

machine  
design  
and  
research

# 机械 设计 与研究

1986

上海交通大学出版社

3

## 目 录

### 新型传动

- 钢片挠性联轴器的强度试验与分析.....杨承参 ( 1 )  
针摆少齿差行星传动有广义间隙的受力分析.....冯泾若 ( 7 )  
2K-H(NGW)型行星齿轮减速器的研制与应用 .....张 展 ( 22 )

### 仿生技术

- 四杆机构用于假肢设计的研究.....王介心 林良明 ( 60 )

### 机械动力学

- 论动态子结构方法.....王文亮 ( 10 )

### 机构设计

- 连杆机构中公差和间隙的配置.....高 渊 ( 29 )

### 国际交流

- 将来的中型柴油机会烧煤吗?.....[美] Frank Robben ( 36 )  
齿条齿轮-连杆机构再现函数的运动设计与分析  
.....[美] Dan Gibson Steven Kramer ( 39 )  
损坏分析实例——高速透平叶轮... [美] Philip Kaufman Max Kershishik ( 47 )

### 国外动态

- 曲轴热锻发展近况.....张宏远 ( 59 )

# 钢片挠性联轴器的强度试验与分析

杨 承 参

上海交通大学

## 一、

钢片挠性联轴器结构如图 1 所示,它主要由两个半联轴器、一个中间套筒组成,在它们之间再安装两组由数片薄弹簧钢片组装的挠性元件。由于钢片很薄,主、从动轴有角向、轴向和径向移位时反力小,因此具有良好的补偿能力,它还具有一定的阻尼和减振性能。与橡胶联轴器相比,钢片的机械强度大,重量与尺寸小,更适合于在中、高速大功率机组上使用。与齿形联轴器相比,它不需润滑,不要维护,结构简单,加工制造方便。它能在  $180\sim 200^{\circ}\text{C}$  高温下工作,且具有耐酸耐蚀的特点,适用于高温和有腐蚀作用的机组。总之,它可在所有需要连续传递功率的机械装置上使用,尤其适合在不可避免会出现轴系不对中的装置上使用。如工业汽轮机、船用、车用动力装置、水泵、风机、石油化工、纺织机械等设备上都得到广泛使用,是国外近年来广泛采用的新型联轴器。

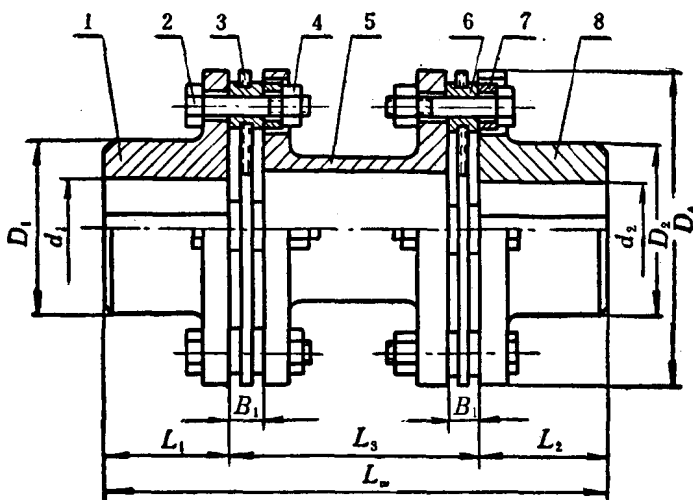


图 1

1. 半联轴器 2. 六角螺栓 3. 挠性片 4. 六角螺母  
5. 中间套筒 6. 压紧圈 7. 垫套 8. 半联轴器

## 二、

钢片挠性元件应力大小是联轴器安全可靠工作的关键,因而仔细分析其受力情况和正确

选择钢片的有关参数是联轴器设计的关键之一。

### 1. 钢片挠性联轴器受力分析

钢片挠性元件运转时受到下列几种力的作用。

(1) 扭矩作用使它部分杆件受拉, 部分杆件受压。如图 2 所示, 杆件 1 受拉伸, 有伸长的趋势; 杆件 2 受压缩, 有松弛的趋势, 还会引起翘曲变形。

(2) 在传递扭矩的同时, 发生轴向移位, 钢片受有轴向力作用, 引起弯曲应力。轴向移位较小时, 杆件 1 拉应力有所增加, 杆件 2 受压有所改善, 在较大轴向移位时, 杆件 1、2 都受拉应力作用。

