内 容 简 介

本书是为广播电视大学高等数学课而编写的辅导教材。内容包括场论初步、复变函数、积分变换及数理方程初步等，并有针对性的典型例题134个，都作了比较详细的推导，对各种解法也作了细致的分析和比较。本书可供广播电视大学和职工大学学员和自学高等数学人员使用，也可供高等工科院校学生及辅导教师参考。

场论与数理方法辅导

冯 泰　匡萃心　编

蒋定华　审阅

中国铁道出版社出版

责任编辑　丁益民　封面设计　王毓平

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/32　印张：12.375　字数：283 千

1 9 8 5 年 2 月　第 1 版　第 1 次印刷

印数：0001—20,000册　定价：2.30元

目　　录

第一篇　矢量分析与场论初步

第二篇　复 变 函 数

第三篇　积 分 变 换

第四篇　数 理 方 程

第一篇　矢量分析与场论初步

矢量分析既是矢量代数的继续，又是场论的预备知识。场论是以矢量为工具，用微积分（尤其是曲线积分和曲面积分）的理论来研究力学或物理学中的场，因此这部分内容具有很强的物理意义。

一、基 本 要 求

1. 掌握矢量函数的微分法。

2. 正确理解数量场、矢量场、梯度、散度及旋度等概念。

3. 熟练地掌握梯度、散度及旋度在直角坐标系中的计算公式。

4. 掌握高斯公式、斯托克斯公式，会用高斯公式计算曲面积分。

5. 会判别有势场、管形场及调和场。

6. 熟悉有关∇算子的一些运算。

重点是梯度、散度、旋度概念和计算公式以及高斯公式。

二、基 本 内 容

（一）矢量分析

1. 矢量函数

（1）定义　设有数性变量 t 和变矢量**A**。若对于 t 在某个范围内的每一个数值，**A**都有一个确定的矢量和它对应，则称**A**为数性变量 t 的矢量函数。记为

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(t) \tag{1}$$

在直角坐标系中表示为

$$\mathbf{A}=A_x(t)\mathbf{i}+A_y(t)\mathbf{j}+A_z(t)\mathbf{k} \tag{1'}$$

（2）矢端曲线　矢量函数$\mathbf{A}(t)$的起点取在坐标原点，其终点随变量 t 变化即描绘出一条曲线，该曲线叫做$\mathbf{A}(t)$的矢端曲线。即$\mathbf{A}(t)$的图形。

2. 矢量函数的极限和连续

（1）极限　设矢量函数$\mathbf{A}(t)$在点t_0的某个邻域内有定义（在t_0点可以没有定义），$\mathbf{A}_0$为常矢。若对任意给定$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$，当$0<|t-t_0|<\delta$时，就有

$$|\mathbf{A}_{(t)}-\mathbf{A}_0|<\varepsilon$$

成立，则称当$t\to t_0$时，$\mathbf{A}(t)$有极限$\mathbf{A}_0$，记作

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}_0 \tag{2}$$

在直角坐标系中有

$$\lim_{t\to t_0}A_x(t)=A_{ox}$$
$$\lim_{t\to t_0}A_y(t)=A_{oy}$$
$$\lim_{t\to t_0}A_z(t)=A_{oz} \tag{2'}$$

其中$\mathbf{A}_0=A_{ox}\mathbf{i}+A_{oy}\mathbf{j}+A_{oz}\mathbf{k}$

（2）连续　设$\mathbf{A}(t)$在t_0的某邻域内有定义，且

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}(t_0) \tag{3}$$

即

$$\lim_{t\to t_0}A_x(t)=A_x(t_0)$$
$$\lim_{t\to t_0}A_y(t)=A_y(t_0)$$
$$\lim_{t\to t_0}A_z(t)=A_z(t_0) \tag{3'}$$

