

河流动力学基本问题

河流动力学 基本问题

侯晖昌

水利出版社

TV14

上

河流动力学基本问题

侯 晖 昌

水利出版社

内 容 提 要

本书着重从理论上、机理上探讨河流动力学中一些重要问题。全书共分六章。主要内容有：导论，河流内部结构，河流均匀泥沙运动，河流不恒定泥沙运动，河流不均匀泥沙运动及河床过程原理等。本书较详细地分析了河流紊动起源及其对泥沙性质和运动的影响，系统阐述了不恒定与不均匀泥沙运动，从水流能量消散特性与泥沙输移的关系上阐明了河床过程原理。

本书可供从事水利规划设计、水库管理及水利水电、交通、铁道等部门科研技术人员阅读，亦可供高等院校有关师生参考。

河流动力学基本问题

侯 晖 昌

*

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 14³/₄印张 335千字

1982年5月第一版 1982年5月北京第一次印刷

印数 0001—3820册 定价 1.80元

书号 15047·4187

前 言

河流动力学是以力学的方法研究河流与河床过程的学科。目前,虽然河流动力学书籍较多^[1~6],但由于研究对象十分复杂,其中许多重要问题还没有得到完满解答。编写本书的目的就是企图澄清其中一些问题,对一些重要现象和过程予以系统的概括介绍,同时也有助于提高分析能力,以便于解决生产实践中的具体问题。

河流过程是一个十分复杂的过程。在河流内部不仅存在着一些现代流体力学还没有完全回答和解决的理论问题,而且也包含着复杂的随机过程。

导致河流泥沙运动及其后果的原因,是水流运动。因此,首先要研究河流的水流运动。为了研究河流水流运动,则必须分析河流的紊(湍)动结构。另一方面,河床过程又是泥沙运动的表现和结果。泥沙运动是群体运动,而群体运动又是属于概率论范畴的问题。而且这种群体运动还受制于具有一定分布形式的紊动。为此,既要研究泥沙运动的力学规律(必然性),也要研究它们的统计规律(或然性)。既要微观一粒泥沙怎样运动,也要宏观群体泥沙怎样运动。只有这两方面结合起来,才能较深入地理解河床过程现象。

基于这样的认识,在书中作者对几个问题结合分析作了上述的初步尝试。近年来,国内外关于应用随机过程理论以研究河流泥沙运动方面的文献也逐渐增多了。本书不拟去总结它们,只想指出,领域是十分宽广而问题又是十分复杂的,有很多工作都等待进一步的开展。

本书以详细的篇幅阐明了作为泥沙运动动力的大尺度紊动的起源及其影响。

为了叙述系统性的需要,本书在开始时先把有关应用工具作扼要介绍,这就是编写第一章的目的。为了不使它占有篇幅过多,只对文献中不多见而对本书以后的叙述又有重大参考意义的部分作较详细的推导,其余部分只能简要阐述。

本书初稿曾先后得到钱宁教授、谢鉴衡教授,清华大学等有关院校教研室和科研单位许多同志们帮助审阅,张启舜同志校阅了第五章。在此,对他们表示衷心的感谢。本书初稿虽几经修改,但因问题十分复杂,且因水平所限,谬误之处必然很多,恳请读者不吝指正。

作 者

1980年12月

目 录

前 言

第一章 导论	1
第一节 层流运动	1
第二节 紊流运动	19
第三节 马尔可夫过程	25
第二章 河流内部结构	30
第一节 河流紊动的起源	30
第二节 明流紊动动能频率分布	42
第三节 明流能量平衡与时均流速分布	50
第四节 明流紊速分布	65
第五节 沙浪形成的力学分析	71
第六节 河流紊动三元性与随机性的起源	88
第三章 河流均匀泥沙运动	93
第一节 悬移质泥沙运动	93
第二节 推移质泥沙运动	121
第四章 河流不恒定泥沙运动	130
第一节 水库淤积过程	130
第二节 水库水位降落的冲刷过程	145
第五章 河流不均匀泥沙运动	157
第一节 含沙量沿程扩散恢复过程	157
第二节 超饱和含沙量沿程淤积过程	174
第六章 河床过程原理	186
第一节 流体最小能量消散趋向性的表现	186
第二节 明流水流运动与泥沙输移的关系	195
第三节 侵蚀基准面	202
第四节 河相关系问题	206
第五节 河床质沿程分布与河流纵剖面	209
第六节 河型与泥沙运动	217
第七节 河床过程的基本规律	223
第八节 拦河建筑物对河流再造床的影响	225
参考文献	229

