计算方法丛书

高维数值积分

徐利治 周蕴时 著

科学出版社

高维数值积分

徐利治　周蕴时　著

科学出版社

1980

内 容 简 介

本书介绍了高维数值积分的基本方法，其中包括代数方法、数论方法及解析方法．此外，还介绍了高维边界型求积公式的构造方法以及含参变量积分的渐近展开方法．可供计算数学工作者参考．

高 维 数 值 积 分

徐利治　周蕴时 著

*

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1980年 3 月第 一 版　开本：850×1168　1/32

1980年 3 月第一次印刷　印张：10

印数：0001—9,330　字数：259,000

统一书号：13031・1198

本社书号：1670・13—1

定价： 1.50 元

序

本书是1963年出版的《高维的数值积分》一书的修订本，书的详名应该叫作《高维数值积分的方法与理论》.

本书包括了原书的前五章，并把原书第七章改为本书的第六章. 鉴于十多年来国内外有关数值积分的研究已有很大进展，成果也十分丰富，所以这个修订本对原书的第六、第八两章内容已作了全面改写、补充和刷新. 原书只有八章，现在本书已扩充成为十四章.

同原书比较起来，这个修订本有如下的显著不同之处：(一)较全面地概述了数论方法，特别，专设一章(第十一章)介绍了华罗庚教授与王元同志近年来所发展起来的实分圆域法. 这一方法在国外已获得很好的反应. (二)作为降维展开法的进一步应用，书中(第十三章)概述了高维边界型求积公式的一般构造方法. 显然这一方法还可以继续用来构造各种常见区域上的有用的边界型公式. (三)用较大的篇幅(第十四章)论述了含参变量积分的渐近展开方法及其应用，这里包括对原书第八章中一系列结果的改善和扩充.

鉴于以代数方法作为基本工具的美国学派的工作，在A. H. Stroud《多重积分的近似计算》(1971年出版)的著作中已经进行了详细的论述，所以在我们这个修订本中只保留了原书第一、第二章有关题材，作为读者进一步研读美国学派工作的一个基础(Stroud的书以130页的篇幅罗列了具有不同代数精确度的高维求积公式，那是一本具有一定特色和极有参考价值的著作).

我们这本书不仅介绍了数论方法，而且也介绍了某些解析方法. 希望本书的使用者能够结合实际需要去利用这些方法. 例如，可以用这些方法去构造他们所需要的实际计算公式. 本书还

述及一系列有待进一步研究的问题，希望能够引起从事积分计算方法的研究的工作者注意.

本书末附有近代有关高维数值积分方法的参考文献目录，其中包括一些对数值积分法特别有用处的文献. 当然我们的文献目录是远远不够完备的，读者如要了解1971年以前较详尽的国外文献资料情况，那就最好去查阅上面提及的 Stroud 书末的文献目录.

我们感谢吉林大学数学系与计算数学教研室对写作本书的鼓励与支持. 特别要感谢审稿人提出的若干有益建议，这些建议促使本书注意加强了计算实践方面的内容.

徐利治 周蕴时

1978年8月初完稿 1979年3月末写序

目　录

第 一 章

关于高维求积公式的某些简单定理

在本章及下一章中，我们将概述 Hammer, Wymore, Stroud 等人的某些工作(它们全部发表在 1957 至 1960 年的美国“计算数学杂志”上)．其中有些结果只是一些十分简单的命题，但由于有相当的实用价值，所以值得在这里加以介绍(参考文献 [50—53, 70])。

§1. 变 换 定 理

设 R 是 n 维欧氏空间 E_n 中的一个 n 维区域，$x\equiv(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})$ 表示 E_n 的点向量．对于给定的权函数 $W(x)$ 和某一类函数 $\{f\}$ 而言，假如我们有如下形式的近似积分公式

$$\int_R W(x)f(x)dx\approx\sum_{j=1}^m a_jf(x_j), \tag{1}$$

此处 dx 表 E_n 中的 n 维体积元素，a_j 是 m 个固定的“求积系数”(实值或复值)，而 $x_1,\cdots,x_m$ 为属于 f 定义域中的固定的“计值点”．特别，R 可以是一个有界闭域，而 $W(x)$ 和 $f(x)$ 是区域上的连续函数．

