

内 容 简 介

本书是为广播电视大学高等数学课而编写的辅导教材。内容包括场论初步、复变函数、积分变换及数理方程初步等，并有针对性的典型例题 134 个，都作了比较详细的推导，对各种解法也作了细致的分析和比较。本书可供广播电视大学和职工大学学员和自学高等数学人员使用，也可供高等工科院校学生及辅导教师参考。

场论与数理方法辅导

冯 泰 匡萃心 编

蒋定华 审阅

中国铁道出版社出版

责任编辑 丁益民 封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：12.375 字数：283 千

1985年2月 第1版 第1次印刷

印数：0001—20,000册 定价：2.30元

目 录

第一篇 矢量分析与场论初步

一、基本要求	1
二、基本内容	1
(一) 矢量分析	1
(二) 场的分类与表示法	5
(三) 方向导数与梯度	7
(四) 通量与散度、高斯公式	10
(五) 环量、旋度、斯托克斯公式	13
(六) 几个特殊的矢量场	17
(七) ∇ 算子	19
(八) 梯度、散度、旋度在不同坐标系中的表达式	22
三、例题分析	23
四、复习思考题	59
五、练习题	62
练习题答案或提示	70

第二篇 复变函数

第一章 复数与复变函数	75
一、基本要求	75
二、基本内容	75
(一) 复数及其表示法	75
(二) 复数的运算及其几何意义	81
(三) 区域的概念	84
(四) 复变函数	87
(五) 复变函数的极限与连续	89
三、例题分析	91
四、复习思考题	106

五、练习题	107
复习思考题答案或提示	111
练习题答案或提示	112
第二章 解析函数	117
一、基本要求	117
二、基本内容	117
(一) 解析函数的概念	117
(二) 解析函数的判别法	121
(三) 解析函数与调和函数的关系	122
(四) 初等解析函数	123
(五) 平面场的复势	130
三、例题分析	134
四、复习思考题	149
五、练习题	150
复习思考题答案或提示	152
练习题答案或提示	153
第三章 复变函数积分	156
一、基本要求	156
二、基本内容	156
(一) 复变函数的积分概念	156
(二) 柯西-古萨基本定理	159
(三) 柯西积分公式	161
(四) 积分计算方法小结	163
三、例题分析	164
四、复习思考题	179
五、练习题	180
复习思考题答案或提示	183
练习题答案或提示	183
第四章 级数	185
一、基本要求	185
二、基本内容	185
(一) 复数项级数	185
(二) 复变函数项级数	187

(三) 幂级数	190
(四) 泰劳 (Taylor) 级数	191
(五) 罗朗 (Laurent) 级数	194
三、例题分析	196
四、复习思考题	211
五、练习题	213
复习思考题答案或提示	215
练习题答案或提示	216
第五章 留数	219
一、基本要求	219
二、基本内容	219
(一) 解析函数的孤立奇点	219
(二) 留数	222
(三) 留数的应用	225
(四) *对数留数和幅角原理	228
三、例题分析	230
四、复习思考题	248
五、练习题	249
复习思考题答案或提示	252
练习题答案或提示	253
第六章 保角映射	256
一、基本要求	256
二、基本内容	256
(一) 保角映射	256
(二) 分式线性映射	261
(三) 初等函数构成的映射	267
(四) 多角形映射	269
三、例题分析	270
四、复习思考题	293
五、练习题	294
复习思考题答案或提示	297
练习题答案或提示	298

第三篇 积分变换

一、基本要求	304
二、基本内容	304
(一) 傅里叶变换	304
(二) 拉普拉斯变换	311
三、例题分析	318
四、复习思考题	336
五、练习题	337
复习思考题答案或提示	339
练习题答案或提示	340

第四篇 数理方程

一、基本要求	342
二、基本内容	342
(一) 基本概念	342
(二) 三个典型方程与定解条件	343
(三) 解定解问题的方法	349
(四) 达朗贝尔 (D'Alembere) 公式的 物理意义	355
三、例题分析	363
四、复习思考题	380
五、练习题	381
复习思考题答案或提示	384
练习题答案或提示	384

第一篇 矢量分析与场论初步

矢量分析既是矢量代数的继续，又是场论的预备知识。场论是以矢量为工具，用微积分（尤其是曲线积分和曲面积分）的理论来研究力学或物理学中的场，因此这部分内容具有很强的物理意义。