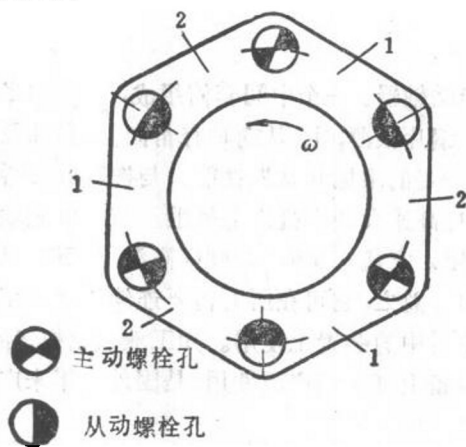


图 2

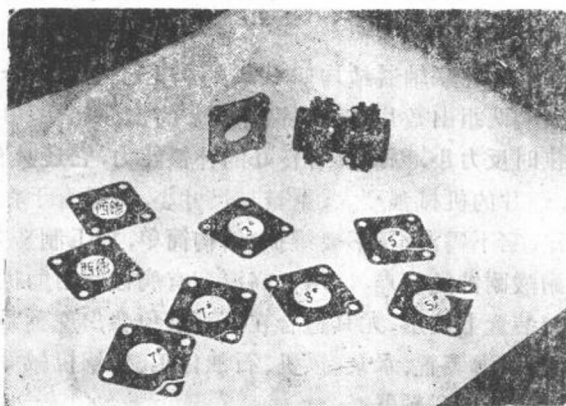


图 3 GNL 片的破坏记录

(3) 钢片与压紧圈质量离心力作用引起拉应力, 尤其在高速机组上, 它的影响不能忽视。

以上应力在安装运行工况一定时, 即扭矩、转速、轴向移位量一定时, 应力值是稳定的, 可以看作钢片的平均应力值。

(4) 在传递扭矩的同时, 发生角度移位, 钢片上受有弯曲力矩作用, 引起弯曲应力, 且在每转一时应力循环交变一次, 尤其是钢片挠性元件组件的最外一片钢片, 位于张口最大位置时其应力值最大。这是钢片的交变应力值。

### 2. 钢片挠性联轴器的失效原因

大量实践证明, 联轴器失效往往不是由于钢片组装件传扭能力不足, 而是钢片和螺栓在平均应力和交变应力的复合作用下的疲劳破坏。图 3 是我们所做的钢片挠性元件在较大轴向和角度移位试验时疲劳断裂情况, 裂口都在压紧圈周围, 因为那里复合应力最大, 并有应力集中现象。

表 1 和图 4 是我们研制的 GNL-44 型联轴器在扭矩与小角度移位情况下静态应力试验测得的应变量记录和相应的应力曲线。从试验可以看出, 应力最大值出现在压紧圈周围。这和图 3 疲劳试验断裂情况相符合。一般, 最大应力值应该在 A、D 点, 而本试验中的最大应力点却出现在 J、E 两点上。这是由于联轴器加工精度有误差, 在超载情况下运转后引起钢片翘曲, 产生附加弯曲应力, 其值相当于同样轴向移位量引起的弯曲应力的四倍, 从而导致这两点应力值增大。这充分说明, 为提高联轴器工作可靠性, 选择适当的加工精度是十分必要的。

表 1

| 负 荷  | 测 点           |     |      |      |     |     |      |     |     |     |     |     |     |     |     |      |      |      |
|------|---------------|-----|------|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
|      | 1             | 2   | 3    | 4    | 5   | 6   | 7    | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16   | 17   | 18   |
|      | $\varepsilon$ |     |      |      |     |     |      |     |     |     |     |     |     |     |     |      |      |      |
| 0    | 0             | 0   | 0    | 0    | 0   | 0   | 0    | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0    | 0    | 0    |
| 25%  | 70            | 55  | 0    | 3    | 40  | 22  | 0    | 8   | 22  | 14  | 41  | 105 | 11  | 55  | 156 | -90  | 60   | 10   |
| 50%  | 105           | 35  | -80  | -50  | 130 | 30  | -70  | -35 | -10 | -40 | 30  | 153 | -55 | 80  | 350 | -280 | 30   | -40  |
| 75%  | 185           | 85  | -80  | -75  | 48  | 100 | -85  | -25 | 25  | -60 | 74  | 250 | -60 | 100 | 510 | -450 | -118 | -125 |
| 100% | 283           | 100 | -135 | -112 | 75  | 200 | -132 | -55 | 70  | -65 | 115 | 320 | -58 | 140 | 565 | -690 | -350 | -290 |

