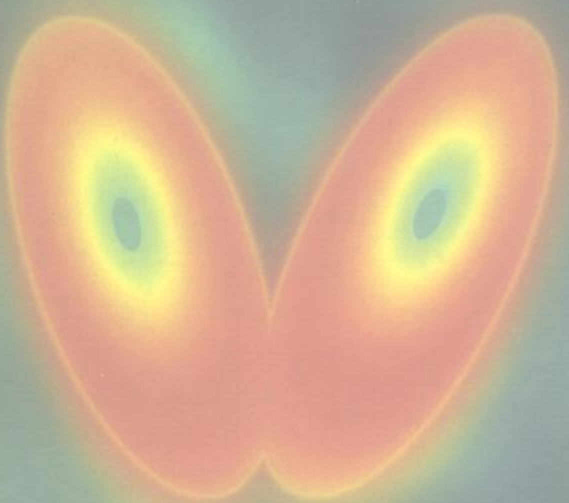
王树禾 编著

微分方程模型与混沌



中国科学技术大学出版社

微分方程模型与混沌

王树禾 编著

中国科学技术大学出版社

1999 · 合肥

图书在版编目(CIP)数据

微分方程模型与混沌/王树禾编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,1999. 2
ISBN 7-312-01060-1

Ⅰ. 微… Ⅱ. 王… Ⅲ. 微分方程 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 38365 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:16.25 字数:425 千
1999 年 2 月第 1 版 1999 年 2 月第 1 次印刷
印数:1—5000 册
ISBN 7-312-01060-1/O·216 定价:25.00 元

内容简介

本书按理论、解法和实用三结合的原则写成，内容主要有：Cauchy 问题适定性、线性方程的代数解法与算子解法、分析解法、SL 边值问题和 Sturm 振荡、周期系数的二阶线性方程、运动稳定性、初等奇点和高次奇点、旋转向量场和 Hopf 分叉、极限环、无穷远奇点、结构稳定性等传统内容；混沌理论中的移位映射、面包师映射、Smale 马蹄、奇怪吸引子、Li-Yorke 混沌与 Devaney 混沌、KAM 定理、Melnikov 函数等骨干内容；综合国力、市场经济、战争、人口、动物世界、疾病、航天、振动、RLC 电路、多分子反应、周期脉冲转子、Lorenz 方程、超导、催化、生态、冠状动脉等重要实际问题的方程建模、解法以及之中的混沌表现. 阐述了上述诸方面的概念、理论和方法.

读者为应用数学等专业师生，数学建模工作者和相关的科学技术工作者.

前　言

本书是作者在中国科大应用数学专业的本科生班、研究生班、少年班、数学建模竞赛集训班多年教授常微类和混沌类课程的教学笔记整理编撰成册的.方程的传统内容、方程模型和非线性方程模型中的混沌三大块各成一篇;介绍常微分方程的适定性理论、定性理论和各种求解方法这些传统内容时,希望概念明确、思路清晰、论述细致,讨论初边值问题解的存在唯一性时,引入了 Leray-Schauder 不动点理论等较高观点,把各种解法讲得更算法化,以便读者求解操作.

方程建模具有强烈的实用背景,混沌则是非线性科学当中的现代热门课题,作者对这两方面的写作热情比较高;事实上,用微分方程建模,可以研讨引人入胜或价值连城的现实应用课题,一些由常微分方程描写的似乎简单的决定论系统中,却隐藏着内在随机性和极端混乱与无序的所谓混沌运动!重视方程建模和方程模型中混沌的讲述,恰为本书的特色.

现实世界当中,能用微分方程建模研究的实际问题非常之多,作者仙山盗草,选择了若干典型的实际问题,建立它们的数学模型,且给出定量或定性的解决.显然,一本讲微分方程的书,如果不讲方程的实际应用,恰似一本讲鸡蛋的书,只谈蛋的结构和几何性质等内容,却免谈蛋的繁殖功能一样地不得要领;微分方程如果脱离它的实际源泉太远,又遭受长期的抽象脱水,它也许会干瘪退化.目前我国很多大学开设了“数学模型”和“数学实验”两种课程,每年有几百所大学组队参加国内外数学建模竞赛(MCM),这是我国数学教育的一种进步;按著名科学家冯·诺意曼的观点,“科学不应当只是解释现象,科学的主要任务是建立数学模型”.我们这

部书应该说是在这种形势与观点的影响之下应运而生的.

