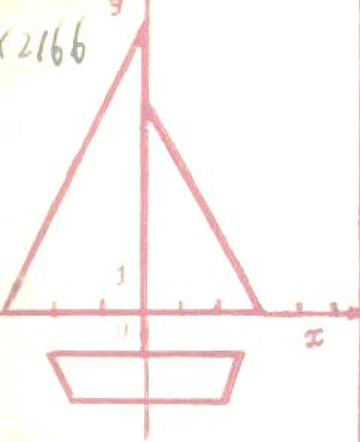
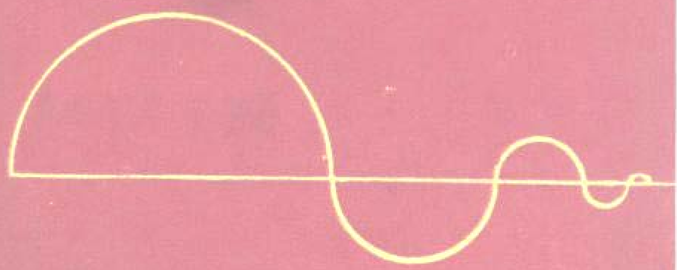
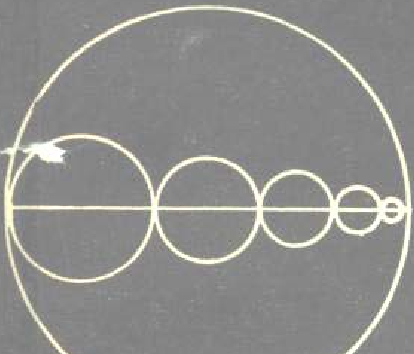
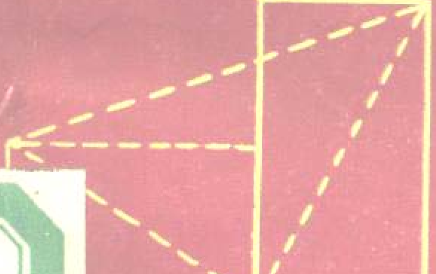


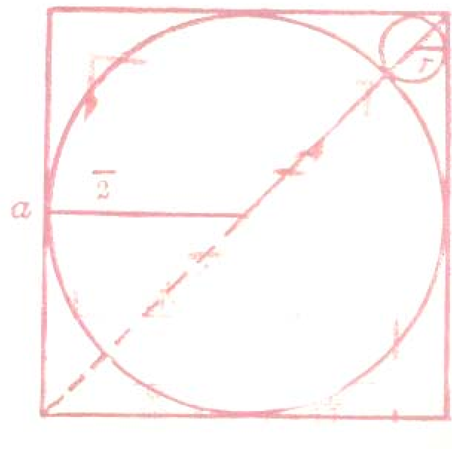




中学数学实验教材

第三册 下





师范大学出版社

中学数学实验教材

第三册（下）

中学数学实验教材编写组 编

北京师范大学出版社

1983年7月

2040/22

中学数学实验教材

第三册（下）

中学数学实驗教材編写組 编

●

北京师范大学出版社出版

新华書店北京发行所发行

北京师范大学印刷厂印刷

●

开本：787×1092 1/32 印张：4.125 字数：84千

1983年7月第1版 1984年6月第2次印刷

印数：32，801——51，301

统一书号：7243·129 定价：0.36元

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是，使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、

表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论。学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形、圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系，教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证

几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和通法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校，北京师院附中，上海大同中学，天津南开中学，天津十六中学，广东省实验中学，华南师院附中，长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，公开发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订的过程中，项武义教授曾数次详细地修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大的范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八一年三月

目　　录

第六章　任意角的三角函数

§1　弧和角的概念及其度量

1.1　任意大小的角

在平面几何里，每一个角可以看作是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的.射线的端点叫做角的顶点,射线旋转的开始位置叫做角的始边，终止位置叫做角的终边.如图6.1所示的角 α 是射线 OA 绕着端点 O，按着箭头所示的方向旋转到 OB 所形成. O 点是角 α 的顶点，射线 OA 和 OB 分别是角 α 的始边和终边.