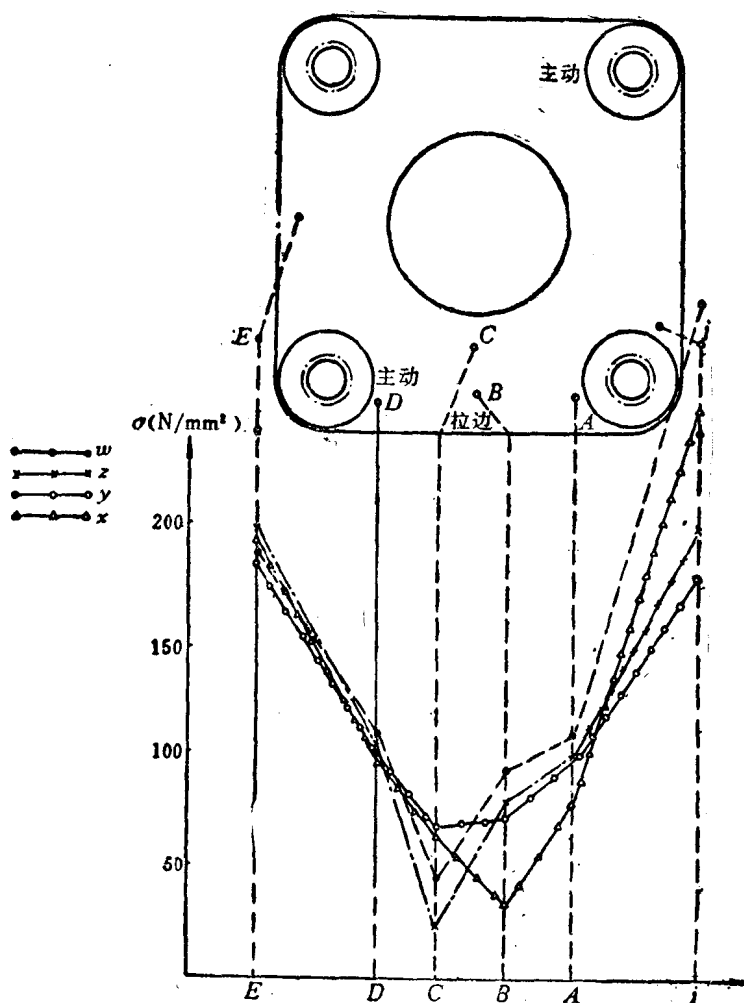


图 4

三、

以上受力分析和试验表明,当联轴器在扭矩和轴向移位情况下运转时,钢片挠性元件发生

拉压应变和弯曲应变,它们与下述参数有关:

$$\text{扭矩引起拉压应变} \quad Y_1 = f_1(M, R, z, t, a, n)$$

$$\text{离心力引起拉应变} \quad Y'_1 = f'_1(R, N)$$

$$\text{轴向移位引起拉应变} \quad Y''_1 = f''_1(a, l, t, z)$$

$$\text{轴向移位引起弯曲应变} \quad X_1 = f_a(a, L, R, t, z, n)$$

其中:  $M$ ——联轴器传递扭矩;

$R$ ——螺栓离轴中心半径;

$z$ ——钢片数;

$t$ ——钢片厚度

$a$ ——轴向移位量(每一端);

$n$ ——螺栓数目;

$N$ ——联轴器转速;

$l$ ——钢片弯曲的自由长度。

它们应迭加成合应变,就是联轴器平均应变值:

$$e = Y_1 + Y'_1 + Y''_1 + X_1$$

当联轴器在扭矩作用下以及轴向和角向移位时运转,钢片挠性元件除了发生上述拉压应变和弯曲应变合成的平均应变外,又附加交变的弯曲应变值:

$$X'_1 = f'_2(l, i, R, t, z, n)$$

其中:  $i$ ——角度移位量(每一端)。

交变应力的许用范围与钢片材料性质有关,与钢片所受平均应力值有关。图5为 AISI 301 半淬硬不锈钢片材料极限应变关系曲线。从图中可以看出不同的平均应变值,交变应力的极限值是不同的。这就要求我们对联轴器的使用条件提出严格的限制,不仅要限制传递扭矩值、最大转速、轴向移位值,使压紧圈附近钢片平均应力值在材料屈服极限应力值范围之内,而且还要严格限制角度移位值,使之在材料持久极限应力值范围内。由于应力集中、加工装配误差等因素存在,考虑一定数值的安全系数是十分必要的。

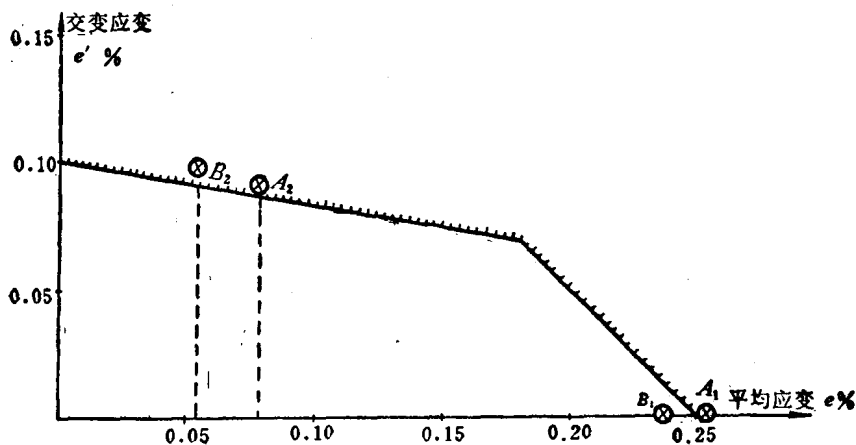


图 5

按上述受力分析和应力与结构参数关系分析,对 GNL-44 型联轴器进行具体计算表该型联轴器钢片在  $200\text{N}\cdot\text{m}$  扭矩作用下,最大转速  $n_{\max} = 17400\text{rpm}$  运转时,受有拉压应变。