第一章 导 论

第一节 层 流 运 动

一、概 说

河流，即使是中小河流，不管在丰水还是枯水季节，其流态一般都为紊（湍）流。但是，河流动力学的研究还是必须从层流开始。概要说来，其原因是：河流和管流一样，在中等雷诺数情况下，在其平滑或粗糙的边界面上，总有一层流薄层依附于其上。这个层流薄层在文献中通常称为层流附面层（laminar sub-layer）^①。从流速分布形式来看，从层流附面层到流核，流速分布的整体是连续变化的。这概念是从早期的实验结果就得到了的。基于：1）从层流附面层到流核流速分布的连续性；2）经典的普兰特半对数流速分布律只适合于稍离开边界的区域，所以长期以来，一些作者^[7,8]都企图探讨包括从层流附面层直到流核的整个流区的“普遍”流速分布规律。这方面研究的深入，当然是无可置疑的。但同时也需要指出，这两个流区的流态毕竟是不同的：在无扰动情况下，层流附面层内流态就是层流流态；而流核则常为紊流流态。而且，这两个流层是互相影响的。

虽然层流附面层的厚度数量级只有零点几毫米，但它对河流水流和泥沙运动的影响却是巨大的和根本的。这是因为：层流附面层并不总是稳定的，而不稳定的扰动将转化为大尺度紊动。这大尺度紊动则不仅是河流泥沙运动的能源，而且还规定了河流泥沙运动的许多特点，赋予后者在运动形式上以自己的烙印。

除此之外，为了研究河流水流能量消散特性，也需要从流态转换中比较其数量差别。因此，河流动力学的研究必须从层流开始。

二、基本方程与能量消散

描写牛顿粘性流体运动的那威-斯托克斯方程为：

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta v \quad (1-1)$$

而不可压缩流体连续方程则为：

$$\text{div} v = 0 \quad (1-2)$$

从上两式可推得如下以流线函数 ψ 表示的方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = \nu \Delta\Delta\psi \quad (1-3)$$

^① 目前在国内外文献中对此层次的取名还不完全一致；有取名为“附壁层流层”。国外文献有称 viscous sub-layer，甚至取它与外流绕流的层流边界层同名，称为“laminar boundary layer”。

在上式中 $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

一般说, 粘性流体的质量力与表面力做功并非全部变成流体动能, 有一部分是要消散掉的。消散部分等于:

$$D = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (1-4)$$

对二元流动来说, 则

$$D = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (1-5)$$

对均匀流动来说, $v_y = 0, \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, 故

$$D = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 = \mu \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (1-6)$$

从粘性流动基本方程(1-1), (1-4)出发, 赫姆霍尔茨导出了能量消散值为最小的原则。即: 在质量力场中, 如果不可压缩粘性流体运动方程式中惯性项可以忽略, 则实际流体运动所消散的能量比在同体积和同流速分布情况下的其他任意形式的运动所消散的能量为小。

三、明流层流和平行板间层流流速分布

二元明流层流运动的图形如图1-1。在此情况下, 那威-斯托克斯方程可简化:

$$F_x = g \sin \alpha, v_x = v, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$F_y = -g \cos \alpha, v_y = 0$$

$$F_z = 0, v_z = 0$$

并且由于水流均匀运动, 故 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, 因此方程式(1-1)可简写成:

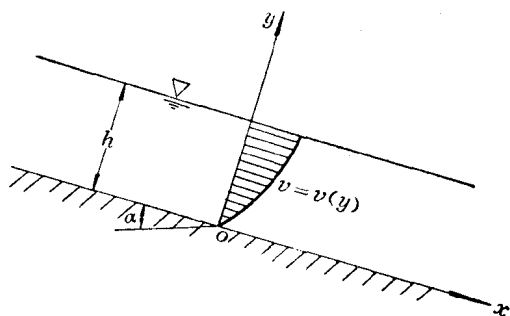


图 1-1

$$\begin{cases} g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

从式(1-7)中后一式积分, 可得:

$$p = C - \rho g y \cos \alpha$$

C为待定常数。在自由面上只有垂直水面的压力 p_0 , 即边界条件为:

$$y = h, p = p_0$$

代入式(1-7)最后一式的积分式之中, 则可求出积分常数为:

$$C = p_0 + \rho g h \cos \alpha$$

因此 $p = p_0 + \rho g(h - y)\cos\alpha$

积分式(1-7)中的第一式, 可得:

$$v = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} y^2 + Ay + B \quad (1-8)$$

其相应边界条件为:

$$\begin{cases} y = 0, & v = 0 \\ y = h, & \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

将式(1-9)代入式(1-8)后, 可求得两个积分常数为:

$$\begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{\rho g h \sin\alpha}{\mu} \end{cases}$$

故得

$$v = \frac{\rho g y \sin\alpha (2h - y)}{2\mu} \quad (1-10)$$

上式就是方程式(1-7)的解答。通过的单位宽度流量为:

$$q = \int_0^h v dy = \int_0^h \frac{\rho g y \sin\alpha (2h - y)}{2\mu} dy = \frac{\rho g h^3 \sin\alpha}{3\mu}$$

平均流速 v_m 为:

$$v_m = \frac{q}{h} = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{3\mu}$$