一、基 本 要 求

1. 掌握矢量函数的微分法。
 2. 正确理解数量场、矢量场、梯度、散度及旋度等概念。
 3. 熟练地掌握梯度、散度及旋度在直角坐标系中的计算公式。
 4. 掌握高斯公式、斯托克斯公式，会用高斯公式计算曲面积分。
 5. 会判别有势场、管形场及调和场。
 6. 熟悉有关 ∇ 算子的一些运算。
- 重点是梯度、散度、旋度概念和计算公式以及高斯公式。

二、基 本 内 容

（一）矢量分析

1. 矢量函数

（1）定义 设有数性变量 t 和变矢量 $\mathbf{A}$ 。若对于 t 在某个范围内的每一个数值， $\mathbf{A}$ 都有一个确定的矢量和它对应，则称 $\mathbf{A}$ 为数性变量 t 的矢量函数。记为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) \quad (1)$$

在直角坐标系中表示为

$$\mathbf{A} = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k} \quad (1')$$

(2) 矢端曲线 矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 的起点取在坐标原点, 其终点随变量 t 变化即描绘出一条曲线, 该曲线叫做 $\mathbf{A}(t)$ 的矢端曲线。即 $\mathbf{A}(t)$ 的图形。

2. 矢量函数的极限和连续

(1) 极限 设矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义 (在 t_0 点可以没有定义), $\mathbf{A}_0$ 为常矢。若对任意给定 $\varepsilon > 0$, 都存在一个 $\delta > 0$, 当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 就有

$$|\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_0| < \varepsilon$$

成立, 则称当 $t \rightarrow t_0$ 时, $\mathbf{A}(t)$ 有极限 $\mathbf{A}_0$, 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \quad (2)$$

在直角坐标系中有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} A_x(t) &= A_{0x} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_y(t) &= A_{0y} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_z(t) &= A_{0z} \end{aligned} \quad (2')$$

其中 $\mathbf{A}_0 = A_{0x}\mathbf{i} + A_{0y}\mathbf{j} + A_{0z}\mathbf{k}$

(2) 连续 设 $\mathbf{A}(t)$ 在 t_0 的某邻域内有定义, 且

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t_0) \quad (3)$$

即

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} A_x(t) &= A_x(t_0) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_y(t) &= A_y(t_0) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_z(t) &= A_z(t_0) \end{aligned} \quad (3')$$

称 $\mathbf{A}(t)$ 在 t_0 点连续。

3. 矢量函数的导数与微分

(1) 定义 设矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t 处有增量

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$$

与对应的 Δt 之比

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 其极限存在, 称此极限值为 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t 处的导数 (或导矢)。记为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t) &= \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4)$$

称

$$d\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}'(t) dt \quad (\Delta t = dt) \quad (5)$$

为 $\mathbf{A}(t)$ 在 t 处的微分。在直角坐标系中有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = A'_x(t)\mathbf{i} + A'_y(t)\mathbf{j} + A'_z(t)\mathbf{k} \quad (4')$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= dA_x(t)\mathbf{i} + dA_y(t)\mathbf{j} + dA_z(t)\mathbf{k} \\ &= [A'_x(t)\mathbf{i} + A'_y(t)\mathbf{j} + A'_z(t)\mathbf{k}] dt \end{aligned} \quad (5')$$

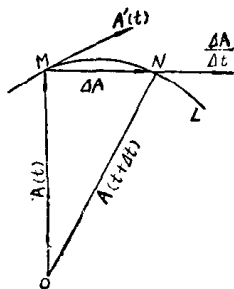
(2) 几何意义 导矢 $\mathbf{A}'(t)$ 在矢端曲线点 M ($\mathbf{OM} = \mathbf{A}(t)$) 处的切线上。其方向总指向 t 增大的一方。导矢的几何意义为切向矢量 (如场图 1 所示)。

(3) 导数公式

$$1^\circ \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{C}) = 0 \quad (\mathbf{C} \text{ 为常矢})$$

$$2^\circ \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} \mathbf{A} \pm \frac{d}{dt} \mathbf{B}$$

$$3^\circ \quad \frac{d}{dt}(u\mathbf{A}) = \frac{du}{dt} \mathbf{A} + u \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$



场图 1

当 $u = k$ (常数) 时, $\frac{d}{dt}(k\mathbf{A}) = k\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 。

$$4^\circ \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$5^\circ \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

$$6^\circ \quad \text{若 } \mathbf{A} = \mathbf{A}(u), u = u(t), \text{ 则 } \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \frac{du}{dt}。$$

