算子函数论

李国平　蹇明　著

算子函数论主要研究无穷维空间算子值解析函数，是在经典分析基础上发展起来的一个新方向。这不仅为数学发展之所需且联系着量子场论等物理背景。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY　武汉大学出版社

武汉大学
学术丛书

图书在版编目(CIP)数据

算子函数论/李国平，蹇　明著. 一武汉：武汉大学出版社，
1996. 11
ISBN 7-307-02321-0

Ⅰ. 算…
Ⅱ. ①李…　②蹇…
Ⅲ. ①算子函数论—函数论　②函数论—算子函数论
Ⅳ. O174　O177

武汉大学出版社出版
（430072　武昌　珞珈山）
湖北省孝感日报社印刷厂印刷
（432100　湖北省孝感市城站路 95 号）
新华书店湖北发行所发行
1996 年 11 月第 1 版　　1997 年 6 月第 2 次印刷
开本:850×1168　1/32　印张:8.75　插页:6
字数:222 千字　印数:1001—3000
ISBN 7-307-02321-0/O·171　定价:10.00 元

李国平 中国科学院院士，广东丰顺县人。1910 年 11 月生，1996 年 2 月 8 日病逝，享年 86 岁。1934 年到 1939 年间先在日本东京帝国大学理学部攻读研究生，后赴法国巴黎大学庞加莱研究所工作；其间，因提出半纯函数填充圆的统一理论和半纯函数的波莱尔方向而成名。从 1940 年起，终生执教于武汉大学，为我国培养了好几代优秀数学人才。在函数论的研究中发表论文 80 余篇，主编出版“函数论”、“数学物理”、“系统科学”三套丛书，其中自著或合著的共 18 部。在数学物理领域内研究过如“电磁风暴说”、“数理地震学”以及“一般相对性量子场论”等一系列课题，有的成果已经写成专著出版并受到广泛的重视；是《数学物理学报》的创办人兼主编。

蹇明 1957 年生。1979 年毕业于华中师范大学数学系，1990 年获武汉大学理学硕士学位，继于 1993 年获武汉大学理学博士学位。自 1987 年起师从著名数学家李国平教授，攻读函数论并致力于“算子函数论”的研究，已发表论文十余篇。现任武汉工业大学数学物理系副教授。研究方向为算子函数论并探索解决数理经济学应用领域的实际课题。

算子函數論

李國平自署簽

目錄

第六章

关于解析函数理论算子化的课题

解析函数理论中某些可以演变为 Hilbert 空间上的有界线性算子的解析函数理论将在本章的篇章中宜择其要。

§1. 关于解析函数的 Cauchy 积分公式.

设 $\mathcal{D}_i$ 为复数 z_i-平面上一个可求长简单连续曲线 $\mathcal{C}_i$ 的内域, $i=1,2,\cdots n$.

设 $f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 为乘积区域 $\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2\times\cdots\times\mathcal{D}_n=\mathcal{D}$ 内 n 个复变数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的解析函数而连续于闭区域上则有 Cauchy 积分公式:

$$(1)\quad f(z_1,\cdots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathcal{C}_n}(t_n-z_n)^{-1}dt_n\int_{\mathcal{C}_{n-1}}(t_{n-1}-z_{n-1})^{-1}dt_{n-1}\cdots\int_{\mathcal{C}_1}(t_1-z_1)^{-1}f(t_1,\cdots,t_n)dt_1$$

这个公式有很多不同的写法,在这里我们提出容易算子化的形式.

令 $(t-z)^{-1}$ 表 $\left((t_1-z_1)^{-1},\cdots,(t_n-z_n)^{-1}\right)$

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\cdot\, dt$ 表 $\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_1}\cdot\, dt_1,\cdots,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_n}\cdot\, dt_n\right)$

就 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 定义一个新的乘法"$\circ$": x_i, y_i 为复数

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\circ(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1y_1)(x_2y_2)\cdots(x_ny_n).$$ 不改变次序.

则公式(1)可以写成简式如次:

$$f(z_1,\cdots,z_n)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\cdot\, dt\circ(t-z)^{-1}\right)f(t_1,\cdots,t_n)$$

这样我们就把

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}(\cdot)\,dt\circ(t-z)^{-1}$$ 作为算子.

施此算子于 $f(t_1,\cdots,t_n)$ 就得出 $f(z_1,\cdots,z_n)$. 我们将这算子命名为 Cauchy 算子.

现在我们将 Cauchy 算子加以推广.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Hilbert 空间 H 上的 n 个可交换的有界线性算子,设对每一 $i=1,2,\cdots,n$,

A_i 的谱集全在 $\mathcal{D}_i$ 内(谱集的闭包全在 $\mathcal{D}_i$ 内). $(t_iI-A_i)^{-1}$ 当 t_i 在 $\mathcal{C}_i$ 上时存在而且连续. 因此对于任何 t_i 在 $\mathcal{C}_i$ 的连续函数 $\varphi(t_i)$ 的积分是可定义的: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_i}(t_iI-A_i)^{-1}\varphi(t_i)\,dt_i$ 也就是有意义的, 这里的 i 可取值 $1,2,\cdots,n$.