从式(1-10)求出最大流速 v_{max} 为 (当 $y = h$):

$$v_{max} = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{2\mu}$$

因此

$$\frac{v_m}{v_{max}} = \frac{2}{3}$$

以下讨论均匀明流的能量消散。在水流中取出一小六面体, 高为 dy , 长为 l , 宽为 b , 则体积为 $bldy$, 质量为 $\rho bldy$ 。由于重力作用, 六面体将做功。根据 $Fs = mgs = mgvt = \rho bl(dy)gvt$, 单位时间做功为 $\rho bl(dy)gv$, 有效功则为 $\rho bl(dy)gv\sin\alpha$ 。将它沿深度积分, 可得水流单位时间内做功为:

$$\begin{aligned} \int_0^h \rho bldygv\sin\alpha &= \rho l g \sin\alpha \int_0^h bvd y = \rho l g \sin\alpha b q \\ &= \frac{\rho^2 g^2 h^3 b \sin^2\alpha}{3\mu} \end{aligned} \quad (1-11)$$

由于水流均匀, 做功并没有使水流动能值沿程变化, 故推知有效功将全部转化为热能发散。

以上是根据实际图形推算, 但也可根据式(1-6)计算。单位体积单位时间内水流消散能量值为:

$$D = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

将式(1-10)微分可得:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\rho g \sin \alpha (h-y)}{\mu}$$

故

$$D = \frac{\rho^2 g^2 \sin^2 \alpha (h-y)^2}{\mu} \quad (1-12a)$$

仍取上六面体, 沿水深积分得全部消散能量为:

$$\int_0^h D b l dy = \int_0^h \frac{b l \rho^2 g^2 \sin^2 \alpha (h-y)^2}{\mu} dy = \frac{\rho^2 g^2 \sin^2 \alpha b l h^3}{3\mu}$$

故结果相同。

与上述相类似, 在平行板间流动(图1-2)情况下,

$$F_x = F_y = F_z = 0,$$

$v_y = v_z = 0$, $v_x = v$, 则不难得到:

$$v(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - b^2) \quad (1-12b)$$

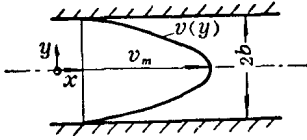


图 1-2

四、明流和管流层流附面层流速分布^[9]

外流平板绕流层流边界层流速分布问题, 在本世纪初就得到较圆满解决, 因限于本书篇幅, 兹从略。

按上述描写均匀明流的层流附面层运动方程式为(见图1-3):

$$\begin{cases} g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 & (1-13) \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0 & (1-14) \end{cases}$$

由于在边界面上 $v_y = 0$, 则

$$p_y = p - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} = p,$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

令层流附面层面上的特征值以下标 δ 表示之,

$$p = p_\delta, \quad \tau_{xy} = \tau_\delta, \quad \tau_\delta = \tau_0 \left(1 - \frac{\delta}{h} \right) = \rho v_*^2 \left(1 - \frac{\delta}{h} \right)$$

则积分式(1-14)可得:

$$p = C - \rho g y \cos \alpha$$

在附面层面上

$$p_\delta = C - \rho g \delta \cos \alpha, \quad C = p_\delta + \rho g \delta \cos \alpha$$

故

$$p = p_\delta + \rho g (\delta - y) \cos \alpha \quad (1-15)$$

此外, 在附面层面上切应力为:

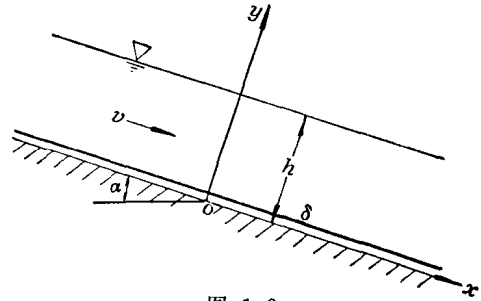


图 1-3

$$\tau_{\delta} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \rho v_*^2 \left(1 - \frac{\delta}{h} \right)$$

因此，可求出附面层面上的流速垂向变率为：

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{h} \right) \quad (1-16)$$

现积分式(1-13)，得(省去 v 的下标)

$$v = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2 + Ay + B \quad (1-17)$$

边界条件则为：

$$y=0, v=0; \quad y=\delta, \frac{dv}{dy} = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{h} \right)$$

将解代入，可得 $B=0$ ，而 A 则为：

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dy} \right) &= -\frac{\rho g y \sin \alpha}{\mu} + A \\ A &= \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=\delta} + \frac{\rho g \delta \sin \alpha}{\mu} = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{h} \right) + \frac{\rho g \delta \sin \alpha}{\mu} \end{aligned}$$

因此，式(1-17)写成：

$$v = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} \left\{ 2\delta + \frac{2v_*}{g \sin \alpha} \left(1 - \frac{\delta}{h} \right) - y \right\} y \quad (1-18)$$