称$\mathbf{A}(t)$在t_0点连续。

3. 矢量函数的导数与微分

（1）定义　设矢量函数$\mathbf{A}(t)$在点 t 处有增量

$$\Delta\mathbf{A}=\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)$$

与对应的Δt之比

$$\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t}=\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

当$\Delta t\to 0$时，其极限存在，称此极限值为$\mathbf{A}(t)$在点 t 处的导数（或导矢）。记为

$$\mathbf{A}'(t)=\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}\qquad(4)$$

称

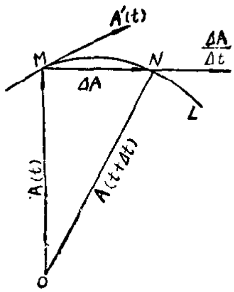
$$d\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}'(t)dt\qquad(\Delta t=dt)\qquad(5)$$

为$\mathbf{A}(t)$在 t 处的微分。在直角坐标系中有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=A'_x(t)\mathbf{i}+A'_y(t)\mathbf{j}+A'_z(t)\mathbf{k}\qquad(4')$$

$$d\mathbf{A}=dA_x(t)\mathbf{i}+dA_y(t)\mathbf{j}+dA_z(t)\mathbf{k}=[A'_x(t)\mathbf{i}+A'_y(t)\mathbf{j}+A'_z(t)\mathbf{k}]dt\qquad(5')$$

（2）几何意义　导矢$\mathbf{A}'(t)$在矢端曲线点 M（$\mathbf{OM}=\mathbf{A}(t)$）处的切线上。其方向总指向 t 增大的一方。导矢的几何意义为**切向矢量**（如场图 1 所示）。



场图　1

（3）导数公式

1° $\frac{d}{dt}(\mathbf{C})=0$　　（$\mathbf{C}$为常矢）

2° $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\frac{d}{dt}\mathbf{A}\pm\frac{d}{dt}\mathbf{B}$

3° $\frac{d}{dt}(u\mathbf{A})=\frac{du}{dt}\mathbf{A}+u\frac{d\mathbf{A}}{dt}$

当 $u=k$（常数）时，$\frac{d}{dt}(k\mathbf{A})=k\frac{d\mathbf{A}}{dt}$。

4° $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{B}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}$

5° $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}$

6° 若$\mathbf{A}=\mathbf{A}(u)$，$u=u(t)$，则 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\frac{du}{dt}$。

这些公式与数学分析中函数的导数公式类似。只是乘法法则中，矢量有点乘、叉乘之分。而矢量之间无除法，故无除法法则。

4. 矢量函数的积分

（1）不定积分　若$\mathbf{A}'(t)=\mathbf{a}(t)$，则称$\mathbf{A}(t)$是$\mathbf{a}(t)$的原函数。$\mathbf{a}(t)$的原函数的一般形式叫做$\mathbf{a}(t)$的不定积分，记作

$$\int\mathbf{a}(t)dt$$

若$\mathbf{A}'(t)$是$\mathbf{a}(t)$的一个原函数，则有

$$\int\mathbf{a}(t)dt=\mathbf{A}(t)+\mathbf{C}\qquad（\mathbf{C}\text{是任意常矢}）\qquad（6）$$

（2）定积分

类似于数性函数，$\mathbf{a}(t)$在$[t_1,\ t_2]$上的定积分为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{a}(t)dt=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to0}}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}(\xi_i)\Delta t_i$$

若$\mathbf{A}(t)=\mathbf{a}(t)$，则有

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{a}(t)dt=\mathbf{A}(t_2)-\mathbf{A}(t_1)\qquad（7）$$

在直角坐标系中有

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{a}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}a_x(t)dt\,\mathbf{i}+\int_{t_1}^{t_2}a_y(t)dt\,\mathbf{j}$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt\mathbf{k} \qquad (7')$$