对于每个给定的 f，下列的差称之为求积公式 (1) 所相应的“误差泛函”:

$$E(f)=\sum_1^m a_jf(x_j)-\int_R W(x)f(x)dx. \tag{2}$$

有时为了表明区域 R，我们记 $E(f)=E(R,f)$．

假设 S 是 E_n 中的另一区域，并设存在某个连续变换 $J:y=$

$Jx(x \in R)$ 使得 S 由 R 变换而来，而 J 的 Jacobian 行列式为连续函数且具有正的绝对值

$$|J| = \left|\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right| > 0, \quad (x \in R).$$

在这样的情形下，J 是一个一对一的变换，因而存在逆变换 $J^{-1}: x = J^{-1}y(y \in S)$. 又设

$$W_1(y) = W_1(Jx) = W(x).$$

则对于 S 区域上的每一连续函数 $g(y)$ 显然有

$$\int_S W_1(y)g(y)dy = \int_R W_1(y)g(y)|J|dx. \tag{3}$$

记 $y_j = Jx_j(j = 1, \cdots, m)$, $|J_j| = |J|_{x=x_j}$, 则于(2)中取 $f \equiv |J| \cdot g(y) \equiv |J| \cdot g(Jx)$ 时可知有

$$\begin{aligned} E(R, |J|g) &= \sum a_j|J_j|g(y_j) - \int_R W(x)|J|g(y)dx \\ &= \sum b_jg(y_j) - \int_S W_1(y)g(y)dy, \end{aligned}$$

此处 $b_j = a_j|J_j|(j = 1, \cdots, m)$. 显然上面的最后一式可以看作是 S 区域上某个求积公式的误差泛函. 这样一来，我们便总结出如下的简单命题:

变换定理. 设 S 区域上的求积公式

$$\int_S W_1(y)g(y)dy \approx \sum_1^m b_jg(y_j) \tag{4}$$

所相应的误差泛函为

$$E(S, g) = \sum_1^m b_jg(y_j) - \int_S W_1(y)g(y)dy; \tag{5}$$

则有下列关系式

$$E(S, g) = E(R, |J|g). \tag{6}$$

这定理表明在区域 R 上的每个具有型式 (1) 的求积公式，都对应地存在一个具有型式 (4) 的求积公式 (而后者的积分区域为 S)，而且，两者的误差泛函之间成立着如 (6) 所示的关系式.

推论 1. 若 $|J|$ 在 R 上为一常数，则 $E(S, g) = |J| \cdot E(R,$

g). 此时若$E(R, g)=0$, 则 $E(S, g)$ 亦同时成为 0 (注意: 当 J 是一个非奇异线性变换——仿射变换时, $|J|$便是一常数).

推论 2. 若在(1)中令 $W(x)=W_1(y)|J|$, $f(x)=g(y)$, 则得

$$E(S, g)=E(R, g)=\sum_1^m a_j g(y_j)-\int_S W_1(y) g(y) dy. \quad (7)$$

上述的变换定理及其推论可用以导出多种多样区域上的求积公式. 例如,取 J 为仿射变换时,便可把球域上的求积公式变换成椭球区域上的求积公式;而且根据推论 1, 可以断言它们还具有同样的代数精确度. 亦即假如某球域上的求积公式对所有不高于 k 次的 n 元代数多项式为精确成立时(相当于 $E(R, g)=0$), 那末经过变换后所得到的椭球域上的求积公式亦必对一切不高于 k 次的多项式为精确成立(相当于 $E(S, g\cdot|J|)=0$). 事实上,既然 J 为仿射变换,故当 g 为多项式时, 则 $g\cdot|J|$ 与 g 具有完全相同的次数,从而 $E(R, g)=0$ 与 $E(S, g\cdot|J|)=0$ 表征着完全相同的代数精确度.