上式就是明流层流附面层流速分布公式。它表明，和明流层流一样，流速分布也是遵循抛物线律。

对水平管流运动(图1-4)，因压力为阻力所平衡，故

$$\tau_0 = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} = \rho v_*^2$$

上式中 r 为管半径，则管流层流附面层运动方程为：

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1-19)$$

$$\text{即} \quad -\frac{2v_*^2}{r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1-20)$$

$$\text{亦即(省去 } v \text{ 的下标“} x \text{”)} \quad v = \frac{\rho v_*^2}{r\mu} y^2 + Ay + B \quad (1-21)$$

边界条件为：

$$\begin{cases} y=0, v=0 \\ y=\delta, \tau_{\delta} = \rho v_*^2 \left(1 - \frac{\delta}{r} \right) = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} \\ \left(\frac{dv}{dy} \right)_{y=\delta} = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right) \end{cases}$$

将式(1-21)代入边界条件中，可求出 $B=0$ ，

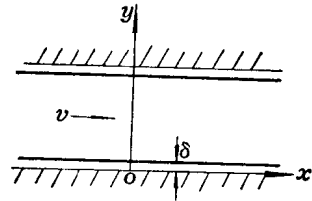


图 1-4

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{2\rho v_*^2}{r\mu} \delta + A = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right)$$

故
$$A = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right) - \frac{2\rho v_*^2}{r\mu} \delta = \frac{v_*^2}{\nu} \left[\left(1 - \frac{\delta}{r}\right) - \frac{2\delta}{r}\right] = \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - 3\frac{\delta}{r}\right)$$

因此，式(1-21)可写成：

$$v = \frac{\rho v_*^2}{r\mu} y^2 + \frac{v_*^2}{\nu} \left(1 - 3\frac{\delta}{r}\right) y \quad (1-22)$$

上式就是管流层流附面层流速分布公式。

利用实验资料可检验式(1-22)的近似正确性。为了便于比较，把式(1-22)写成：

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \left[1 - 3\frac{\delta}{r} + \frac{y}{r}\right] \quad (1-23)$$

在文献中常以 u^+ , y^+ 代表 $\frac{v}{v_*}$ 和 $\frac{v_* y}{\nu}$ ，则

$$u^+ = y^+ \left(1 - 3\frac{\delta}{r} + \frac{y}{r}\right) \quad (1-24)$$

从式(1-24)可见，当 $y \ll r$ 和 $\delta \ll r$ 时，则

$$u^+ \approx y^+$$

实验结果如图 5-1。其中“1”线是 $u^+ = y^+$ 计算线，“2”是实验线。表明实验分布近似直线，但略偏离，如式(1-24)所揭示的。

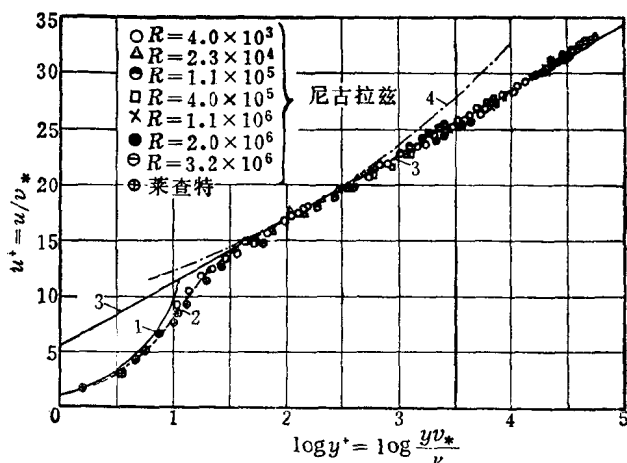


图 1-5

五、层流稳定性理论

二元层流流线函数满足如下方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = \nu \Delta\Delta\psi \quad (1-3)$$

现以平板绕流层流边界层作为分析对象。令平均流动受到扰动，则流线函数由两部分所组成：

$$\psi = \Psi + \psi' \quad (1-25)$$

式中 Ψ 为受扰动前的流线函数，它是坐标的函数， $\Psi = \Psi(x, y)$ ； ψ' 则为扰动流线函数，它是坐标与时间的函数，即 $\psi' = \psi'(x, y, t)$ 。亦即

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + v'_x = V_x + v'_x, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v'_y = V_y + v'_y$$

式中

$$v'_x = \frac{\partial\psi'}{\partial y}, \quad v'_y = -\frac{\partial\psi'}{\partial x}$$

由于 Ψ 与 t 无关，故它满足

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = \nu \Delta \Delta \Psi \quad (1-26)$$

把式(1-25)代入式(1-9)中,并考虑式(1-26)后,化简并忽略高阶项后得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} &= \nu \Delta \Delta \psi' \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' + u \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - u'' \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \nu \Delta \Delta \psi' \end{aligned} \quad (1-27)$$