说明：i）从上述内容看出，矢量函数的微积分与数学分析中函数的微积分相类似，不过矢量函数要复杂些，它在直角坐标系中分解成三个数性函数，即它的三个分量。对矢量函数进行某一种运算，也就等于对它的各个分量进行这种运算。

ii）矢量分解与坐标选取有关。在不同的坐标系中，有不同的表现形式，有的可能会复杂得多。我们主要讨论直角坐标系的分解问题，多数问题还是用分量形式表达。

（二）场的分类与表示法

1． 场的概念　某一物理量在空间的分布就称为"场"。在这个空间发生了物理现象，也就有物理量在这个空间分布着。

2． 场的分类与表示

场中每一点都有一个物理量。这个物理量是用数量表示的，这种场就叫数量场。如温度场，电位场等。若物理量是用矢量表示的，这种场就叫矢量场。如引力场，速度场等。

场中的物理量，往往与点的位置有关，而且还将随时间变化，这种场叫做不稳定场（或不定常场），表示为

$$u=f(M,t)\mathbf{A}=\mathbf{A}(M,t)$$

若在平面上的点为M（x，y），场可表示为

$$u=f(x,y,t)$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,t)=A_x(x,y,t)\mathbf{i}+A_y(x,y,t)\mathbf{j}$$

若在空间中点为$M(x,y,z)$，场又可表示为

$$u=f(x,y,z,t)$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z,t)=A_x(x,y,z,t)\mathbf{i}+A_y(x,y,z,t)\mathbf{j}+A_z(x,y,z,t)\mathbf{k}$$

若场中物理量不随时间变化，这种场叫做稳定场或定常场，表示为

$$u=f(M) \qquad \mathbf{A}=\mathbf{A}(M)$$

在平面上点为$M(x,y)$，稳定场又可表示为

$$u=f(x,y)$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y)=A_x(x,y)\mathbf{i}+A_y(x,y)\mathbf{j}$$

在空间点为$M(x,y,z)$，稳定场又可表示为

$$u=f(x,y,z)$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\mathbf{i}+A_y(x,y,z)\mathbf{j}+A_z(x,y,z)\mathbf{k}$$

在不稳定场中，每一固定时刻也就是稳定场。在场论中，讨论稳定场是基础。对于不稳定场，可以在讨论稳定场的基础上再讨论对时间的变化。因此这部分着重讨论稳定场的规律。

3．场的直观表示

在数量场中，物理量是点的坐标（x,y,z）的函数

$$u=f(x,y,z)$$

当u为某常数C时，所有满足$f(x,y,z)=C$的点就组成一个曲面。这个曲面的特点是在其上的点（x,y,z）处的函数值u相等，即

$$f(x,y,z)=C \tag{8}$$

（8）式表示的曲面叫做数量场u的等值面。在平面数量场中叫等值线。

在矢量场中用矢量线表示。场中的曲线L，若它每点的切线方向与场在该点的矢量方向平行，则L称为该矢量场的矢量线。矢量线满足微分方程

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z} \tag{9}$$

说明：i）矢量线L是一族曲线。矢量线L存在于场中，L上每一点都有一个矢量$\mathbf{A}=\{A_x, A_y, A_z\}$与$L$在该点的切线平行。

ii）矢量线L只反映矢量场在L上每点的方向，并没有大小数量关系。

等值面（线）是满足等函数值的自变量全体。因为C是任意常数，所以$f(x,y,z)=C$表示等值面族。

（三）方向导数与梯度

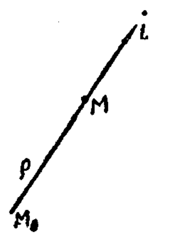
1. 方向导数的定义　从数量场$u=u(M)$中任一点M_0出发引一条射线l，在l上任取一点M（如场图2），记$\mathbf{M_0M}=\rho$，当沿l，$M\to M_0$时，此式

$$\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\mathbf{M_0M}}$$

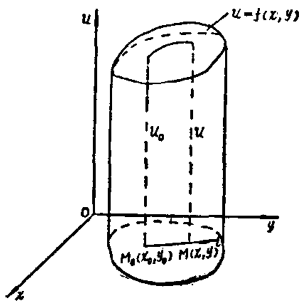
的极限存在，称此极限值为函数$u(M)$在点M_0处沿方向l的方向导数，记为$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\mathbf{M_0M}}$$