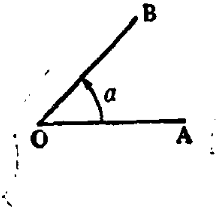


图　6.1

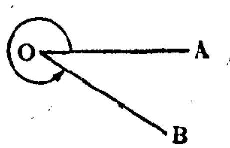


图　6.2a

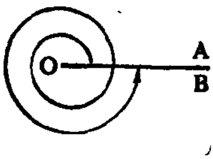


图　6.2b

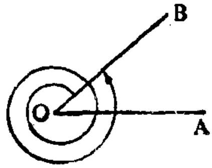


图　6.2c

射线旋转所形成的角可以是任意大小的角，这也就是说，一条射线旋转所成的角可以是锐角，钝角，平角，也可以大于一个平角（图6.2a），也可以绕端点若干周后和开始的位置重合（图6.2b），也可以旋转若干周又一周的部分（图6.2c）.

我们还看到射线有两种相反的旋转方向：逆时针方向和顺时针方向.为了加以区别，我们把按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角.例如图6.3中以 OA 为始边的角 $\alpha=210^\circ$，$\beta=-150^\circ$，$\gamma=-660^\circ$.

如果射线 OA 没有作任何旋转，仍留在开始的位置，那么我们也把它看成一个角，叫做零角.

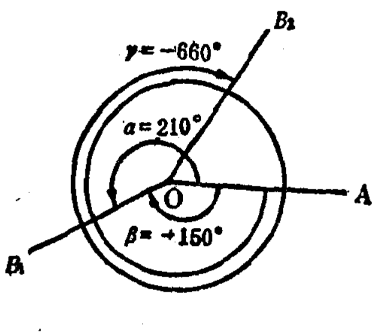


图 6.3

这样，我们把角的概念推广到了任意的角，包括正角、负角和零角.

我们这样引进来的广义角的概念，是由下列三个因素组成："始边"、"旋转方向"、"旋转量".旋转量的大小通常是以度数或弧度数来表示.

和角的概念对应的是弧的概念.

我们已经讨论了任意大小的角，现在再来讨论任意大小的弧.

圆弧可以看做是射线上的一点（不与端点重合），随着

射线旋转所形成的轨迹.

如图6.4所示，弧$\overset{\frown}{MM'}$是射线OA上的M点，随着射线OA旋转，由起始位置到OB时所形成的轨迹.显然，对于任意角α的终边的每个位置，都有M点划出的弧$\overset{\frown}{MM'}$和它对应.和规定角的正负一样，我们规定：当射线上的一点按逆时针方向旋转时，该点所划出的弧为正的；按顺时针方向旋转时，该点所划出的弧为负的，这样规定就使正、负角和正、负弧对应起来.

再来规定角和它所对应弧的量数.在平面几何里，我们曾规定把圆周分成360等分，每一份叫做一度的弧，一度弧所对的圆心角叫做一度的角.因此，一个圆弧含有多少度、分、秒，它所对圆心角也含有多少度、分、秒，即弧与其所对应的圆心角有完全相同的量数.例如圆心角是500°的角时，它所对的弧就是500°的弧；圆心角是-300°时，它所对的弧也是-300°.

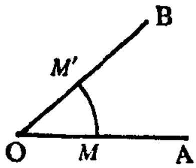


图 6.4

1.2 角的度量

角的度量是取一个确定的角作为度量单位，利用它来量所有的角.用周角的$\frac{1}{360}$作为度量单位的叫做"度".在高等数学和其它基础科学理论系统中也常用弧度作为度量圆弧和角的单位.

在弧度制中，取等于半径长的圆弧作为单位弧长.这样的弧叫做一弧度弧.用一弧度弧度量同一个圆上的圆弧所得到的量数叫做这个圆弧的弧度数.这也就是说给定圆弧的弧

度数等于圆弧的弧长和半径的比值：

$$\alpha = \frac{l}{R} \qquad (1)$$

这里 α 是圆弧的弧度数，l 是弧长，R 是圆的半径。

我们指出圆心角所张的圆弧的弧度数由这个角的大小决定，而和圆的半径长短无关。

事实上，从几何里知道，在圆心角相同时，两个圆上的弧长的比等于它们的半径长的比（图 6.5），即

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{A_2B_2}} = \frac{R_1}{R_2},$$