现令受扰动的层流产生微波,以复数波的形式表示:

$$\begin{aligned} \psi' &= f(y) \exp i(ax - bt) \\ &= f(y) [\cos(ax - bt) - i \sin(ax - bt)] \end{aligned}$$

如令 $a = \frac{2\pi}{\lambda}$, 为实数, 而 b 则为虚数, 则

$$\psi' = f(y) \exp [i(ax - b_1 t) + b_2 t] \quad (1-28)$$

当 $b_1 > 0$ 时, ψ' 随时间增加, 扰动处于激励状态, 层流为不稳定的; 当 $b_1 < 0$ 时, ψ' 随时间递减, 这时层流为稳定的; 当 $b_1 = 0$ 时, 扰动处于中性稳定状态。现将式(1-28)微分并代入式(1-27)中, 可得:

$$(ia^2 b f - ib f'') + u(-ia^3 f + ia f'') - u''(ia f) = \nu(f'''' - 2a^2 f'' + a^4 f)$$

将上式化简, 可得

$$\left(u - \frac{b}{a}\right)(f'' - a^2 f) - u'' f = -\frac{iv}{a}(f'''' - 2a^2 f'' + a^4 f) \quad (1-29)$$

上式就是奥尔——桑莫菲尔特方程式。

现确定求解的边界条件。在边界面上扰动流速为零。即当 $y = 0$, $v'_x = v'_y = 0$, 故 $-\frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0$, 则

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (1-30)$$

层流边界层上边界与其外的流动近似理想流体, 即 $\nu \approx 0$, $u'' \approx 0$, 故在上边界扰动满足下式, 即

$$f'' - a^2 f = 0 \quad (1-31)$$

其解为:

$$f = C_1 \exp ay + C_2 \exp(-ay)$$

对平板绕流来说, 在无穷远处扰动为零, 故第一项没有物理意义, 因此

$$f = C_2 \exp(-ay)$$

则

$$f' = -C_2 a \exp(-ay)$$

从而得到第三边界条件为:

$$f'(\delta) + af(\delta) = 0 \quad (1-32)$$

为便于分析, 将式(1-29)化成无量纲形式。令

$$a\delta = \alpha, \quad \frac{b}{au_m} = C, \quad \frac{u_m \delta}{\nu} = R, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_m}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}$$

并令

$$\psi' = f(\bar{y}) \exp i\alpha(x - Ct)$$

$$\text{则 } (\bar{u}-c)\left(\frac{d^2 f}{d\bar{y}^2}-\alpha^2 f\right)-\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} f=-\frac{i}{\alpha R}\left(\frac{d^4 f}{d\bar{y}^4}-2\alpha^2 \frac{d^2 f}{d\bar{y}^2}+\alpha^4 f\right) \quad (1-33)$$

边界条件为:

$$f(0)=f'(0)=0, f'(1)+\alpha f(1)=0 \quad (1-34)$$

在式(1-33)中,除 \bar{u} 及其导数给定外,还包括三个参数: α , c 及 R 。 α 为边界层微波无量纲波长, R 为雷诺数,都为实数。 c 则为复数。满足式(1-34)条件时式(1-33)的解为:

$$F(c, \alpha, R)=0 \quad (1-35)$$

或写成:

$$c=c(R, \alpha)$$

把它分成实部和虚部,则曲线

$$c_i=c_i(R, \alpha)=0 \quad (1-36)$$

将是稳定与不稳定的分界线。

令式(1-33)的特解为 f_1, f_2, f_3 ,则

$$f=c_1 f_1+c_2 f_2+c_3 f_3$$

满足前两个边界条件

$$f(0)=c_1 f_1(0)+c_2 f_2(0)+c_3 f_3(0)=0$$

$$f'(0)=c_1 f_1'(0)+c_2 f_2'(0)+c_3 f_3'(0)=0$$

满足第三边界条件

$$c_1[f_1'(1)+\alpha f_1(1)]+c_2[f_2'(1)+\alpha f_2(1)]=0$$

则上方程组存在解的条件为:

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) \\ f_1'(1)+\alpha f_1(1) & f_2'(1)+\alpha f_2(1) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1-37)$$

求解此行列式,可求出 c 、 α 、 R 的关系。以下介绍林家翘解此问题的数值计算方法^[10,11]。

把式(1-33)的解展成:

$$f=f^{(0)}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)}+(\alpha R)^{-2}f^{(2)}+\dots \quad (1-38)$$

则

$$\begin{cases} f''=f^{(0)''}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)''}+(\alpha R)^{-2}f^{(2)''}+\dots \\ f^N=f^{(0)N}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)N}+(\alpha R)^{-2}f^{(2)N}+\dots \end{cases}$$