§2. 乘积定理

设 R_1 与 R_2 为低于 n 维的空间 E_{r_1} 与 E_{r_2} 中的两个区域, 而 $r_1+r_2=n$. 又设 $R=R_1\times R_2$ 为 R_1 与 R_2 的乘积区域. 因而每一点 $x\in R$ 可记作

$$x\equiv(y, z)(y\in R_1, z\in R_2).$$

相应的误差泛函可以记作

$$E(R_1, f_1)=\sum a_i f_1(y_i)-\int_{R_1} W_1(y) f_1(y) dy, \quad (8)$$

$$E(R_2, f_2)=\sum b_j f_2(z_j)-\int_{R_2} W_2(z) f_2(z) dz. \quad (9)$$

对于定义在 $R=R_1\times R_2$ 上的连续函数 $f(x)=f(y, z)$ 有误差泛函

$$E(R,f)=\sum\sum a_ib_jf(y_i,z_j)-\int_{R_1}\int_{R_2}W_1(y)W_2(z)f(y,z)dydz$$

$$=\sum b_j\sum a_if(y_i,z_j)-\sum b_j\int_{R_1}W_1(y)f(y,z_j)dy$$

$$+\sum b_j\int_{R_1}W_1(y)f(y,z_j)dy-\int_{R_1}\int_{R_2}W_1(y)W_2(z)f(y,z)dydz$$

$$=\sum b_jE(R_1,f(y,z_j))+\int_{R_1}W_1(y)E(R_2,f(y,z))dy,$$

由于对称性又可得

$$E(R,f)=\sum a_iE(R_2,f(y_i,z))$$
$$+\int_{R_2}W_2(z)E(R_1,f(y,z))dz. \tag{10}$$

于是总结出如下的简单命题:

乘积定理. 误差泛函 $E(R_1\times R_2,f(y,z))$ 可通过关于 $E(R_1,f)$ 与 $E(R_2,f)$ 的某种线性运算(线性组合或积分)来表示. 其具体形式如(10)或其对称形式所示.

下面两个简单而有用的推论值得注意:

推论 1. 若 $E(R_1,f(y,z))=0$ (对每个 $z\in R_2$), 且 $E(R_2,f(y,z))=0(y\in R_1)$, 则 $E(R,f)=0$, 而此时 R 区域上的求积公式对 f 为精确成立.

假如 F_1 是以 R_1 为定义域的函数类, F_2 是以 R_2 为定义域的函数类,那末 $F=F_1\times F_2$ 便代表 $R_1\times R_2$ 区域上的函数类. 换言之, F 中包含着所有这样的函数 $f(y,z)$, 而对每个固定的 $z\in R_2$, $f(y,z)\in F_1$; 对每个固定的 $y\in R_1$, $f(y,z)\in F_2$.

推论 2. 若对 $f_1\in F_1$ 恒有 $E(R_1,f_1)=0$, 对 $f_2\in F_2$ 恒有 $E(R_2,f_2)=0$, 则必有

$$E(R_1\times R_2,f)=0,\quad (f\in F_1\times F_2). \tag{11}$$

事实上,这由乘积定理或(10)式即可得出. 显然这推论的主要意思表明了这样一个事实: 若(8), (9)中的求积公式精确成立(即误差为0), 则在乘积区域 $R_1\times R_2$ 上的求积公式

$$\iint\limits_{R_1\times R_2}W_1(y)W_2(z)f(y,z)dydz\approx\sum\sum a_ib_jf(y_i,z_j) \tag{12}$$

亦必精确成立(亦即 $E(R_1\times R_2,f)=0$).

此外,如下的简单命题,有时也有参考价值:

命题. 若函数类 F 和 G 分别以 R_1 和 R_2 为定义域，而且其中的函数都能分别以基底函数

$$f_1,\cdots,f_p;\quad g_1,\cdots,g_q$$

的线性组合表示之,则 $F\times G$ 中的一切函数必是以 f_ig_j 为基底的线性组合.