本书建立的方程模型有不含混沌和含有混沌运动的两类.前者主要有综合国力、市场经济、战争、人口、动物世界、疾病、航天、振动、RLC 电路、多分子反应等实际问题的方程模型，对这批又重要又能解的问题给出了细致的讨论，其中有些则是作者科研工作的成果；还有大量值得问又能答的实际问题，也可以用方程建模来解决，囿于篇幅，建议读者自行研讨.应当指出的是，我们建立的方程模型只是世界真实变化的一种简化和近似，好似世界真实面貌的一幅漫画，如果能抓住欲反映的事物最本质的特征也就算是成功.例如经济生活当中呈现的是号称万物之灵者的狡猾行径，用方程来刻画其商业行为，自然只能揭示其供需制约等主要方面，而不能把人们讨价还价时的一切细节都反映到方程中去.一般而言，我们总是把那些对问题的实质影响甚微的因素忽略掉，不然所得的方程模型，因其数学结构太复杂而失去可解性；当然，绝不可把关键性的因素忽略掉，例如，不能对任何变化过程都用线性方程来近似，否则就严重歪曲了非线性物理当中的演化本质而失去可靠性.建模首先要求有满意的可靠性，可以搞一点折衷，力争在有足够的可靠性的同时具有可解性.数学模型的建立除了对所处理的实际问题和欲使用的数学工具有透彻的掌握，还需要有创造性、想象力，甚至需要一定的艺术性，必须接受实践的检验，有时需要反复修正.

混沌科学是 20 世纪人类三大科学成就之一，另两个是量子力学和相对论.混沌(Chaos)一词是 1975 年作为数学名词首次在科学文献上出现的，20 多年来，它以科学史上空前的速度发展成有丰富的非线性物理背景和深刻数学内涵的现代学科，目前已出版的有关混沌的著作，像样的近 300 部，发表的混沌研究论文近万篇；数学家说，混沌是数学的新分支；物理学家则说，混沌是非线性物理的新分支，应该说，它其实是物质科学与数学科学两栖的边缘学科.混沌在普通话里是确定性系统变化极端复杂和行为不可预

测的同义语，本书则希望用数学语言明确混沌的概念和表现，例如数学地讨论对初值的敏感依赖性、拓扑传递性与混合性、周期点的稠密性、随机性和遍历性、正 Lyapunov 指数、分数维、奇怪吸引子等等，进而用定义与定理的形式来讲述混沌，以便准确地理解它，同时，对某些望文生义、牵强附会的关于混沌的通俗议论，也会有一定的澄清和矫正作用，用数学手段统一人们的混沌观.

为了论证微扰作用的 Hamilton 系统，作为某些实际系统的数学模型，是否产生混沌，我们必须对有关的混沌动力学的知识进行讨论，根据方程模型的最少需求，量时量力，我们只讨论以下有关混沌的内容：Bernonlli 移位映射的混沌表现、蒙古包和三角帐篷映射的混沌表现、度量混沌程度的 Lyapunov 指数、符号空间中的混沌、Li-yorke 混沌和 Devaney 混沌、面包师变换、分数维、奇怪吸引子、Smale 马蹄、Henon 映射、Hamilton 系统、可积系统、KAM 定理和 Melnikov 函数等，进而对以下微分方程模型进行混沌判定：脉冲转子的方程模型及其混沌运动、Lorenz 方程组的奇怪吸引子和混沌、Duffing 方程在弱周期强迫时的混沌运动、超导 Josephson 结中的混沌、催化反应中 Flickering 振颤的混沌运动、生态系统的混沌、冠状动脉与心肌梗塞的混沌运动等等.

本书可作为微分方程有关课程的教学参考书，根据听课学生的学龄，可以从本书中取舍相关的内容，教学时间可以控制在 60 至 80 学时.

用于本科生，可选讲第一篇的第 1 章和第 2 章的部分内容，建议不讲第 2 章中的 2.2.4)，2.3.3)，2.4，2.5 各节.

用于研究生，可略讲第一篇的第 1 章，细讲第一篇的第 2 章和第三篇.

用于数学模型课或 MCM 教学，可以对第一篇和第三篇的内容宣而不证，细讲第二篇.

作者诚惶诚恐撰写了一部不完全符合传统内容的讲方程的书，欲突出应用、建模和内容现代化等等，虽然写作当中向这一目

标做了努力，但书中的缺陷失误一定不少，倒不是时间仓促或写作不认真，只缘作者的学识和经验多有欠缺，恭候读者批评指正.

作者感谢科大李翊神教授对本书原稿提出实质性修改意见；感谢我的同事蒋继发教授为本书写作提供许多参考文献且对书中不少重要内容向作者提供他的独到见解；感谢我的学生鲁静小姐帮我在文字表述上进行多处改进和润色；感谢我妻苏仲华同志，业余时间承担全部家务，保障了写作时间的足够投入；还应感谢科大本科生和研究生当中听过我的课的几届青年朋友们，正是他们的热烈选修和机智提问，促使作者具体地思考许多精彩问题，强化了本书的特色.没有上述诸位志同道合者的支持，仅凭作者绵薄之力，本书怕是不能问世的.