把式(1-38)代入式(1-33)中,得

$$\begin{aligned} & (\bar{u}-c)\{f^{(0)''}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)''}+\dots-\alpha^2[f^{(0)}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)}+\dots]\} \\ & -\bar{u}''[f^{(0)}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)}+\dots] \\ & =-\frac{i}{\alpha R}\{[f^{(0)N}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)N}+\dots]-2\alpha^2[f^{(0)''}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)''}+\dots] \\ & +\alpha^4[f^{(0)}+(\alpha R)^{-1}f^{(1)}+\dots]\} \end{aligned}$$

比较 $(\alpha R)^m$ 项可得:

$$\begin{cases} (\bar{u}-c)(f^{(0)''} - \alpha^2 f^{(0)}) - \bar{u}'' f^{(0)} = 0 \\ (\bar{u}-c)(f^{(1)''} - \alpha^2 f^{(1)}) - \bar{u}'' f^{(1)} = -i(f^{(0)N} - 2\alpha^2 f^{(0)N} + \alpha^4 f^{(0)}) \\ (\bar{u}-c)(f^{(2)''} - \alpha^2 f^{(2)}) - \bar{u}'' f^{(2)} = -i(f^{(1)N} - 2\alpha^2 f^{(1)N} + \alpha^4 f^{(1)}) \\ \dots\dots \end{cases}$$

把它们归纳成:

$$(\bar{u}-c)(f^{(k)''} - \alpha^2 f^{(k)}) - \bar{u}'' f^{(k)} = 0 \quad (1-39)$$

$$(\bar{u}-c)(f^{(k)''} - \alpha^2 f^{(k)}) - \bar{u}'' f^{(k)} = -i(f^{(k-1)N} - 2\alpha^2 f^{(k-1)N} + \alpha^4 f^{(k-1)}) \quad (1-40)$$

式(1-39)就是忽略粘性力(当 $\alpha R \rightarrow \infty$)的扰动方程,其解可写成参数 α^2 的展开式:

$$\begin{cases} f_1^{(0)} = (\bar{u}-c)[h_0(\bar{y}) + \alpha^2 h_2(\bar{y}) + \alpha^4 h_4(\bar{y}) + \dots\dots] \\ f_2^{(0)} = (\bar{u}-c)[k_1(\bar{y}) + \alpha^2 k_3(\bar{y}) + \alpha^4 k_5(\bar{y}) + \dots\dots] \end{cases} \quad (1-41)$$

在上两解答中

$$\begin{cases} h_0(\bar{y}) = 1 \\ h_{2n+2}(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{(\bar{u}-c)^2} \left[\int_0^{\bar{y}} (\bar{u}-c)^2 h_{2n}(\bar{y}) d\bar{y} \right] d\bar{y} \\ k_1(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \frac{d\bar{y}}{(\bar{u}-c)^2} \\ k_{2n+3}(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} (\bar{u}-c) \left[\int_0^{\bar{y}} \frac{k_{2n+1}(\bar{y})}{(\bar{u}-c)^2} d\bar{y} \right] d\bar{y} \end{cases} \quad (1-42)$$

为了在靠近奇点($\bar{u}=c$, 相应于 $y=y_c$)区域计及粘性影响,海森伯尔格提出求另两解的方法如下:

$$\begin{aligned} \bar{y} - y_c &= \varepsilon \eta \\ \varepsilon &= (\alpha R)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

而

如令 $f(\bar{y}) = \chi(\eta)$, 则

$$f'(\bar{y}) = \frac{\chi'(\eta)}{\varepsilon}, \quad f'' = \frac{\chi''}{\varepsilon^2}, \quad \dots\dots$$

代入式(1-33)中,得

$$(\bar{u}-c)(\chi'' - \alpha^2 \varepsilon^2 \chi) - \varepsilon^2 \bar{u}'' \chi = -\frac{i}{\alpha R \varepsilon^2} (\chi^N - 2\alpha^2 \varepsilon \chi'' + \alpha^4 \varepsilon^4 \chi)$$

但因 $\alpha R = \varepsilon^{-3}$, 故上式可写成:

$$(\bar{u}-c)(\chi'' - \alpha^2 \varepsilon^2 \chi) - \varepsilon^2 \bar{u}'' \chi = -i\varepsilon (\chi^N - 2\alpha^2 \varepsilon^2 \chi'' + \alpha^4 \varepsilon^4 \chi) \quad (1-43)$$

并且把 $(\bar{u}-c)$ 与 \bar{u}'' 也按泰勒级数展开:

$$\begin{aligned} (\bar{u}-c) &= \bar{u}'_c(\varepsilon \eta) + \bar{u}''_c \frac{(\varepsilon \eta)^2}{2!} + \dots\dots \\ \bar{u}'' &= \bar{u}''_c + \bar{u}'''_c(\varepsilon \eta) + \bar{u}^{IV}_c \frac{(\varepsilon \eta)^2}{2!} + \dots\dots \end{aligned}$$

式中

$$\bar{u}'_c = \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{\bar{y}=y_c}$$