于是我们就可以将 Cauchy 算子推广为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}(\cdot)\,dt\circ(t\mathbf{I}-A)^{-1}$$

之形, 其中

$$A=(A_1,\cdots,A_n),\quad t\mathbf{I}=(t_1I,\cdots,t_nI).$$

施推广的 Cauchy 算子于解析于 $\mathcal{D}$ 内而连续于 $\mathcal{D}+\mathcal{C}$ 上的函数 $f(t_1,\cdots,t_n)\equiv f(t)$, $t=(t_1,\cdots,t_n)$. 则得出

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}f(t)\,dt\circ(t\mathbf{I}-A)^{-1}$$

它被定义为 $f(A_1,\cdots,A_n)$ 简写为 $f(A)$:

$$(2)\quad f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}f(t)\,dt\circ(t\mathbf{I}-A)^{-1}.$$

此式展开来就是

$$(3)\quad f(A_1,\cdots,A_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathcal{C}_1}(t_1I-A_1)^{-1}dt_1\cdots\int_{\mathcal{C}_n}(t_nI-A_n)^{-1}dt_n\, f(z_1,\cdots,z_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathcal{C}_n}(t_nI-A_n)^{-1}dt_n\cdots\int_{\mathcal{C}_1}(t_1I-A_1)^{-1}dt_1\, f(z_1,\cdots,z_n).$$

当 $n=1$ 时这就是 Dunford 积分.

当 $A=(z_1I,\cdots,z_nI)$ 时, $f(A)=f(z)I=f(z_1,\cdots,z_n)I$ 则(3)式就化为(1)式.

由于算子 $A=(A_1,\cdots,A_n)$, A_i 作用于无穷维空间 H. 因此(2)式可看作是无穷多变数的解析函数的 Cauchy 积分定理. 这结论在 n 为 1 时亦真.

李国平先生手稿

内容提要

本书系统地论述了"函数论"的一个新方向——算子函数论。旅美华裔学者樊㙊（Fan Ky）教授是该方向的首倡者。全书分六章。第一章是预备性的，第二章专就算子在Hilbert空间中立论，第三章樊㙊的算子函数不等式理论；第四章Harnack不等式的算子化；第五章解析算子函数理论；第六章多变量可交换压缩算子函数。

读者对象为高等学校数学专业、理论物理专业高年级学生和研究生以及与分析数学应用有关的科研人员。

代　序

读完全部书稿之后，李先生嘱我为本书写一篇序言。我自知才疏学浅恐难胜任。李先生是我的恩师，其道德风范、学术造诣都是世所公认的，由我来为他的书作序未免有些唐突。然而作为这本书的先睹者，李先生此番雅意又难以推却。记得 1989 年本书初稿完成后先生曾将毛笔写就的手本复印数份授之于身边的弟子们研习。当时，我一面学习文章一面欣赏书法，心情豁然。读后曾提出一些问题请教并作过进一步研究的设想，同时也劝他早日将书稿付梓。不想几年已经过去，手稿终未出版。个中原因不全为出版之难，先生自己十分持重，手稿屡经修改，并在讨论班上设题研讨，直到当时列出的课题作为学生的博士论文在各类刊物上发表后，才决意出书。这次审阅全稿又有幸再一次拜读。

凡是具有一定函数论知识并且读过全文的人都会发现，本书系统地叙述了函数论学科的一个新方向——算子函数论。若从该方向的首倡者樊畿（Fan Ky）教授在这一领域最有代表性的论文算起，这一方向的产生和发展还不到 20 年的历史。算子函数论以无穷维空间的算子为研究对象，以解析函数论与泛函分析为工具，定性和定量地研究算子函数的各种性质，从而把经典函数论提升到一个新的层次。由于研究对象为算子函数，因此它比经典函数论有着更高的概括性。又由于在这种抽象的形式之下，仍然得到数量丰富、表述精密的结果，这就是它受到人们瞩目的原因。从有限维走向无穷维是当代数学的一个重要课题，这不仅是数学本

身发展的需要，同时还联系着如天体物理，量子力学等物理背景。这一课题在本书的具体形式下解决得如此美妙，不能不使人赞叹。看到算子函数论的现有体系，不禁使人想到另外一些数学分支，例如Banach代数，赋范环论，广义函数与偏微分方程，更无论算子谱理论等。它们在整个数学学科发展中都有着举足轻重的地位，而其作用的发挥都或多或少借助于抽象值解析函数。应该说，它们与算子函数论的产生和发展有着内在的联系。反过来，算子函数论的产生和发展必将有助于相关学科的进一步发展。