王树禾

1998.9

目　录

第一篇　微分方程基础

本篇介绍常微分方程的经典理论与技术，含适定性理论、定性理论、稳定性理论和各种解法与技巧，为第二篇的微分方程模型和第三篇方程模型中的混沌的研讨提供理论基础与方法，是解决实际问题的“工具箱”.

1676 年，莱布尼兹致牛顿的信中，首次提出了“微分方程”这个名称，1696 年至 1697 年，莱布尼兹和雅各·伯努利解出了 Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n$$

之后，由于受 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

不能用初等函数积分表达解的困惑之启发，而广泛采用幂级数解. 18 世纪，欧拉提出了恰当方程、积分因子、通解、特解等概念. 1718 年，泰勒提出奇解概念. 19 世纪前半叶，哥西解决了初值问题解的存在唯一性问题，1876 年，李普希兹改进了哥西的证明.

19 世纪后半叶，庞加莱和李雅普诺夫在力学研究当中建立了微分方程的定性理论与稳定性理论，1881 年至 1886 年，庞加莱发表了《微分方程所定义的积分曲线》的四篇文章，是微分方程定性理论的奠基性贡献；1892 年，李雅普诺夫发表了杰出的博士论文《运动稳定性的一般问题》，开创了稳定性的研究领域.

1937 年，安德罗诺夫和庞特列雅金提出结构稳定性的概念；

同时出现了 Hopf 分叉等分叉理论. 1900 年,希尔伯特在国际数学家大会上提出了 23 个数学难题,其中第 16 问题的后半部分是问

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)}$$

至多有几个极限环? 它们的相对位置如何? 其中 Q_n 与 P_n 是次数不超过 n 的 x 与 y 的多项式;这个难题至今尚未解决,1979 年,我国数学家陈兰荪、王明淑、史松龄证明 $n=2$ 时的极限环的最大个数不少于 4.

微分方程是数学分析的天然后继课程,是服务于物理科学的最重要的数学工具;同时,它作为数学科学的中心学科,如前面的历史回顾所云,它的内容,就数学意义下的难度和精彩程度而言,也是足够引人入胜的,本篇用紧凑的篇幅介绍了它的必要的骨干内容.

1 微分方程的一般理论和解法

1.1 微分方程的基本概念

设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $t,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n+1$ 元函数,则称

$$\dot{x}_i=f_i(t,x_1,\cdots,x_n),\ i=1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

为以 t 为自变量以 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 为未知函数的一阶标准形微分方程组,(1.1)的向量形式为

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{1.2}$$

其中 $t\in\mathbb{R}$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$,$f=(f_1,\cdots,f_n)^T$ 是定义在 $n+1$ 维(t,x)空间中某个区域 Ω 上的 n 维向量函数,称(1.1)或(1.2)为一个微分系统,f 为该系统的向量场(也称方向场);若 f 与 t 无关,则称(1.2)为自治系统;若 $f(t,x)$是 x_i 的线性函数,则

称(1.1)或(1.2)式为线性微分方程组.特别地

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.3}$$

为线性齐次方程组,其中 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$是 $n\times n$ 的方阵.

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) \tag{1.4}$$

称为线性非齐次方程组,其中 $g(t)$是已知的 n 维向量函数.

若 $g(t,x,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$是 $t,x,x_1,\cdots,x_{n-1}$的 $n+1$ 元函数,则称

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = g\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right) \tag{1.5}$$

为以 t 为自变量以 $x(t)$为未知函数的 n 阶标准形微分方程式,(1.5)式可以化成等价的一阶标准形方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} = g(t,x,x_1,\cdots,x_{n-1}) \end{cases} \tag{1.6}$$

上面的概念性交代有定义式的严格的规定性,例如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x(x(t)) + 1 = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \int_0^t x(\xi)\mathrm{d}\xi - 1 = 0 \tag{1.8}$$

(1.7)与(1.8)虽然也是含有自变量 t,未知函数 $x(t)$以及未知函数的导数$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$的等式,我们只能说它们是函数方程,但不承认(1.7)(1.8)为微分方程,因为它不满足前面我们关于什么是微分方程的约定.

若 $F(t,x,x_1,\cdots,x_n)$是区域 $D\subseteq \mathbb{R}^{n+2}$上的 $n+2$ 元函数,则称

$$F\left(t,x(t),\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0 \tag{1.9}$$

为关于未知函数 $x(t)$的 n 阶隐式微分方程.若(1.9)的右端是关于 $x(t),\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$的一次多项式,则称(1.9)为线性方程式,它的