说明：i）方向导数是一个数量，它与点M_0有关，也与方向l有关。



场图　2



场图　3

ii）以平面数量场为例说明方向导数的意义。

设数量场

$$u=f(x,y)$$

这是一张空间曲面（场图3）。从图不难看出

$$\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\mathbf{M_0M}}=\frac{f(M)-f(M_0)}{\mathbf{M_0M}}$$

正是沿 l 方向，函数$f(x,y)$从点M_0到点M的平均升高，即平均变化率。而极限

$$\lim_{M\to M_0\ (\text{沿}\ l\ )}\frac{\Delta u}{\rho}$$

$$=\lim_{M\to M_0\ (\text{沿}\ l\ )}\frac{f(M)-f(M_0)}{\mathbf{M_0M}}$$

是 $u=f(x,y)$在点M_0沿 l 的变化率。所以方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}$是变化率，它反映了函数 $u=f(x,y)$在 l 方向上增减情况。$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}>0$，表示函数 $u=f(x,y)$在点M_0沿方向 l 是增加的，$\frac{\partial u}{\partial l}$大，表示增加的快；$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}<0$，表示函数 $u=f(x,y)$在M_0点沿方向 l 是减小的，$\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$大，表示减小的快。

iii) $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$都是$\frac{\partial u}{\partial l}$的特例。当 l 指向 x 轴正向时，$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}$；当 l 指向 y 轴正向时，$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial y}$。因此，$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$就是沿 x 轴、y 轴正向的方向导数，即 x 轴、y 轴正向的变化率。

iv）有时要考虑到函数沿某曲线C的导数。我们把函数

沿曲线C的每一点的切线方向的方向导数叫做函数沿曲线C的导数。

2. 方向导数的计算公式

设 $u=u(x,y)$在$M_0(x_0,y_0)$处可微，l 的方 向 余 弦是$\cos\alpha$，$\cos\beta$，则 u 在点M_0沿 l 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0}\cos\beta \tag{10}$$

对空间情况有

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_0}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_0}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_0}\cos\gamma \tag{10'}$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是 l 的方向余弦。

3. 梯度的定义 设数量场 $u=u(M)$，如果在场中任一点M处，存在非零矢量$\mathbf{G}$，其方向为函数$u(M)$在M点处方向导数最大的方向，其模 $|\mathbf{G}|$ 是这个最大的方向导数值，则称矢量$\mathbf{G}$为数量场$u(M)$在点M处的梯度。记为

$$\operatorname{grad} u=\mathbf{G}$$

在直角坐标系中有

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} \tag{11}$$

说明：ⅰ）梯度是刻划数量场的概念。数量场的梯度是一个矢量。

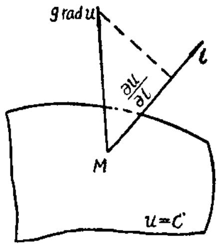
ⅱ）任一点的梯度垂直于过该点的等值面（线），并且指向$u(M)$增大的一方。因而梯度方向平行于等值面（线）的法线方向。

iii）数量场的每一点都有一个梯度，它是矢量，数量场的梯度场是矢量场，称为 $u(M)$ 的梯度场。

iv）$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad } u\cdot \mathbf{l}_0$

其中$\mathbf{l}_0=\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}$

数量场的等值面、方向导数和梯度之间的关系如场图4。



场图　4

4．　梯度的运算公式

1°　$\text{grad } c=0$　（c为常数）

2°　$\text{grad }(cu)=c\,\text{grad } u$

3°　$\text{grad }(u\pm v)=\text{grad } u\pm\text{grad } v$

4°　$\text{grad }(uv)=v\,\text{grad } u+u\,\text{grad } v$

5°　$\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\,\text{grad } u-u\,\text{grad } v)$　（$v\neq 0$）

