

● 工程数学提高丛书

线性代数

典型题分析解集

○ 徐 仲 主 编

○ 西北工业大学出版社

0151.2-46

450062

X92

工程数学提高丛书

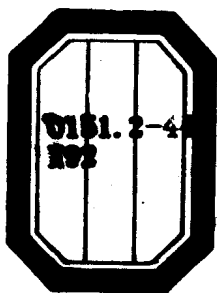
线性代数典型题分析解集

徐 仲 主编

刘克轩 张凯院 徐仲 编



10



00450062

西北工业大学出版社

西安 1999年11月

(陕)新登字 009 号

DV 70/30 14

【内容简介】 本书通过对大量有代表性的典型例题的归纳、分析与求解,揭示了线性代数的解题方法与技巧,使学生可以“按图索骥”、“举一反三”。通过练习,提高基本运算、推理及应试能力。

本书可作为理、工科和经济学科本科生学习线性代数课程的复习辅导书,也可作为考研的强化训练指导书。

工程数学提高丛书
线性代数典型题分析解集

徐 仲 主 编
责任编辑 刘彦信
责任校对 樊 力

*

© 1999 西北工业大学出版社出版发行
(邮编:710072 西安市友谊西路127号 电话:8491147)

全国各地新华书店经销

空军电讯工程学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-1058-2/O·141

*

开本: 850 毫米×1 168 毫米 1/32 印张: 6.25 字数: 151 千字

1998 年 6 月第 1 版

1999 年 11 月第 3 次印刷

印数: 12001—17 000 册 定价: 8.50 元

购买本社出版的图书,如有缺页、错页的,本社发行部负责调换。

前 言

线性代数是高等学校理、工科和经济学科有关专业的一门重要基础课,它不但是其它数学课程的基础,也是物理、力学、电路等课程的基础。另外,由于电子计算机的飞速发展和广泛应用,使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,于是作为处理离散问题的线性代数,成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础。

线性代数课程内容多、比较抽象,且具有一套特有的理论体系、思维方法及解题技巧,但只要掌握了该门课程自身的规律,应用起来就会得心应手,要想掌握规律只有靠有指导的大量练习才行。作者根据多年的教学经验,对本门课程的内容分门别类,按知识点归纳为一些小专题,通过对大量有代表性的典型例题进行分析和求解,揭示了线性代数的解题方法与技巧,使学生可以“按图索骥”、“举一反三”,通过练习提高基本运算、推理以及应试能力。

全书分为七章,由刘克轩(编写第一、二章),张凯院(编写第三、四章),徐仲(编写第五、六、七章)分工编写,徐仲任主编。

本书可供理、工科和经济学科本科生作为学习线性代数课程的辅导读物,也可供考研应试者作为考前复习及强化训练之用。打“*”号的内容超出国家教委制订的高等工业学校《线性代数教学基本要求》,略去之后,不影响内容的连贯性。

由于水平所限,书中疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

1997年10月于西北工业大学

《工程数学提高丛书》编委会

主任委员	徐德民			
委 员	王润孝	聂铁军	李学良	赵选民
	封建湖	秦超英	徐 仲	李建林
主 编	赵选民			

目 录

第一章 n 阶行列式	1
一、行列式定义的运用	1
二、直接用行列式性质计算	3
三、化为三角行列式	6
(一) 箭形行列式	7
(二) 可化为箭形的行列式	7
(三) 行(列)和相等的行列式	9
(四) 其它类型	10
四、降阶法	11
五、升阶法	14
六、递推法	17
七、数学归纳法	22
八、利用范德蒙行列式的结果计算	25
九、代数余子式的计算	28
习题一	30
第二章 矩阵	35
一、矩阵的乘法	35
二、方阵的幂	36
三、方阵的行列式	40
四、逆矩阵的计算	42
(一) 利用定义和运算律求逆矩阵	42

(二) 利用伴随矩阵求逆矩阵	44
(三) 用初等变换求逆矩阵	46
(四) 分块对角阵求逆矩阵	47
五、矩阵方程求解	50
六、求矩阵的秩	52
七、初等方阵与等价矩阵	54
* 八、四分块矩阵的有关结果	56
九、一些特殊矩阵	59
习题二	62
第三章 向量	66
一、向量组的线性相关性	66
二、求向量组的秩及最大无关组	72
(一) 逐个选录法	72
(二) 利用矩阵的秩和子式求最大无关组	73
(三) 利用矩阵的初等变换求最大无关组	74
三、向量组的秩与矩阵的秩的证明	76
四、向量空间	80
(一) 向量空间的判定	80
(二) 基与维数的求法	82
(三) 过渡矩阵及向量坐标的求法	84
习题三	89
第四章 线性方程组	91
一、用克莱姆法则求解线性方程组	91
二、用消元法求解线性方程组	93
三、齐次线性方程组的求解方法	95
四、非齐次线性方程组	101

