稳定的,否则称为计算不稳定的。

应当注意,这里定义的是数值积分的计算过程的稳定性。当计算步骤增加时,误差的趋势说明了数值积分方法的可用性。这与物理上描写的运动稳定性是不同的概念。

设应用的数值积分方法是 Euler 公式,则在近似解 y_i ($i = 0, 1, \dots$) 之间有递推式

$$y_{i+1} = (1 + h\lambda)y_i. \quad (1.19)$$

计算开始时,为了使 y_i 能精确地近似 $y(t_i)$, 从精确度的角度要求步长 h 适当的小。但是当 $|y_i|$ 已充分小,可以近似地认为已达到(1.18)的稳定状态时,继续积分(1.18)就不必要求 h 很小。这时积分精度不重要了,只需从数值积分的稳定性要求步长 h 满足不等式

$$|1 + h\lambda| < 1. \quad (1.20)$$

满足不等式(1.20)的量 $q = h\lambda$ 是复平面上的一个有限区域中的点,即属于以-1为中心,以1为半径的圆的内部,见图 1.1.这是对步长的一个约束,在整个数值积分过程中,选取的步长 h 应使 $h\lambda$ 不越出图 1.1 中给出的有限区域。

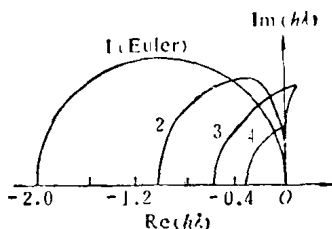


图 1.1 Euler 公式的稳定区域
(只画上平面)

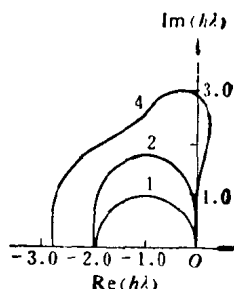


图 1.2 Runge-Kutta 公式的稳定区域
(只画上平面)

类似地,若应用的数值积分方法是四阶显式 Runge-Kutta 方法,得到递推式

$$y_{i+1} = \left[1 + h\lambda + \frac{1}{2} (h\lambda)^2 + \frac{1}{6} (h\lambda)^3 + \frac{1}{24} (h\lambda)^4 \right] y_i, \quad (1.21)$$

选取的步长 h 必须满足不等式

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2} (h\lambda)^2 + \frac{1}{6} (h\lambda)^3 + \frac{1}{24} (h\lambda)^4 \right| < 1, \quad (1.22)$$

满足不等式(1.22)的量 $q = h\lambda$ 也组成复平面上的一个有限区域,即图 1.2 闭曲线的内部。

将上述的有限区域分别称作 Euler 法和 Runge-Kutta 方法的稳定区域。对于一般的递推的数值积分公式,我们引进下面的定义。

定义 1.3 数值积分公式的稳定区域 R 为集合

$R = \{h\lambda \mid \text{以固定的步长 } h > 0 \text{ 将公式应用到方程}$

• • •