6°　$\text{grad } f(u)=f'(u)\text{grad } u$

引入▽算子〔见（七）▽算子〕：

$$\text{grad } u=\nabla u$$

以上六个公式都可用算子▽表示。

（四）通量与散度、高斯公式

对一个矢量场，主要讨论它的两个基本性质：其一是有没有源；其二是有没有旋。

1．　通量定义　设矢量场$\mathbf{A}(M)$，沿场中某一有向曲面S的曲面积分

$$\Phi=\iint_S A_n dS=\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \tag{12}$$

叫做矢量场$\mathbf{A}(M)$向正侧穿过曲面S的通量。其中$d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$， n是dS的法线方向，$A_n = \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$。

说明：i）由（12）式可知，通量Φ是一个数量。（顾名思义，通量就是矢量A通过S的量，A可表示流速、电场、磁场的强度等。相应的Φ就是流量、电通量、磁通量等。）因为$d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$，$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$有正负之分：$(\mathbf{A},\mathbf{n})<\frac{\pi}{2}$，$\Phi>0$；$(\mathbf{A},\mathbf{n})>\frac{\pi}{2}$，$\Phi<0$；$\mathbf{A}\perp\mathbf{n}$，$\Phi=0$。在一个矢量场中，每点A是确定的。$\Phi$的正负与n的指定有关。

ii）若S是闭曲面，一般取外法线方向。于是就有：

$\Phi>0$，表示S内部有源，就是说穿过S流出的量比流入的量大，而Φ正是出量与入量之差，所以内部有源，Φ就是由S散发出去的量。

$\Phi<0$，表示S内部有洞。流出的量小于流入的量，Φ就是流入的多余部分，这个量在S所包围的区域内被吸收或渗掉，所以有洞。Φ是吸收入S内部的量。

$\Phi=0$，说明流出流入相等。

iii）由（12）式得

$$d\Phi=\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

表示流过面积元dS的正向的通量。

2. 散度定义　设矢量场$\mathbf{A}(M)$。在场中作包围点M的闭曲面S，S包围的区域为Ω，Ω的体积为ΔV。当Ω收缩到M时，极限

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\oiint\limits_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

存在，则称此极限值为A在点M处的散度。记为$\mathrm{div}\mathbf{A}$，即

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\lim_{\Omega\to M}\frac{\oiint\limits_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \tag{13}$$

说明：i）散度是刻划矢量场的基本性质的量，是数量。div**A**形成一数量场，叫做矢量场**A**的散度场。

ii）散度：顾名思义就是一点处发散量的大小。在M点，div**A**>0，表明M点有源；div**A**<0，表明M点有洞。div**A**的正值越大，源M的散发量越大；div**A**为负值，绝对值越大，表明这个洞吸收量越大，或者说渗的快。div**A**$=0$表明M点无源无洞。

iii）由（13）式知，div**A**就是单位体积的通量的极限，就是通量密度。

3. 散度在直角坐标系中的计算公式

在直角坐标系中，若矢量场

$\mathbf{A}(M)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$

的分量P，Q，R有一阶连续偏导数，则任何一点$M(x,y,z)$处的散度为

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{14}$$

4. 高斯公式

设矢量场$\mathbf{A}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$的各分量$P$，$Q$，$R$在闭曲面$S$所围区域$\Omega$内有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iiint_\Omega \mathrm{div}\mathbf{A}\,dxdydz \tag{15}$$

或

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

（15）式称为高斯——奥斯特洛格拉特斯基公式。

说明：i）高斯公式是重要公式之一。它的意义是曲面积分与体积分互化。因为曲面积分不容易计算，所以（15）