● 工程数学提高丛书

线性代数

典型题分析解集

徐仲　主编

西北工业大学出版社

工程数学提高丛书

线性代数典型题分析解集

徐　仲　主编
刘克轩　张凯院　徐仲　编

西北工业大学出版社
西安　1999 年 11 月

(陕)新登字 009 号

DV70/30 14

【内容简介】 本书通过对大量有代表性的典型例题的归纳、分析与求解，揭示了线性代数的解题方法与技巧，使学生可以"按图索骥"、"举一反三"。通过练习，提高基本运算、推理及应试能力。

本书可作为理、工科和经济学科本科生学习线性代数课程的复习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

工程数学提高丛书

线性代数典型题分析解集

徐 仲 主 编

责任编辑 刘彦信

责任校对 樊 力

*

© 1999 西北工业大学出版社出版发行

(邮编:710072 西安市友谊西路 127 号 电话:8491147)

全国各地新华书店经销

空军电讯工程学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-1058-2/O·141

*

开本：850 毫米×1 168 毫米 1/32 印张：6.25 字数：151 千字

1998 年 6 月第 1 版 1999 年 11 月第 3 次印刷

印数：12001—17 000 册 定价：8.50 元

前　言

线性代数是高等学校理、工科和经济学科有关专业的一门重要基础课，它不但是其它数学课程的基础，也是物理、力学、电路等课程的基础。另外，由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为处理离散问题的线性代数，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础。

线性代数课程内容多、比较抽象，且具有一套特有的理论体系、思维方法及解题技巧，但只要掌握了该门课程自身的规律，应用起来就会得心应手，要想掌握规律只有靠有指导的大量练习才行。作者根据多年的教学经验，对本门课程的内容分门别类，按知识点归纳为一些小专题，通过对大量有代表性的典型例题进行分析和求解，揭示了线性代数的解题方法与技巧，使学生可以“按图索骥”、“举一反三”，通过练习提高基本运算、推理以及应试能力。

全书分为七章，由刘克轩（编写第一、二章），张凯院（编写第三、四章），徐仲（编写第五、六、七章）分工编写，徐仲任主编。

本书可供理、工科和经济学科本科生作为学习线性代数课程的辅导读物，也可供考研应试者作为考前复习及强化训练之用。打“*”号的内容超出国家教委制订的高等工业学校《线性代数教学基本要求》，略去之后，不影响内容的连贯性。

由于水平所限，书中疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

1997 年 10 月于西北工业大学

《工程数学提高丛书》编委会

目　录

第一章　n 阶行列式

行列式是线性代数的一个重要组成部分．灵活运用行列式的性质计算行列式，掌握一些计算技巧是本章的主要目的．

一、行列式定义的运用

n 阶行列式是用特定的符号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 确定的一个数

$$D_n = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的一个排列，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是该排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有排列求和．

例 1.1　试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项．

分析　题中所给两个数都是 D_6 中不同行不同列的 6 个元素的乘积，因此要判断它们是不是 D_6 中的项，关键是看它们是否满足符号规律．

解　第一个数 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的 6 个因子的第一个下标为标准排列，第二个下标排列 4 3 1 2 6 5 的逆序数为 6，所以

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项．

第二个数可重新排序成 $-a_{14}a_{25}a_{32}a_{43}a_{51}a_{66}$，此时，第二个下标排列 4 5 2 3 1 6 的逆序数为 8，所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项．

例 1.2 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求 x^3 的系数．

解 根据行列式定义，$f(x)$ 是一个 x 的多项式函数，且最高次幂为 x^3。显然含 x^3 的项有两项，即主对角线上 4 个元素之积 x^3 和对应于 $(-1)^{\tau(1\,2\,4\,3)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 的项 $-x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$，所以多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1.

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

分析 由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零．由于本行列式中零元素较多，因而为零的项就较多，故只须找出那些不为零的项就可求得该行列式的值．

解 所给行列式中，第一行元素除了 a_{12}（即 $p_1=2$）以外其余都为零，而第二行元素除了 a_{23}（即 $p_2=3$）以外其余都为零．继续分析第三行、第四行 … 第 n 行，可知在 $n!$ 项中只有一项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 不为零，且它的列标排列 2 3 … n 1 的逆序数为

$n-1$，于是

$$D_n=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$$

例 1.4 证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列中，奇偶排列各占一半．

证 因为 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$$

于是，根据行列式定义有

$$D_n=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=0$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列．该和式中共有 $n!$ 项，且每项的绝对值都是1．所以上面和式中1和 -1 的个数相等，均为$\frac{n!}{2}$个．这说明 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列中，奇偶排列各占一半．