令方程式 (1-43) 的解为:

$$f(\bar{y}) = \chi(\eta) = \chi^{(0)}(\eta) + \varepsilon \chi^{(1)}(\eta) + \varepsilon^2 \chi^{(2)}(\eta) + \dots \quad (1-44)$$

把式 (1-44) 代入式 (1-43) 中, 并比较 ε 的不同方次项, 可得函数 $\chi^{(0)}(\eta)$, $\chi^{(1)}(\eta)$, \dots 的微分方程组如下:

$$\varepsilon^0: \bar{u}'_c \eta \chi^{(0)''} + i \chi^{(0)IV} = 0 \quad (1-45)$$

$$\varepsilon^n: \bar{u}'_c \eta \chi^{(n)''} + i \chi^{(n)IV} = L_{n-1}(\chi) \quad (n \geq 1) \quad (1-46)$$

此处 $L_{n-1}(\chi)$ 为 $\chi^{(0)} \dots \chi^{(n-1)}$ 的线性组合。当 $\alpha R \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon \rightarrow 0$ 。这时只需寻求式 (1-45) 的解。

方程式 (1-45) 具有如下四个特解:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1^{(0)} = \eta \\ \chi_2^{(0)} = 1 \\ \chi_3^{(0)} = \int_{+\infty}^{\eta} d\eta \int_{+\infty}^{\eta} \sqrt{\eta} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} \right] d\eta \\ \chi_4^{(0)} = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \sqrt{\eta} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{\frac{3}{2}} \right] d\eta \end{array} \right. \quad (1-47)$$

在上解答中

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\bar{u}'_c}$$

而 $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ 和 $H_{\frac{1}{3}}^{(2)}$ 则为 $\frac{1}{3}$ 阶的汉克尔函数。

解式 (1-47) 与流速分布型式无关。

特解求出后, 代入式 (1-37), 可求出式 (1-36) 的表达式。从式 (1-37), 得

$$\frac{f_3^{(0)}}{f_3'^{(0)}} = \frac{\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(1) + \alpha f_1(1) & f_2'(1) + \alpha f_2(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1'(0) & f_2'(0) \\ f_1'(1) + \alpha f_1(1) & f_2'(1) + \alpha f_2(1) \end{vmatrix}}$$

并令

$$F_1(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1'(0) & f_2'(0) \\ f_1(0) & f_2(0) \end{vmatrix}, \quad F_2(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(1) & f_2'(1) \end{vmatrix},$$

$$F_3(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1'(0) & f_2'(0) \\ f_1(1) & f_2(1) \end{vmatrix}, \quad F_4(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1'(0) & f_2'(0) \\ f_1'(1) & f_2'(1) \end{vmatrix}$$

则

$$\frac{f_3(0)}{f_3'(0)} = \frac{F_2 + \alpha F_1}{F_4 + \alpha F_3} \quad (1-48)$$

因当 $\bar{y}=0$ 时, $\bar{u}=0$ 。并且 $h_0(0)=1$, $h_{2n+2}(0)=0$ 。代入式 (1-41) 得 $f_1(0)=-c$ 。其次, 从式 (1-42), $k_1(0)=0$, $k_{2n+3}(0)=0$ 。代入式 (1-41), $f_2(0)=0$ 。再次, 将式 (1-41) 微分, 然后将 $\bar{y}=0$ 的条件代入, 可求出 $f_1'(0)=\bar{u}'_c$, $f_2'(0)=-\frac{1}{c}$ 。此处, $\bar{u}'_c =$

$\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} \right)_{\bar{y}=0}$, 故

$$\begin{cases} f_1(0) = c, f_2(0) = 0 \\ f_1'(0) = \bar{u}'_0, f_2'(0) = -\frac{1}{c} \end{cases} \quad (1-49)$$

$f_1(1), f_1'(1), f_2(1), f_2'(1)$ 的计算式则为:

$$\begin{cases} f_1(1) = (1-c)\{1 + \alpha^2 h_2(1) + \alpha^4 h_4(1) + \dots\} \\ f_2(1) = (1-c)\{k_1(1) + \alpha^2 k_3(1) + \dots\} \\ f_1'(1) = \frac{1}{1-c} \left\{ \alpha^2 \int_0^1 (\bar{u}-c)^2 d\bar{y} + \alpha^4 \int_0^1 (\bar{u}-c)^2 h_2(\bar{y}) d\bar{y} + \dots \right\} + \frac{\bar{u}'_0}{(1-c)} f_1(1) \\ f_2'(1) = \frac{1}{1-c} \left\{ 1 + (1-c)^4 \left[\alpha^2 \int_0^1 \frac{k_1(\bar{y})}{(\bar{u}-c)^2} d\bar{y} + \dots \right] \right\} + \frac{\bar{u}'_0}{(1-c)} f_2(1) \end{cases} \quad (1-50)$$