证. 若 $h=\sum_i\sum_j c_{ij}f_ig_j$($c_{ij}$ 为常数系数),则自然有 $h\in F\times G$. 现在需要证明的是，如果 $h\in F\times G$，则 h 必是那些 f_ig_j 的线性组合. 首先,固定 $z\in R_2$, 则可知 $h=\sum_i a_if_i$，其中 a_i 是含有参数 z 的唯一确定的数值(亦即为 z 的唯一确定的函数). 同理,可表 $h=\sum_j b_jg_j$，而 b_j 是参变量 y 的唯一确定的函数. 故有如下的等式:

$$\sum_i a_if_i(y)=\sum_j b_jg_j(z).$$

根据 $\{f_i\}$ 的线性无关性,自然可选取 R_1 中的 p 个定点 $y_1,y_2,\cdots,y_p$ 使得行列式

$$\det[f_i(y_j)]\neq 0.$$

事实上,由线性无关性的定义可知

$$\lambda_1f_1(y)+\cdots+\lambda_pf_p(y)\equiv 0\Longleftrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0.$$

这表明只有零向量 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)=(0,\cdots,0)$ 才和一切向量 $(f_1(y),\cdots,f_p(y))$ 相正交. 换言之,所有形如 $(f_1(y),\cdots,f_p(y))$ 的向量构成 p 维空间 E_p. 因此自然存在 p 个线性无关向量 $(f_1(y_j),\cdots,f_p(y_j))$ $(j=1,\cdots,p)$ 使得 $\det[f_i(y_j)]\neq 0$. 于是代入得

$$\sum_i a_i(z)\cdot f_i(y_k)=\sum_j b_j(y_k)\cdot g_j(z)\quad(k=1,\cdots,p).$$

上式显然是 $z\in R_2$ 的恒等式，故解出 a_i 便得到 $a_i=\sum_j c_{ij}g_j(z)$，此处 c_{ij} 为唯一确定的常数. 因此可知

$$h=\sum_i a_i f_i=\sum_i \sum_j c_{ij} g_i(z) f_i(y).$$

例 1. Gauss 的 4 点公式对不超过 7 次的单变数代数多项式是精确成立的. 因此根据推论 2 或 (11) 式,可见乘积区域上的 16 点求积公式

$$\sum_1^4 \sum_1^4 a_i a_j f(x_i, x_j) \approx \iint_R f(x, y) dx dy \tag{13}$$

对于一切形如 $f=\sum c_{ij} x^i y^j (0 \leqslant i \leqslant 7, 0 \leqslant j \leqslant 7)$ 的二元多项式必精确成立,此处 R 为二维正方区域, a_i 为 Gauss 求积系数, x_i 为 Legendre 多项式 $F_4(x)$ 的零点(分布于$(-1, 1)$内). 类似地可得出立方区域上的 64 点求积公式,它对于一切三元多项式

$$f=\sum c_{ijk} x^i y^j z^k \quad (0 \leqslant i, j, k \leqslant 7)$$

为精确成立.

例 2. Laguerre 的 3 点求积公式(以 $(0, \infty)$ 为区间,以 e^{-x} 为权函数)系对一切 5 次多项式为精确成立,因而组合而成的 9 点求积公式

$$\sum_1^3 \sum_1^3 a_i a_j f(x_i, x_j) \approx \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} f(x, y) dx dy \tag{14}$$

便对一切形如 $f=\sum_{i \leqslant 5,} \sum_{j \leqslant 5} c_{ij} x^i y^j$ 的二元多项式为精确成立, 此处 x_i 为 Laguerre 多项式 $L_3(x)$ 的零点. 经过仿射变换 (非奇异线性变换)显然还可将公式 (14) 改换成无穷平面扇形域上的求积公式.

显然易见,当 Gauss 求积公式与 Laguerre 求积公式组合起来时, 可获得无穷带形区域上的求积公式; 当 Laguerre 公式与 Hermite 求积公式相结合时, 则可得出半平面区域上的求积公式. 同理,一个平面有界区域上的求积公式,可借助于乘积定理导出柱形域上的求积公式. 至于它们以代数多项式次数来衡量的代数精确程度,则可按推论 2 或 1 来加以判断(例如象例 1 及例 2).