$$Y_1 = 0.0398\%$$

$$Y'_1 = 0.0391\%$$

$$Y_1 + Y'_1 = 0.0789\%$$

对 GNL-44 型联轴器钢片进行有限元强度分析,如图 6 所示,取 1/4 钢片进行计算,用三角单元网格化后得 130 个单元,计 84 个节点,其中 42 个边界单元、8 个约束节点使之位移为零,螺孔部分引入两条呈余弦分布的压力曲线  $q_1$ (由扭矩引起)和  $q_2$ (由离心力引起)。它的计算结果如图 7 所示。最大应力值在 A、D 两点上,其值为  $\sigma = 180\text{N/mm}^2$ 。相应的应变值为:

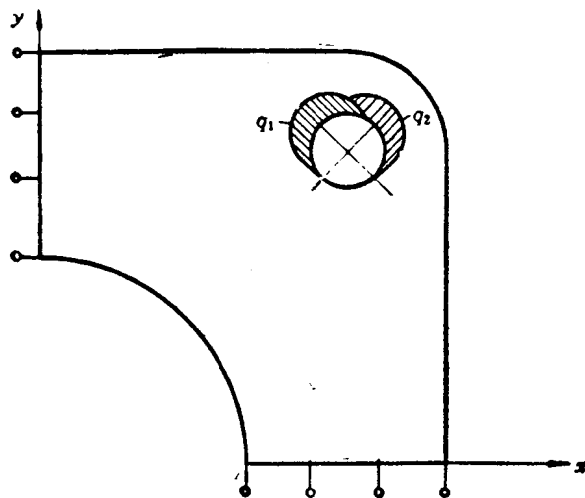


图 6

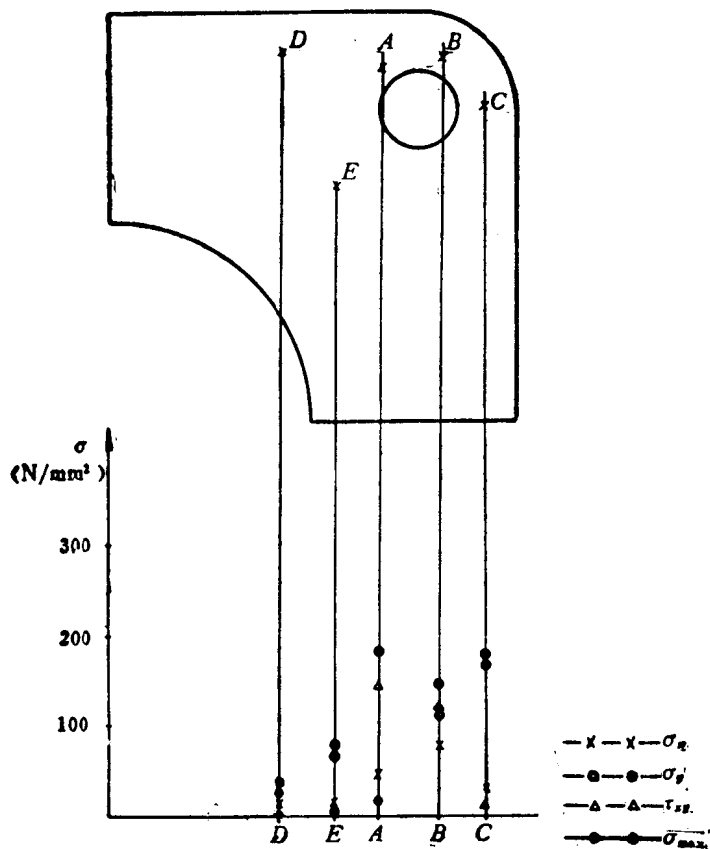


图 7

$$Y_1 + Y'_1 = 0.0857\%$$

上述数据说明用解析法计算结果和有限元素法计算结果基本一致。

为了确定联轴器运转的限制条件,保证钢片的受力在极限应变范围之内,我们对 GNL-44 型联轴器按上述方法进行应力计算,具体数据如表 2 所示。

表 2

| 移 位 量                  | 运 转 情 况                                                                     |                                                                              |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
|                        | (I) 额定扭矩 $M_0=20\text{N}\cdot\text{m}$<br>最大运转转速 $n_{\max}=17400\text{rpm}$ | (II) 额定扭矩 $M_0=300\text{N}\cdot\text{m}$<br>最大运转转速 $n_{\max}=6000\text{rpm}$ |
|                        | 应 变 量                                                                       | %                                                                            |
| 轴向移位<br>2mm<br>(无角向移位) | 扭矩引起的拉应变 $Y_1=0.0398$                                                       | $Y_1=0.04764$                                                                |
|                        | 离心力引起的拉应变 $Y'_1=0.0391$                                                     | $Y'_1=0.00466$                                                               |
|                        | 轴向移位引起拉应变 $Y''_1=0.0478$                                                    | $Y''_1=0.06775$                                                              |
|                        | 轴向移位引起弯曲应变 $X_1=0.1279$                                                     | $X_1=0.1168$                                                                 |
|                        | 合成平均应变值 $e=0.2546$                                                          | $e=0.23685$                                                                  |
| 角向移位<br>2°<br>(无轴向移位)  | 扭矩引起的拉应变 $Y_1=0.0398$                                                       | $Y_1=0.04764$                                                                |