五、含参数线性方程组的求解方法	103
习题四	108
第五章 矩阵的相似对角化	111
一、向量的内积、长度与夹角	111
二、正交向量组	113
三、特征值与特征向量	114
四、相似矩阵	120
五、正交矩阵	122
六、相似对角化的条件及计算	126
七、实对称矩阵正交相似于对角阵的计算	128
八、可对角化矩阵的应用	130
(一) 求方阵的幂	130
(二) 求行列式	131
(三) 由特征值与特征向量反求矩阵	132
(四) 判断矩阵是否相似	134
* 九、哈密尔顿-凯莱定理及其应用	135
习题五	137
第六章 二次型	139
一、二次型的矩阵表示及其秩	139
二、用正交变换化二次型为标准形	141
三、用可逆线性变换化二次型为标准形	144
(一) 配方法	144
* (二) 矩阵的合同	146
* (三) 初等变换法	147
(四) 惯性定理和实二次型的规范形	149
四、正定二次型与正定矩阵	151

习题六	157
第七章 线性空间与线性变换	159
一、线性空间的判定	159
二、线性子空间的判定	161
三、线性相关性的判别	162
(一) 利用定义判别	162
(二) 利用线性空间的同构判别	165
四、基与维数的求法	166
(一) 按定义求线性(子)空间的基与维数	166
(二) 生成子空间基与维数的求法	167
五、坐标的求法	167
(一) 待定法	167
(二) 利用坐标变换公式	168
六、过渡矩阵的求法	170
(一) 待定法	170
(二) 中介法	171
七、线性变换的验证	171
八、求线性变换的矩阵	173
(一) 利用定义求线性变换的矩阵	173
(二) 用相似关系求线性变换的矩阵	174
(三) 综合类型	175
九、求线性变换运算的矩阵	176
十、线性变换的值域与核的求法	177
十一、求线性变换的特征值与特征向量	179
十二、线性变换的矩阵为对角阵的确定	180
习题七	182
习题答案及提示	184

第一章 n 阶行列式

行列式是线性代数的一个重要组成部分. 灵活运用行列式的性质计算行列式, 掌握一些计算技巧是本章的主要目的.

一、行列式定义的运用

n 阶行列式是用特定的符号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的由 n^2 个数 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 确定的一个数

$$D_n = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数的一个排列, $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 是该排列的逆序数, $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对所有排列求和.

例 1.1 试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是 6 阶行列式 $D_6 = |a_{ij}|$ 中的项.

分析 题中所给两个数都是 D_6 中不同行不同列的 6 个元素的乘积, 因此要判断它们是不是 D_6 中的项, 关键是看它们是否满足符号规律.

解 第一个数 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的 6 个因子的第一个下标为标准排列, 第二个下标排列 4 3 1 2 6 5 的逆序数为 6, 所以

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项.

第二个数可重新排序成 $-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$, 此时, 第二个下标排列 4 5 2 3 1 6 的逆序数为 8, 所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项.

例 1.2 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数.

解 根据行列式定义, $f(x)$ 是一个 x 的多项式函数, 且最高次幂为 x^3 . 显然含 x^3 的项有两项, 即主对角线上 4 个元素之积 x^3 和对应于 $(-1)^{\tau(1\ 2\ 4\ 3)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 的项 $-x \cdot x \cdot 1 \cdot 2x = -2x^3$, 所以多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1 .

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

分析 由定义知, n 阶行列式共有 $n!$ 项, 每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$. 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子, 则该项为零. 由于本行列式中零元素较多, 因而为零的项就较多, 故只须找出那些不为零的项就可求得该行列式的值.

解 所给行列式中, 第一行元素除了 a_{12} (即 $p_1 = 2$) 以外其余都为零, 而第二行元素除了 a_{23} (即 $p_2 = 3$) 以外其余都为零. 继续分析第三行、第四行 $\cdots$ 第 n 行, 可知在 $n!$ 项中只有一项 $a_{12}a_{23} \cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 不为零, 且它的列标排列 2 3 $\cdots$ n 1 的逆序数为

• 2 •

$n-1$, 于是

$$D_n = (-1)^{n-1} a_{12} a_{23} \cdots a_{n-1, n} a_{n1} = (-1)^{n-1} n!$$

例 1.4 证明 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的所有全排列中, 奇偶排列各占一半.