附记. P. Davis 和 P. Rabinowitz (1956, [44]) 曾经作过一次关于应用 Monte Carlo 方法计算多重积分的实验，他们取 $f = \exp(x_1x_2x_3x_4)$ 为例，用 Monte Carlo 方法计算此函数展布于 4 维单位正方体上的积分值. 但是采用 $2^{15} = 32768$ 个计值点所得的结果，其误差却要比 Hammer 等利用 Gauss 二点公式的四次乘积公式(即 16 点公式)所产生的误差大一倍. 由此看来，利用古典求积公式有时是更为有效的. 正因为这里所遇到的被积函数，恰好能展成 $x_1x_2x_3x_4$ 的幂级数，因此利用 Gauss 公式自然是最为合适的.

§3. 对称求积公式的构造原则

在 Hammer-Wymore (1957, [53]) 的工作中，曾首先指出过构造对称区域上的近似求积公式的一个普遍原则. 他们也曾利用这个原则性的方法去构造了一系列具体公式.

设 R 是一个 n 维区域. 假如 R 包含一点 x 时，它必同时包含 x 的一切**对称点**(亦即交换 x 的坐标分量并添加正负号后所得的一切异于 x 的点). 这样便称 R 为对称区域.

显然，一般说来，对称区域 R 中的每一个点及与其对称的点所构成的**对称点组**共包含 $2^n \cdot n!$ 个点. 例如在三维空间区域中，通常每个对称点组便含 48 个点(在特殊情况下，也可以少于 48 个点).

同理，一个数值求积公式(求积和)中所用到的计值点，假如能划分为若干对称点组，且同一组内诸点所对应的求积系数都相等，那末便称该公式为对称的求积公式.

令 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 表 E_n 中一点的 n 个坐标(变量)，则 $t_1^{\alpha_1}\cdots t_n^{\alpha_n}$ 便称为 n 元独项式，而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 称为相应的次数或方幂(非负整数). 根据对称区域的定义，容易看出下列的定理为真:

定理 1. **每一个包含奇次方幂的多元独项式在对称区域上的积分值恒为零. 凡只含偶次方幂的多元独项式在对称区域上的积**

分值只依赖于方幂的数值组，而与它们的排列顺序无关.

事实上，由于区域的对称性，含奇次方幂的那个坐标(变量)在积分区域中有正有负，故在整个区域上的积分值相互抵消为零.至于定理中的第二句断语，则由多重积分的定义方式即可知其为真.

定理 2. 设R为对称区域，而$\int_R f(x)dx \approx \sum a_j f(x_j)$为对称的求积公式(右端为对称求积和)，那末使得

$$\sum a_j f(x_j) - \int_R f(x)dx = 0 \tag{15}$$

对一切次数 $\leqslant 2k+1$ 的 n 元多项式恒成立的充分必要条件是公式(15)对于所有如下形式的独项式

$$t_1^{2k_1} t_2^{2k_2} \cdots t_n^{2k_n} \begin{pmatrix} 0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant k \end{pmatrix}$$

都精确成立.

这里为什么不必考虑含奇次方幂的独项式呢？原因是，当含有奇次方幂的独项式代入对称的求积和$\sum a_j f(x_j)$时，其值必为零，因而(15)恒成立.

上述的定理 2 可作为构造对称区域上的对称求积公式的指导原则.首先是在对称区域R内，设定一批对称分布的计值点x_j，使所有属于同一个对称点组的计值点所相应的权系数(求积系数)a_j都相同.然后将一切只含偶次方幂的独项式$t_1^{2k_1} t_2^{2k_2} \cdots t_n^{2k_n}$代入(15)式，而得出一组以$x_j$与$a_j$为未知元的代数方程式.最后从这个方程组中确定$x_j$与权系数$a_j$的值，便造出一个对称的求积公式

$$\int_R f(x)dx \approx \sum a_j f(x_j). \tag{16}$$

例. 设R是三维空间中以原点(0, 0, 0)为中心的边长为 2 的正立方体.假定我们的目标是要去构造一个对所有不高于 7 次的三元多项式恒精确成立的对称求积公式，那末根据定理 2，只须考虑该公式对如下的七个独项式

$$1,\ x^2,\ x^4,\ x^2y^2,\ x^6,\ x^4y^2,\ x^2y^2z^2$$