或

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{R_1} = \frac{\overset{\frown}{A_2B_2}}{R_2},$$

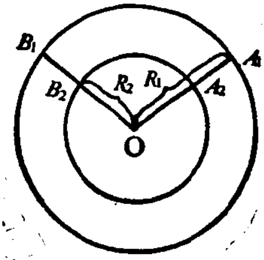


图 6.5

这就是说，两个圆弧 $\overset{\frown}{A_1B_1}$，$\overset{\frown}{A_2B_2}$ 的弧度数是相同的。

因此，一个圆心角所对的弧的弧度数可以表示这个角的大小，我们也把圆心角所对的圆弧的弧度数称为这个角的弧度数。

定义 以一个角为圆心角，这个角所对的弧的长和这个弧的半径长之比，叫做这个角的弧度数。

当弧长等于半径时，这个比值等于1，因此，在弧度制里，度量一个角时，我们规定：

长度等于半径的圆弧所对的圆心角叫做1弧度角。换言之，一弧度圆弧所对的圆心角叫做1弧度角。

这样，

由（1）推得

$$l = \alpha R \qquad (2)$$

即圆弧长等于这圆弧的弧度数（或这弧所对圆心角的弧度数）和半径长的乘积.特别地，单位圆上的弧长等于它的弧度数.

利用（1）还可以直接计算一些特殊角的弧度数.

当弧长等于圆周长 $C=2\pi R$ 时，这个比值等于 2π，因此，

$$\text{周角} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi\text{弧度},$$

$$\text{平角} = \frac{1}{2}\text{周角} = \pi\text{弧度},$$

$$\text{直角} = \frac{1}{4}\text{周角} = \frac{\pi}{2}\text{弧度},$$

$$45^\circ = \frac{1}{2}\text{直角} = \frac{\pi}{4}\text{弧度},$$

$$30^\circ = \frac{1}{3}\text{直角} = \frac{\pi}{6}\text{弧度},$$

$$60^\circ = \frac{1}{3}\text{平角} = \frac{\pi}{3}\text{弧度},$$

注意　角的量数是以弧度数表示的，通常只写出数值不写出单位，以后我们都将单位“弧度”二字省略不写.例如平角 $=\pi$ 弧度就写成平角 $=\pi$.但是千万不要误解平角就是圆周率3.1415926…….

度与弧度的互化.

因为平角 $=180^\circ=\pi$，所以 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}\approx 0.017453$.

$A°$的角相应的弧度数：

$$\alpha=\frac{A\pi}{180}.$$

$$1'=\left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}=\frac{1}{60}\left(\frac{\pi}{180}\right)\approx 0.00029088.$$

$$又1(弧度)=\frac{180^{\circ}}{\pi}=57.295^{\circ}\approx 3438'\approx 206265''$$

$$\approx 57^{\circ}17'45''.$$

α 弧度的角相应的度数：

$$A^{\circ}=\frac{\alpha\cdot 180^{\circ}}{\pi}.$$

下表给出一些常见角的弧度和它们的近似值：

度	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧　度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
近似值	0.5236	0.7854	1.0472	1.5708	3.1416	4.7124	6.2832

例1　化$67°30'$为弧度.

解：$67°30'=67.5°=\frac{\pi}{180}\times 67.5=\frac{3}{8}\pi$（弧度）.

例2　化$\frac{3}{5}\pi$弧度为度.

解：$\frac{3}{5}\pi=\frac{180^{\circ}}{\pi}\times\frac{3}{5}\pi=108^{\circ}$.

例3　两皮带轮的半径 $R_1=20$，$R_2=30$，求它们的转速

之比（图6.6）.