故

$$\begin{cases} F_1(\alpha, c) = -c f_2(1) \\ F_2(\alpha, c) = -c f_2'(1) \\ F_3(\alpha, c) = \bar{u}'_0 f_2(1) + \frac{1}{c} f_1(1) \\ F_4(\alpha, c) = \bar{u}'_0 f_2'(1) + \frac{1}{c} f_1'(1) \end{cases} \quad (1-51)$$

把式(1-51)代入式(1-48)中, 可以对式(1-48)右边进行计算。

式(1-48)左边就是式(1-47)第三特解及其导数的比值, 即

$$\frac{f_3(0)}{f_3'(0)} = \frac{\int_{-\frac{y_0}{\varepsilon}}^{\frac{y_0}{\varepsilon}} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \sqrt{\eta} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{3/2} \right] d\eta}{\int_{-\frac{y_0}{\varepsilon}}^{\frac{y_0}{\varepsilon}} \sqrt{\eta} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\alpha_0 \eta)^{3/2} \right] d\eta} \quad \varepsilon$$

如令 $\zeta = \alpha_0 \eta$, 则

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y_0} \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} &= \frac{\int_{-\infty}^{-z} d\zeta \int_{-\infty}^{\zeta} \zeta^{1/2} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\zeta)^{3/2} \right] d\zeta}{-z \int_{-\infty}^{-z} \zeta^{1/2} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3} (i\zeta)^{3/2} \right] d\zeta} \\ &= F(z) = F_r(z) + iF_i(z) \end{aligned} \quad (1-52)$$

式中

$$z = y_0 \frac{\alpha_0}{\varepsilon} = y_0 \sqrt{\bar{u}'_0 \alpha R}$$

图1-6与表1-1是林家翘的计算结果。

在同表中给出了另一个函数 $F'(z)$ 值, 其定义为:

$$F'(z) = [1 - F(z)]^{-1} \quad (1-53)$$

式(1-52)在一定的 z 值情况下为 α, c 的函数, 以 $E(c, \alpha)$ 表示, 则

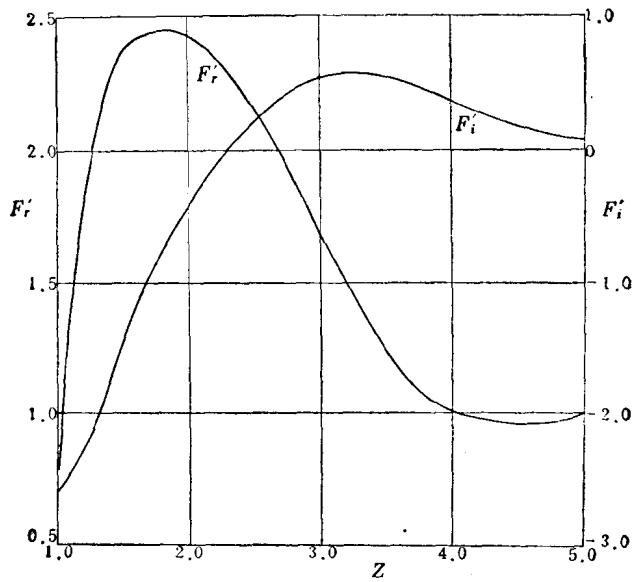


图 1-6

表 1-1

z	F_r	F_i	F_r'	F_i'
1.0	0.89161	-0.35025	0.80630	-2.60557
1.2	0.78969	-0.27310	1.77012	-2.29854
1.4	0.71970	-0.21213	2.26836	-1.71669
1.6	0.66931	-0.16009	2.44985	-1.18600
1.8	0.63143	-0.11274	2.48102	-0.75892
2.0	0.60144	-0.06741	2.43921	-0.41253
2.2	0.57599	-0.02226	2.35196	-0.12348
2.4	0.55230	-0.02395	2.22724	0.11916
2.6	0.52773	-0.07203	2.06929	0.31558
2.8	0.49952	0.12220	1.88566	0.46043
3.0	0.46456	0.17391	1.68938	0.54872
3.2	0.41941	0.22520	1.49726	0.58082
3.4	0.36110	0.27193	1.32516	0.56401
3.6	0.28802	0.30705	1.18429	0.51074
3.8	0.20352	0.32130	1.07982	0.43560
4.0	0.11800	0.30721	1.01118	0.35220
4.2	0.04698	0.26559	0.97361	0.27133
4.4	0.02400	0.20811	0.96056	0.20038
4.6	0.02160	0.14475	0.95989	0.13601
4.8	0.01477	0.09875	0.97659	0.09503

$$E(c, \alpha) = F_r(z) + iF_i(z) = E_r(c, \alpha) + iE_i(c, \alpha) \quad (1-54)$$

式 (1-48) 最后可写成:

$$E(c, \alpha) = \frac{c}{y_c} \frac{f_2'(1) + \alpha f_2(1)}{\bar{u}'_0[f_2'(1) + \alpha f_2(1)] + \frac{1}{c}[f_1'(1) + \alpha f_1(1)]}$$