|                        | 离心力引起的拉应变 $Y'_1=0.0391$                                                     | $Y'_1=0.00466$                                                               |
|                        | 角向移位引起交变弯曲应变 $X'_1=0.09839$                                                 | $X'_1=0.10265$                                                               |
|                        | 合成平均应变值 $e=0.0789$                                                          | $e=0.0523$                                                                   |
|                        | 交变应变值 $e'=0.09839$                                                          | $e'=0.10265$                                                                 |

根据表中数据可以看出,当联轴器在第 I 类负荷下运转,轴向移位置 2mm(无角向移位)时,钢片的合成平均应变值  $e=0.2546$ ,在图 5A<sub>1</sub> 点;角向移位 2°(无轴向移位)时,钢片的合成平均应变值  $e=0.0789$ ,交变应变值  $e'=0.09839$ ,在图 5A<sub>2</sub> 点;当联轴器在较低转速的机组上运转( $n_{\max}=6000\text{rpm}$ )时,离心力的影响较小,从而可以提高传扭能力(增大 50%),即第 II 类负载下运转,轴向移位角向移位、量保持不变,其相应的平均应变值和交变应变值在图 5 的 B<sub>1</sub>、B<sub>2</sub> 两点上。

从图 5 中可以看出,该型联轴器在上述两种工况下运转时,钢片的应变值都在极限应变范围内,但都已接近(或稍有超界)极限值。这说明,这两种负载工况和相应的轴向、角向移位量就是该型联轴器使用的限制条件,也就是它的结构设计参数选择的依据。

#### 四、

上述理论分析和计算告诉我们:

(1) 性能优良、工作可靠的联轴器必须正确选择结构参数。螺栓受力半径、螺栓数目、钢片厚度、钢片数目是联轴器的重要结构参数,它们对联轴器强度影响既有直接关系,又有牵连因果关系,因而这四个参数的选择若经过优化设计才最理想;

(2) 联轴器一般都有使用的限制条件,可根据具体情况作适当调整。如 GNL-44 型联轴器可以在两种不同的负载工况下使用;又如若使中间套筒长度变化,可在不同经向移位的装置上使用。

(3) 正确选择联轴器的加工精度,改善压紧垫圈的结构,选用合适的钢片材料和螺栓材料,都直接影响到联轴器的性能和使用寿命。



# 针摆少齿差行星传动有广义间隙 的受力分析

冯 涇 若

煤炭科学院上海研究所

Кудрявцев 在 1966 年提出了无间隙( $\Delta_i = 0$ )受力分析<sup>[1]</sup>方法, 即不计啮合齿数、位置与啮合区变化的影响, 取力  $P_{\max} = P(\theta = 90^\circ)$  为中间变量, 并以积分代替求和, 得到一条正弦曲线, 后来许多文献都沿用这一方法。1979 年 Lehmann 按 Unterberger 的方法进行了比较严谨的无间隙受力分析, 得到了带波动的曲线<sup>[2]</sup>。

由于无间隙受力分析与实际情况出入较大, 因此人们一直在研究间隙和有间隙( $\Delta_i \geq 0$ )的受力分析方法。1975 年 Лобастов 按“变形等于位移减去间隙, 而力正比于变形”的思路进行分析<sup>[3]</sup>, 不过他把单面约束问题作双面约束处理了。七十年代末, 国内进行了实验应力分析<sup>[4]</sup>, 1984 年又提出了以位移  $D_{\max} = D(\theta = 90^\circ)$  作中间变量的迭代方法<sup>[5]</sup>。

现在针摆传动设计中只考虑移距修正、等距修正和转角修正, 实际上还有一个偏心距修正, 它对力、应力和效率影响很大。其它许多 K-H-V 传动也有个偏心距修正的问题。本文提出了一种适合于这些传动有广义间隙( $\Delta_i \geq 0$ )的受力分析方法, 并以针摆传动为例。

设小变形, 线弹性, 忽略体力, 不计摩擦, 针齿变形远大于其它构件。由图 1 可知:

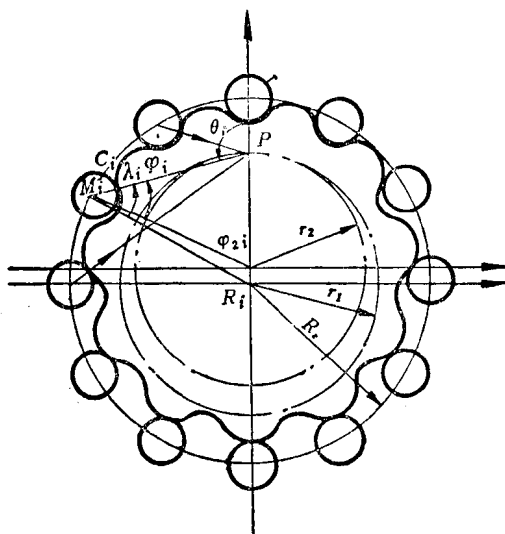


图 1

$$k_1 = \frac{r_1}{R_s}$$

$$\varphi_{1i} = \varphi_{11} + (i-1) \frac{2\pi}{Z_1} \quad (-\pi < \varphi_{1i} \leq \pi)$$

$$\lambda_i = \operatorname{tg}^{-1} \frac{k_1 \sin \varphi_{1i}}{1 - k_1 \cos \varphi_{1i}}$$

$$\theta_i = \varphi_{1i} + \lambda_i$$

$$\psi_i = \varphi_{1i} - \varphi_{2i} + \lambda_2 = \lambda_i - \frac{1}{Z_2} \varphi_{1i}$$

$$\overline{PM}_i = R_s \sqrt{1 + k_1^2 - 2k_1 \cos \varphi_{1i}} = R_s S_i$$

$$\overline{PC}_i = R_s S_i - r_i$$

$$r_2 = \frac{Z_2}{Z_1} k_1 R_s \quad (1)$$

在不受力状态下,将针齿套向受力后移动的方向移动到最远,它与仍处在理论位置的摆线轮间的法向距离称为原始间隙  $\Delta_i$ 。这是广义的,  $\Delta_i \geq 0$ , 包括了通常讲的无间隙、间隙和过盈。

$$\Delta_i = \Delta r_s + \Delta R_s \cos \lambda_i + r_2 \beta \sin |\theta_i| - \Delta A \cos \theta_i \quad (2)$$

式中  $\Delta r_s$ ——等于摆线轮的等距修正量、针齿套的半径减少量与二分之一的针齿套与针齿的配合间隙之和;

$\Delta R_s$ ——摆线轮的移距修正量;

$\beta$ ——摆线轮的转角修正量;

$\Delta A$ ——为减速器偏心机构的偏心距与摆线轮的偏心距之差,即啮合副的偏心距修正量。

展成法磨削摆线轮时,砂轮圆弧半径对  $r_s$  的增量为等距修正量;砂轮圆弧中心到工作台中心的距离对  $R_s$  的减少量为移距修正量;转角修正分三次磨成,第一(二)次磨削后断开传动链,使工件相对于第一次的位置旋转  $+\beta(-\beta)$ ,然后合上展成链再磨,则相当于实际齿形向对称线

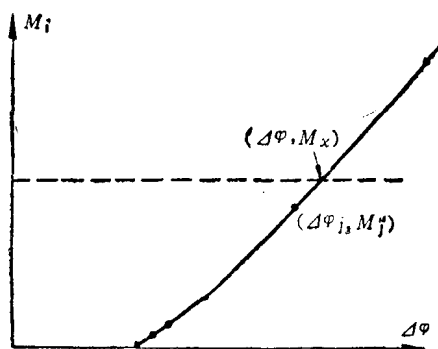


图 2

旋转  $\beta$  ( $\beta$  为转角修正量)。这三种修正见文献[8]、[5],实际上还有一个偏心距修正。由于制造误差,减速器与摆线磨床二者偏心机构的偏心距不可能相等;而分析和计算表明,偏心距修正的正负大小不但对间隙、变形、力和应力的分布影响很大,而且对它们的分布影响很大,从而对最大力、最大接触应力和效率影响很大;其它许多 K-H-V 传动也有偏心距修正的问题,因此这一修正值得引起注意。

(2)式可用于理论分析和修形优化。对于实际的减速器,可用(2')式将针齿的径向位置误差

$\Delta_{s,r}$ 、切向位置误差  $\Delta_{s,t}$ 、摆线轮轮齿的切向位置误差  $\Delta_{b,t}$ ,也考虑进去 ( $\Delta_{s,r}$  沿  $R_s$  方向为正,  $\Delta_{s,t}$ 、 $\Delta_{b,t}$  分别沿  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  方向为正):

$$\Delta_i = \Delta r_s + (\Delta R_s + \Delta_{s,r}) \cos \lambda_i + r_2 \beta \sin |\theta_i| - \Delta A \cos \theta_i + (\Delta_{s,t} - \Delta_{b,t}) \sin \lambda_i \quad (2')$$