二、直接用行列式性质计算

一般情况下，当 n 较大时直接用定义计算 n 阶行列式几乎是不可能的事．而利用行列式的性质可以简化行列式的计算．

例 1.5 若 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 的元素满足 $a_{ji}=-a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$．则称 D_n 为反对称行列式．证明奇数阶反对称行列式的值为零．

证 各行提出 -1，得

$$D_n=(-1)^n|-a_{ij}|=(-1)^n|a_{ji}|=(-1)^nD_n'$$

因为 n 为奇数，且 $D_n'=D_n$，所以

$$D_n=-D_n,\quad 即\quad D_n=0$$

故奇数阶反对称行列式的值为零.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解 当 $n=1$ 时,$D_1=a_1+b_1$

当 $n=2$ 时,$D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$

当 $n\geqslant 3$ 时,

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}=0$$

综上可得 $D_n=\begin{cases} a_1+b_1, & n=1 \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2 \\ 0, & n\geqslant 3 \end{cases}$

注 (1) 由此例可见,对一般的 n 阶行列式,其值可能随阶数 n 的改变而变化,应注意讨论.

(2) 本例中行列式,当 $n\geqslant 3$ 时也可先把第一列分解开而得两个行列式的和,然后再分别计算两个行列式.

例 1.7 计算

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

解 显而易见,当 $2-x^2=1$,即 $x=\pm 1$ 时,D_4 中第一、二行对应元素相等,此时 $D_4=0$,即 D_4 有因子 $(x-1)(x+1)$.

当 $9-x^2=5$,即 $x=\pm 2$ 时,D_4 中第三、四行对应元素相等,

因此 D_4 还有因子$(x-2)(x+2)$.

又根据行列式定义知,D_4 为 x 的 4 次多项式,所以

$$D_4=a(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

现只要求出 x^4 的系数即可. 令 $x=0$,可算出 $D_4=-12$,于是 $a=-3$,故

$$D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

注 本题方法称为析因子法. 即运用行列式性质找出 D_n 的全部因子,最后再确定最高次项系数.

例 1.8 计算 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

解 因为

$$D_4^2=D_4D_4'=$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$$

其中 $f=a^2+b^2+c^2+d^2$,从而 $D_4^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

所以 $$D_4=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

但行列式 D_4 中 a^4 的系数为 1,故

$$D_4=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

注 此题虽有一定的特殊性,但说明当 D_n^2 或 $D_n^2=D_nD_n'$ 易于计算时,可

先求出 D_n^2，然后再确定 D_n 的符号，从而求出 D_n.

三、化为三角行列式

对一些特殊的行列式，如对角行列式、次对角行列式、三角行列式等，可利用定义求出它们的值．为便于直接应用，现列出结果如下：

$$
(1)\quad \underset{\text{对角行列式}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}} = \underset{\text{上三角行列式}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}} = \underset{\text{下三角行列式}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{vmatrix}} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n
$$

$$
(2)\quad \underset{\text{次对角行列式}}{\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}} = \underset{\text{次上三角行列式}}{\begin{vmatrix} * & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}} = \underset{\text{次下三角行列式}}{\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & * & \end{vmatrix}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n
$$

因此，只要利用性质把所给行列式化成以上某一种形式，便可求出其值．值得注意的是千万别忘掉(2)中的符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

从理论上来说，虽然可用行列式的性质将原行列式化为三角行列式（数字型行列式的确可这样计算），但对文字型行列式，就未必能方便地实现这一想法．以下列出几类可化为三角行列式的类型．

（一）箭形行列式

例 1.9 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

解

$$D_n\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{1}{j}c_j}\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=$$

$$n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)$$

注 本例中的行列式称为箭形行列式，可简单地用符号 $|\nwarrow|$ 代替．其它箭形行列式有 $|\nearrow|$，$|\swarrow|$，$|\searrow|$，它们均可用类似的方法化为某种三角行列式．

（二）可化为箭形的行列式

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, x_i \neq a_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

解

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - x_1 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} =$$

（箭形行列式）

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i) \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1 - a_1} & \dfrac{a_2}{x_2 - a_2} & \dfrac{a_3}{x_3 - a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n - a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1 + c_j} \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i) \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{x_k - a_k} & \dfrac{a_2}{x_2 - a_2} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n - a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x_k - a_k}\right) \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i)$$

注　本题也可用升阶法求解．