解：因为在相同的时间内，两轮周上转过的弧长相等，即 $S_1=S_2$，在弧度制下：

$$S_1=\alpha_1R_1;$$
$$S_2=\alpha_2R_2;$$
$$\therefore\quad \alpha_1R_1=\alpha_2R_2.$$
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{30}{20},$$
$$\therefore\quad \alpha_1:\alpha_2=3:2.$$

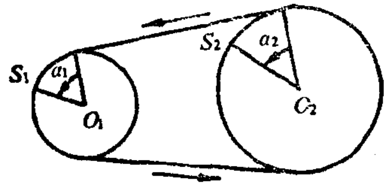


图 6.6

例4 地球的半径为6400公里，在同一经线上，甲、乙两地的距离为150公里，试求甲、乙两地纬度差。

解：设θ为甲、乙两地纬度差，则

$$\theta=\frac{150}{6400}\approx0.0234$$
$$=0.0234\times\frac{180^\circ}{\pi}$$
$$\approx0.0234\times3438'$$
$$\approx13^\circ14'.$$

答 两地纬度差为$13^\circ14'$.

习题1.2

1. 把下列各角的度数化为弧度数：
(1) 2°； (2) 5°； (3) $7^\circ30'$； (4) $12^\circ30'$；
(5) 22.5°； (6) 200°； (7) 320°； (8) $14^\circ24'$；
(9) $86^\circ45'$； (10) $157^\circ30'$.

2. 把下列各角的弧度数化为度数：

（1）0.4800；（2）0.0099；（3）2.6400；（4）$\frac{3}{5}\pi$；

（5）$\frac{4}{5}\pi$；（6）$\frac{\pi}{15}$；（7）$\frac{\pi}{10}$；（8）3π．

3. 已知 200° 的圆心角所对的弧长等于 50cm，求圆的半径．

4. 轮子每秒旋转 $\frac{5}{18}$ 弧度，20秒钟内转了多大角度？

5. 一个大钟的长针长 2 尺 8 寸．20秒间针端走了几寸？

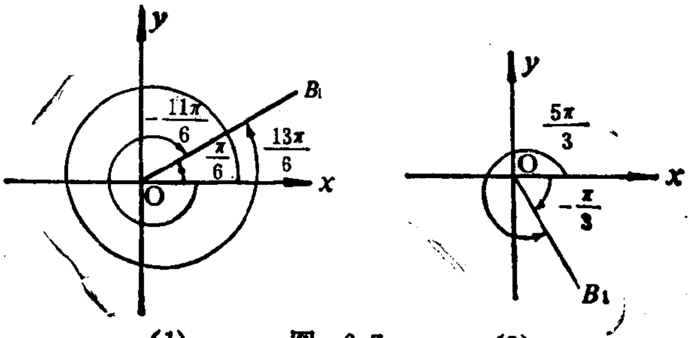
6. 扇形弧长为20cm，半径为15cm，求扇形面积．

7. 地球半径为6400公里，地面上一弧所对球心角为$1'$，问弧长若干公里？

1.3 始边和终边相同的角

今后我们常在直角坐标系里讨论角，并把角放在下面的标准位置：使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合．角的终边在第几象限，就把这个角叫做第几象限角（或说这个角属于第几象限）．如图6.7（1）中，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6}$和$-\frac{11\pi}{6}$都是第一象限的角．在图6.7（2）中，$-\frac{\pi}{8}$，$\frac{5\pi}{8}$都是第四象限的角．

在图6.7（1）中可以看到$\frac{13\pi}{6}$与$-\frac{11\pi}{6}$都和$\frac{\pi}{6}$的角终边相同．$\frac{13\pi}{6}$和$-\frac{11\pi}{6}$可以写成下列形式：



(1)　　图　6.7　　(2)

$$2\pi+\frac{\pi}{6};\qquad -2\pi+\frac{\pi}{6};$$

显然，除了这两个角以外，与$\frac{\pi}{6}$的角终边相同的角还有：

$$2\times2\pi+\frac{\pi}{6};\qquad -2\times2\pi+\frac{\pi}{6};$$

$$3\times2\pi+\frac{\pi}{6};\qquad -3\times2\pi+\frac{\pi}{6};$$

$$\cdots\cdots;\qquad \cdots\cdots.$$

所有和$\frac{\pi}{6}$的角终边相同的角，连同$\frac{\pi}{6}$在内，可以用下式表示：

$$2k\pi+\frac{\pi}{6},\ (k\in Z).$$

当$k=0$时，它表示$\frac{\pi}{6}$的角；

$k=1$时，它表示$\frac{13\pi}{6}$的角；