这些公式与数学分析中函数的导数公式类似。只是乘法法则中, 矢量有点乘、叉乘之分。而矢量之间无除法, 故无除法法则。

4. 矢量函数的积分

(1) 不定积分 若 $\mathbf{A}'(t) = \mathbf{a}(t)$, 则称 $\mathbf{A}(t)$ 是 $\mathbf{a}(t)$ 的原函数。 $\mathbf{a}(t)$ 的原函数的一般形式叫做 $\mathbf{a}(t)$ 的不定积分, 记作

$$\int \mathbf{a}(t) dt$$

若 $\mathbf{A}'(t)$ 是 $\mathbf{a}(t)$ 的一个原函数, 则有

$$\int \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{A}(t) + \mathbf{C} \quad (\mathbf{C} \text{ 是任意常矢}) \quad (6)$$

(2) 定积分

类似于数性函数, $\mathbf{a}(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上的定积分为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\xi_i) \Delta t_i$$

若 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}(t)$, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{A}(t_2) - \mathbf{A}(t_1) \quad (7)$$

在直角坐标系中有

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t) dt \mathbf{i} + \int_{t_1}^{t_2} a_y(t) dt \mathbf{j}$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} a_z(t) dt \quad (7')$$

说明: i) 从上述内容看出, 矢量函数的微积分与数学分析中函数的微积分相类似, 不过矢量函数要复杂些, 它在直角坐标系中分解成三个数性函数, 即它的三个分量。对矢量函数进行某一种运算, 也就等于对它的各个分量进行这种运算。

ii) 矢量分解与坐标选取有关。在不同的坐标系中, 有不同的表现形式, 有的可能会复杂得多。我们主要讨论直角坐标系的分解问题, 多数问题还是用分量形式表达。

(二) 场的分类与表示法

1. 场的概念 某一物理量在空间的分布就称为“场”。在这个空间发生了物理现象, 也就有物理量在这个空间分布着。

2. 场的分类与表示

场中每一点都有一个物理量。这个物理量是用数量表示的, 这种场就叫数量场。如温度场, 电位场等。若物理量是用矢量表示的, 这种场就叫矢量场。如引力场, 速度场等。

场中的物理量, 往往与点的位置有关, 而且还将随时间变化, 这种场叫做不稳定场 (或不定常场), 表示为

$$u = f(M, t) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(M, t)$$

若平面上的点为 $M(x, y)$, 场可表示为

$$u = f(x, y, t)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, t) = A_x(x, y, t)\mathbf{i} + A_y(x, y, t)\mathbf{j}$$

若空间中点为 $M(x, y, z)$, 场又可表示为

$$u = f(x, y, z, t)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t) = & A_x(x, y, z, t)\mathbf{i} + A_y(x, y, z, t)\mathbf{j} \\ & + A_z(x, y, z, t)\mathbf{k} \end{aligned}$$

若场中物理量不随时间变化, 这种场叫做稳定场或定常场, 表示为

$$u = f(M) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(M)$$

在平面上点为 $M(x, y)$, 稳定场又可表示为

$$u = f(x, y)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y) = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j}$$

在空间点为 $M(x, y, z)$, 稳定场又可表示为

$$u = f(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) &= A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} \\ &+ A_z(x, y, z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

在不稳定场中, 每一固定时刻也就是稳定场。在场论中, 讨论稳定场是基础。对于不稳定场, 可以在讨论稳定场的基础上再讨论对时间的变化。因此这部分着重讨论稳定场的规律。

3. 场的直观表示

在数量场中, 物理量是点的坐标 (x, y, z) 的函数

$$u = f(x, y, z)$$

当 u 为某常数 C 时, 所有满足 $f(x, y, z) = C$ 的点就组成一个曲面。这个曲面的特点是在其上的点 (x, y, z) 处的函数值 u 相等, 即

$$f(x, y, z) = C \quad (8)$$

(8) 式表示的曲面叫做数量场 u 的等值面。在平面数量场中叫等值线。

在矢量场中用矢量线表示。场中的曲线 L , 若它每点的切线方向与场在该点的矢量方向平行, 则 L 称为该矢量场的矢量线。矢量线满足微分方程

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (9)$$

说明: i) 矢量线 L 是一族曲线。矢量线 L 存在于场中, L 上每一点都有一个矢量 $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ 与 L 在该点的切线平行。

ii) 矢量线 L 只反映矢量场在 L 上每点的方向, 并没有大小数量关系。

等值面 (线) 是满足等函数值的自变量全体。因为 C 是任意常数, 所以 $f(x, y, z) = C$ 表示等值面族。

(三) 方向导数与梯度

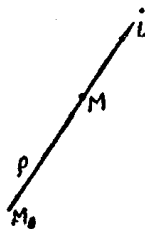
1. 方向导数的定义 从数量场 $u = u(M)$ 中任一点 M_0 出发引一条射线 l , 在 l 上任取一点 M (如场图 2), 记 $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \rho$, 当沿 l , $M \rightarrow M_0$ 时, 此式