本书内容分为六章。概括起来，预备知识之后是两个部分，前一部分着重叙述樊巘教授等关于该理论的奠基性工作，这些工作首先将在经典函数论中占有重要地位的一系列定理算子化，如Schwarz引理，Julia引理，Pick-Julia定理，von Neumann不等式，Harnack不等式，解析函数的优势原理，均值定理，端点性质，角导数等等。无疑，这一系列定理的算子化已成为该分支的理论基础并为其发展提供了有力的工具。后一部分则是李先生指导他的博士生对于上述理论的进一步发展，这些工作是多方面的，例如优势原理，端点性质，变形定理等，特别是他们集中地研究了经典函数论中某些不等式的算子化，多元压缩算子解析函数以及一类特殊的p-叶算子解析函数的特殊性质。记得在初次看到的手稿上，李先生除了自己扩展的工作之外还专列一章叙述了对于若干问题的设想，现在其中一些问题已被一系列定理和公式代替，说明这些问题已为近年来的工作所解决。

关于本书的产生还有一段值得一提的历史。李先生在其早期关于函数论和数学物理的研究中就对无穷维空间的算子理论予以高度重视，曾通过著文或编撰书籍给予介绍。例如在一系列关于有理函数向复变函数转化的研究文章中，一些转化原则也适用于更广泛的向量值函数，在《自守函数与闵可夫斯基函数》一书中具体地阐述了古典分析数学泛函化的问题，给出了转化的一般原则，谈到了这一工作在量子场论中的重要意义。另一方面，早在

法国留学期间，李先生与樊先生过从密切，时常切磋学术问题。樊先生是Fréchet 的学生，擅长函数论与泛函分析。以后两人虽身在异国，仍利用可能机会保持联系。因此李先生对这一理论的产生和发展有着十分透彻的了解。1991 年樊先生回国访问期间专程拜访李先生，当时李先生曾将书稿送他过目，樊先生对书稿提出了一些改进意见。因此本书不仅是这一理论分支的总结，而且凝结着两位先生的友谊。

本书第二作者蹇明是李先生的博士生，他改进了前几章的文字叙述并撰写了后面两章。中科院武汉数学物理研究所范文涛研究员为本书的出版做了许多努力。武汉大学出版社的同志们付出了辛勤的劳动，这些都是应该感谢的。

刘　培　德

1995.11.15

今年二月初我正在芬兰赫尔辛基大学访问，突然接到李先生去世的噩耗。这一消息使我震惊和悲痛，但远隔万里，恨无飞翼，亲往吊唁。悼词中称他为我国著名科学家、数学家、教育家、诗人、书法家，认为他的去世是我国科技事业和教育事业的重大损失，数学界失去了一位巨匠大师，武汉大学失去了一位令人崇敬的导师，这些评论都是非常贴切和恰当的。当然，对他的业绩和学术成就的评价并不是一篇序言的任务。我在这里要说的是李先生耄耋之年仍时刻关注着数学事业的发展，介绍域外精华，指导学生研究，笔耕不辍，此书的写作和出版即是一例。他一生撰写学术论文 80 余篇，出版和编写了“函数论”、“数学物理”、“系统科学”三套丛书共 18 部。算起来，从《半纯函数的聚值线理论》的出版至今近四十年，仅函数论丛书已出了四本，本书可列为第五本了。此外，在李先生八十寿辰之际，还出版了《李国平诗词

选》，集得诗词作品千余首。他几十年如一日，生命不息，奋斗不止，鞠躬尽瘁，死而后已的精神堪为楷模！

我后来知道李先生的葬礼很隆重，有不少科技界和教育界的著名人士从全国很多地方发来唁电或送来花圈，党和政府以及部队的领导人，武汉大学和本地高校的干部和教师，他的弟子和学生暨各界人士参加者逾千人。当时正值隆冬，学校已经放假，还有不少人从外地赶来，情景十分感人。死备哀荣，殊为难得。我想这足以告慰他老人家的在天之灵了！

我期望着李先生遗著的整理和出版！本书的面世现在已经成为对他的纪念了！

刘 培 德

1996.5.30 又及

符 号 表

目　　录

第 一 章

Banach 空间与 Banach 代数

算子函数论研究在一般抽象空间中取值的解析函数的重要性质. 作为其基础，熟悉和掌握一般 Banach 空间和 Banach 代数的基本知识是十分必要的. 这些基本知识在每一本泛函分析教程中都是可以找到的. 为了方便读者，这里将罗列某些结果而不予证明. 它们包括了关于 Banach 空间上有界线性算子的基本定理，关于一般拓扑向量空间上紧凸集的 Krein-Milman 定理，以及与算子谱理论直接有关的 Banach 代数的重要性质. 特别地，我们还将介绍在 Banach 空间中取值的解析函数的某些基本知识. 如果读者掌握了本章介绍的内容，对于阅读以下几章在预备知识方面就不会有太大的困难.

§1.1

Banach 空间的基本定理

以 Φ 表一标量域，如实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$，设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 都是任意的点集，T 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 中的映射（算子），$A\subset\mathscr{X}$，$B\subset\mathscr{Y}$，记

$$T(A)=\{y;\ y=Tx,\ x\in A\},$$
$$T^{-1}(B)=\{x;\ y=Tx,\ y\in B\}.$$