证 因为 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

于是, 根据行列式定义有

$$D_n = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} = 0$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一排列. 该和式中共有 $n!$ 项, 且每项的绝对值都是 1. 所以上面和式中 1 和 -1 的个数相等, 均为 $\frac{n!}{2}$ 个. 这说明 $1, 2, \cdots, n$ 的所有全排列中, 奇偶排列各占一半.

二、直接用行列式性质计算

一般情况下, 当 n 较大时直接用定义计算 n 阶行列式几乎是不可能的. 而利用行列式的性质可以简化行列式的计算.

例 1.5 若 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 的元素满足 $a_{ji} = -a_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \cdots, n$). 则称 D_n 为反对称行列式. 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

证 各行提出 -1, 得

$$D_n = (-1)^n |-a_{ij}| = (-1)^n |a_{ji}| = (-1)^n D'_n$$

因为 n 为奇数, 且 $D'_n = D_n$, 所以

$$D_n = -D_n, \quad \text{即} \quad D_n = 0$$

故奇数阶反对称行列式的值为零。

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

解 当 $n = 1$ 时, $D_1 = a_1 + b_1$

当 $n = 2$ 时, $D_2 = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$

当 $n \geq 3$ 时,

$$D_n \xrightarrow[r_i - r_1]{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & a_n - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{综上所述可得 } D_n = \begin{cases} a_1 + b_1, & n = 1 \\ (a_1 - a_2)(b_2 - b_1), & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

注 (1) 由此例可见,对一般的 n 阶行列式,其值可能随阶数 n 的改变而变化,应注意讨论。

(2) 本例中行列式,当 $n \geq 3$ 时也可先把第一列分解开而得两个行列式的和,然后再分别计算两个行列式。

例 1.7 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - x^2 \end{vmatrix}$$

解 显而易见,当 $2 - x^2 = 1$, 即 $x = \pm 1$ 时, D_4 中第一、二行对应元素相等,此时 $D_4 = 0$, 即 D_4 有因子 $(x - 1)(x + 1)$ 。

当 $9 - x^2 = 5$, 即 $x = \pm 2$ 时, D_4 中第三、四行对应元素相等,

因此 D_4 还有因子 $(x-2)(x+2)$.

又根据行列式定义知, D_4 为 x 的 4 次多项式, 所以

$$D_4 = a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

现只要求出 x^4 的系数即可. 令 $x=0$, 可算出 $D_4 = -12$, 于是 $a = -3$, 故

$$D_4 = -3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

注 本题方法称为析因子法. 即运用行列式性质找出 D_n 的全部因子, 最后再确定最高次项系数.

例 1.8 计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

解 因为

$$D_4^2 = D_4 D_4' =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$$

其中 $f = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, 从而 $D_4^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$

所以 $D_4 = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

但行列式 D_4 中 a^4 的系数为 1, 故

$$D_4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

注 此题虽有一定的特殊性, 但说明当 D_n^2 或 $D_n^2 = D_n D_n'$ 易于计算时, 可

先求出 D_n^2 , 然后再确定 D_n 的符号, 从而求出 D_n .

三、化为三角行列式

对一些特殊的行列式, 如对角行列式、次对角行列式、三角行列式等, 可利用定义求出它们的值. 为便于直接应用, 现列出结果如下:

$$(1) \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} =$$

对角行列式 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

下三角行列式

$$(2) \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} =$$

次对角行列式 次上三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

次下三角行列式

因此, 只要利用性质把所给行列式化成以上某一种形式, 便可求出其值. 值得注意的是千万别忘掉(2)中的符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

从理论上来说,虽然可用行列式的性质将原行列式化为三角行列式(数字型行列式的确可这样计算),但对文字型行列式,就未必能方便地实现这一想法.以下列出几类可化为三角行列式的类型.

(一) 箭形行列式

例 1.9 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n \xrightarrow[j=2,3,\dots,n]{c_1 - \frac{1}{j}c_j} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

$$n! \left(1 - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right)$$

注 本例中的行列式称为箭形行列式,可简单地用符号 $\begin{vmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{vmatrix}$ 代替.其它箭形行列式有 $\begin{vmatrix} \nearrow \\ \nearrow \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \searrow \\ \searrow \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{vmatrix}$, 它们均可用类似的方法化为某种三角行列式.

(二) 可化为箭形的行列式

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \quad x_i \neq a_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

解

$$D_n \xrightarrow[i=2, \dots, n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - x_1 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} =$$

(箭形行列式)

$$\prod_{i=1}^n (x_i - a_i) \begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1 - a_1} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \frac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=2, \dots, n]{c_1 + c_j} \prod_{i=1}^n (x_i - a_i) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x_k - a_k} & \frac{a_2}{x_2 - a_2} & \cdots & \frac{a_n}{x_n - a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x_k - a_k} \right) \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)$$

注 本题也可用升阶法求解。