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M) - u(M_0)}{\mathbf{M}_0\mathbf{M}}$$

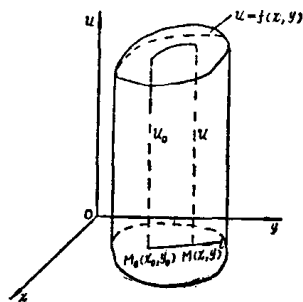
的极限存在, 称此极限值为函数 $u(M)$ 在点 M_0 处沿方向 l 的方向导数, 记为 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\mathbf{M}_0\mathbf{M}}$$

说明: i) 方向导数是一个数量, 它与点 M_0 有关, 也与方向 l 有关。



场图 2



场图 3

ii) 以平面数量场为例说明方向导数的意义。

设数量场

$$u = f(x, y)$$

这是一张空间曲面 (场图 3)。从图不难看出

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M} = \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M}$$

正是沿 l 方向, 函数 $f(x, y)$ 从点 M_0 到点 M 的平均升高, 即平均变化率。而极限

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow M_0} (\text{沿 } l) \frac{\Delta u}{\rho} \\ = \lim_{M \rightarrow M_0} (\text{沿 } l) \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} \end{aligned}$$

是 $u = f(x, y)$ 在点 M_0 沿 l 的变化率。所以方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 是变化率, 它反映了函数 $u = f(x, y)$ 在 l 方向上增减情况。

$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} > 0$, 表示函数 $u = f(x, y)$ 在点 M_0 沿方向 l 是增加的, $\frac{\partial u}{\partial l}$ 大, 表示增加的快; $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} < 0$, 表示函数 $u = f(x, y)$ 在 M_0 点沿方向 l 是减小的, $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$ 大, 表示减小的快。

iii) $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都是 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 的特例。当 l 指向 x 轴正向时, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$; 当 l 指向 y 轴正向时, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial y}$ 。因此, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 就是沿 x 轴、 y 轴正向的方向导数, 即 x 轴、 y 轴正向的变化率。

iv) 有时要考虑到函数沿某曲线 C 的导数。我们把函数

沿曲线 C 的每一点的切线方向的方向导数叫做函数沿曲线 C 的导数。

2. 方向导数的计算公式

设 $u = u(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微, l 的方向余弦是 $\cos \alpha, \cos \beta$, 则 u 在点 M_0 沿 l 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cos \beta \quad (10)$$

对空间情况有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cos \beta \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cos \gamma \end{aligned} \quad (10')$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 l 的方向余弦。

3. 梯度的定义 设数量场 $u = u(M)$, 如果在场中任一点 M 处, 存在非零矢量 $\mathbf{G}$, 其方向为函数 $u(M)$ 在 M 点处方向导数最大的方向, 其模 $|\mathbf{G}|$ 是这个最大的方向导数值, 则称矢量 $\mathbf{G}$ 为数量场 $u(M)$ 在点 M 处的梯度。记为

$$\text{grad } u = \mathbf{G}$$

在直角坐标系中有

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (11)$$

说明: i) 梯度是刻画数量场的概念。数量场的梯度是一个矢量。

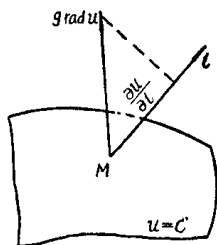
ii) 任一点的梯度垂直于过该点的等值面(线), 并且指向 $u(M)$ 增大的一方。因而梯度方向平行于等值面(线)的法线方向。

iii) 数量场的每一点都有一个梯度, 它是矢量, 数量场的梯度场是矢量场, 称为 $u(M)$ 的梯度场。

$$\text{iv)} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot l_0$$

$$\text{其中 } l_0 = \frac{l}{|l|}$$

数量场的等值面、方向导数和梯度之间的关系如图 4。



场图 4

4. 梯度的运算公式

$$1^\circ \quad \text{grad } c = 0 \quad (c \text{ 为常数})$$

$$2^\circ \quad \text{grad } (cu) = c \text{grad } u$$

$$3^\circ \quad \text{grad } (u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v$$