摆线轮由理论位置转过  $\Delta\varphi_i$  后,与位置序号为  $i$  的针齿空载接触,此时针轮作用于摆线轮的扭矩为  $M_i$ 。  $\Delta\varphi_i$  与  $M_i$  分别称为针齿  $i$  的空载接触角与空载接触扭矩。

$$\Delta\varphi_i = \frac{\Delta_i}{r_2 \sin \theta_i} \quad (3)$$

$$M_i = I r_2 \sum_k \sin \theta_k \max(r_2 \Delta\varphi_i \sin \theta_k - \Delta_k, 0) \quad (4)$$

式中,  $\sum_k$  的范围为  $0 \leq \varphi_N \leq |\varphi_{1k}| \leq \varphi_M \leq \pi$ , 即理论啮合区。当  $|\varphi_{1i}| < \varphi_N$  或  $|\varphi_{1i}| > \varphi_M$  时:

若  $\varphi_{1i} \geq 0$ , 则定义  $\Delta\varphi_i = \infty$ ,  $M_i = \infty$ ;

若  $\varphi_{1i} < 0$ , 则定义  $\Delta\varphi_i = -\infty$ ,  $M_i = -\infty$ 。 (3~4)'

$I$  是啮合副的刚度,取决于结构,可以通过实验或计算确定。

$M$  是  $\Delta\varphi$  的分段线性函数(见(6)式及图 2),若  $M_s$  是一个摆线轮的输出扭矩,  $j$  齿是参加啮合的齿中最后接触的一个,即

$$M_j = \max \{M_i | M_i \leq M_s\} \quad (5)$$

则  $M_s - M_j$  与  $\Delta^2\varphi_j = \Delta\varphi - \Delta\varphi_j$  成正比(图 2),由于力矩平衡

$$M_s = Ir_2 \sum_i \sin \theta_i \max(r_2 \Delta \varphi \sin \theta_i - \Delta_i, 0)$$

$$= Ir_2 \sum_i^* \sin^2 \theta_i \Delta^2 \varphi_i + M_f \quad (6)$$

所以

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_f + \frac{M_x - M_f}{Ir_2^2 \sum_i^* \sin^2 \theta_i} \quad (7)$$

$\sum_i^*$  的范围 (实际上即为接触判据) 是  $\varphi_N \leq \varphi_{1i} \leq \varphi_M$  时  $M_i \leq M_s$ ,  $-\varphi_M \leq \varphi_{1i} \leq -\varphi_N$  时  $M_i > M_s$  (产生阻力矩)。于是得位移  $D_i$ 、变形  $\delta_i$  和针齿力  $P_i$ :

$$D_i = r_2 \Delta \varphi \sin \theta_i \quad (8)$$

$$\delta_i = \max(D_i - \Delta_i, 0) \quad (9)$$

$$P_i = I \delta_i = I \max(r_2 \Delta \varphi \sin \theta_i - \Delta_i, 0) \quad (10)$$

以上是广义间隙情况, 已编成计算机程序以便于计算分析。对于有间隙 ( $\Delta_i \geq 0$ ) 情况, 为节省机时, 可将考察范围由  $-\pi < \varphi_{1i} \leq \pi$  缩小为  $0 \leq \varphi_{1i} \leq \pi$ , 求和范围相应减小; 有间隙情况下转角修正不影响力的分布, 因此可将  $\Delta_i$  表达式中的转角修正项去掉 (相当于把初始的理论位置先转过角度  $\beta$ )。当各修形量和误差为零时, 得无间隙 ( $\Delta_i = 0$ ) 情况,  $\Delta_i = \Delta \varphi_i = M_i = 0$ ,

$$\Delta \varphi = \frac{M_x}{Ir_2^2 \sum_k \sin^2 \theta_k}, \quad P_i = \frac{M_x \sin \theta_i}{r_2 \sum_k \sin^2 \theta_k}, \quad \sum_k \text{ 范围 } \varphi_N \leq \varphi_{1k} \leq \varphi_M。$$

程序框图见图 3。间隙、位移、变形和力都可一次求出。应当指出, 同一瞬时各齿位移都是  $\theta$  的正弦函数, 但  $\Delta \varphi = \Delta \varphi(\varphi_{1i}) \neq \text{const}$ , 因此并非任意位置的位移都是  $\theta$  的正弦函数, 当接触区只是  $(0, \pi)$  的一部分时, 有啮出、啮入冲击,  $\Delta \varphi$ 、 $M$ 、 $P$  等都不是光滑曲线,  $\Delta$ 、 $D$ 、 $\delta$ 、 $P$  的极值点不一定在  $\theta = 90^\circ$  的位置, 故不宜用  $\theta = 90^\circ$  时的某个量作中间变量。