$$4^\circ \quad \text{grad } (uv) = v \text{grad } u + u \text{grad } v$$

$$5^\circ \quad \text{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v \text{grad } u - u \text{grad } v) \quad (v \neq 0)$$

$$6^\circ \quad \text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u$$

引入 ∇ 算子 [见 (七) ∇ 算子]:

$$\text{grad } u = \nabla u$$

以上六个公式都可用算子 ∇ 表示。

(四) 通量与散度、高斯公式

对一个矢量场, 主要讨论它的两个基本性质: 其一是有没有源; 其二是有没有旋。

1. 通量定义 设矢量场 $\mathbf{A}(M)$, 沿场中某一有向曲面 S 的曲面积分

$$\Phi = \iint_S A_n dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (12)$$

叫做矢量场 $\mathbf{A}(M)$ 向正侧穿过曲面 S 的通量。其中 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$,

$\mathbf{n}$ 是 dS 的法线方向, $A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ 。

说明: i) 由 (12) 式可知, 通量 Φ 是一个数量。(顾名思义, 通量就是矢量 $\mathbf{A}$ 通过 S 的量, $\mathbf{A}$ 可表示流速、电场、磁场的强度等。相应的 Φ 就是流量、电通量、磁通量等。) 因为 $dS = \mathbf{n} dS$, $\mathbf{A} \cdot dS$ 有正负之分: $(\mathbf{A}, \mathbf{n}) < \frac{\pi}{2}$, $\Phi > 0$;

$(\mathbf{A}, \mathbf{n}) > \frac{\pi}{2}$, $\Phi < 0$; $\mathbf{A} \perp \mathbf{n}$, $\Phi = 0$ 。在一个矢量场中, 每点 $\mathbf{A}$ 是确定的。 Φ 的正负与 $\mathbf{n}$ 的指定有关。

ii) 若 S 是闭曲面, 一般取外法线方向。于是就有:

$\Phi > 0$, 表示 S 内部有源, 就是说穿过 S 流出的量比流入的量, 而 Φ 正是出量与入量之差, 所以内部有源, Φ 就是由 S 散发出去的量。

$\Phi < 0$, 表示 S 内部有洞。流出的量小于流入的量, Φ 就是流入的多余部分, 这个量在 S 所包围的区域内被吸收或渗掉, 所以有洞。 Φ 是吸收入 S 内部的量。

$\Phi = 0$, 说明流出流入相等。

iii) 由 (12) 式得

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

表示流过面积元 dS 的正向的通量。

2. 散度定义 设矢量场 $\mathbf{A}(M)$ 。在场中作包围点 M 的闭曲面 S , S 包围的区域为 Ω , Ω 的体积为 ΔV 。当 Ω 收缩到 M 时, 极限

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

存在, 则称此极限值为 $\mathbf{A}$ 在点 M 处的散度。记为 $\text{div} \mathbf{A}$, 即

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (13)$$

说明: i) 散度是刻画矢量场的基本性质的量, 是数量。 $\text{div}\mathbf{A}$ 形成一数量场, 叫做矢量场 $\mathbf{A}$ 的散度场。

ii) 散度: 顾名思义就是一点处发散量的大小。在 M 点, $\text{div}\mathbf{A} > 0$, 表明 M 点有源; $\text{div}\mathbf{A} < 0$, 表明 M 点有洞。 $\text{div}\mathbf{A}$ 的正值越大, 源 M 的散发量越大; $\text{div}\mathbf{A}$ 为负值, 绝对值越大, 表明这个洞吸收量越大, 或者说渗得快。 $\text{div}\mathbf{A} = 0$ 表明 M 点无源无洞。

iii) 由(13)式知, $\text{div}\mathbf{A}$ 就是单位体积的通量的极限, 就是通量密度。

3. 散度在直角坐标系中的计算公式

在直角坐标系中, 若矢量场

$$\mathbf{A}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

的分量 P, Q, R 有一阶连续偏导数, 则任何一点 $M(x, y, z)$ 处的散度为

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (14)$$

4. 高斯公式

设矢量场 $\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 的各分量 P, Q, R 在闭曲面 S 所围区域 Ω 内有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \text{div}\mathbf{A} dx dy dz \quad (15)$$

或

$$\begin{aligned} \oint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

(15)式称为高斯——奥斯特洛格拉茨基公式。

说明: i) 高斯公式是重要公式之一。它的意义是曲面积分与体积分互化。因为曲面积分不容易计算, 所以(15)