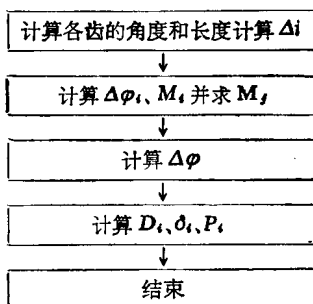


图 3

K-H-V 传动还应考虑偏心距修正  $\Delta A$ , 它对力、应力和效率影响很大。提出原始间隙  $\Delta_i$ 、空载接触角  $\Delta \varphi_i$ 、空载接触扭矩  $M_i$  的概念, 以  $M_i$  作接触判据。用  $\max$  函数处理单面约束的变形问题, 按线弹性假设由变形求力。

### 参 考 文 献

- [1] Планетарные Передачи, В. Н. Кудрявцев, 1966.
- [2] Berechnung der Kräfte in Trochoiden-Getriebe, M. Lehmann, 1979.
- [3] Распределение Усилий в гипоциклоидальном внеполюсном Зацеплении Планетарных Редукторов, В. К. Лобастов, 1975.

(下转第 35 页)

# 论动态子结构方法

王 文 亮

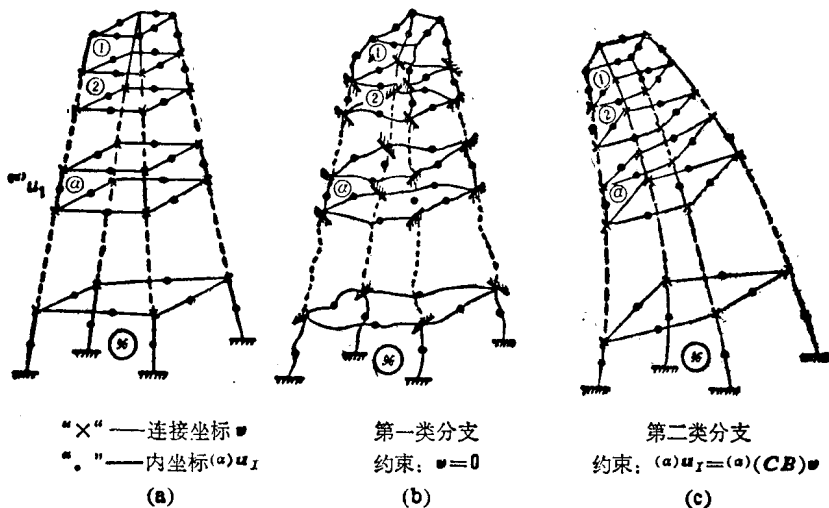
复旦大学

一个复杂结构的细致有限元分析,网格必须分划得充分稠密,这样便产生自由度很多且彼此联立的方程组,以致在电子计算机上也难以或不宜于一次求解。于是,在结构的有限元离散化模型(以后简称系统)的基础上,把系统看成子结构(部件)的组合体,逐个分析规模小得多的子结构,然后把得自子结构的主要模态资料,借助子结构交界面上的位移协调(或再辅以对接力平衡)条件,把它们装配成综合系统优势模态\*的李兹基的设想,获得了蓬勃发展,各种动态子结构法都是以这种设想为基础的。

本文将分别论证三种最有成效的动态子结构法:约束子结构法、自由子结构法和模态综合(简称模综)超单元法。并且将简略地阐述它们与另一些方法的联系。

## 一、约束子结构法

在约束子结构法中,对系统采用的修改措施是,固定系统中的某些位移,使它被隔离成若干个子结构。这些子结构虽然在空间上仍然连接在一起,但它们已被隔离,从力学上看已是彼此独立无关的了。这种做法是先减少自由度,而后恢复失去的自由度<sup>[1]</sup>。



现在,我们以图1所示的空间多层框架为例,来说明在约束子结构法中所采取的“先修改后复原”的力学措施。我们固定两层子框交界面上的对接结点处的位移(图1a中标有符号“x”结点处的位移),即令

\* 我们把最有工程意义的低频段上的系统模态,称为优势模态。]

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

使系统被隔离成图 1b 中所示若干个子结构:  $\alpha = 1, 2, \dots, \mathfrak{x}$ 。但这些子结构在空间仍然连接在一起。在约束组(1)之下, 系统的自由度减少了。为了恢复失去的自由度, 我们将使用下面要给出的约束模态来释放上述约束。

子结构的结点坐标列阵  $^{(\alpha)}\mathbf{u}$  可按其内(专用)坐标  $^{(\alpha)}\mathbf{u}_I$  和界面(公用)坐标  $^{(\alpha)}\mathbf{u}_J$  分块如下:

$$^{(\alpha)}\mathbf{u} = [\mathbf{u}_I^T | \mathbf{u}_J^T]^T \quad (2)$$

于是它的质量、刚度阵的一致分块形式为

$$^{(\alpha)}\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{II} & \mathbf{m}_{IJ} \\ \mathbf{m}_{JI} & \mathbf{m}_{JJ} \end{bmatrix}, \quad ^{(\alpha)}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{II} & \mathbf{k}_{IJ} \\ \mathbf{k}_{JI} & \mathbf{k}_{JJ} \end{bmatrix} \quad (3)$$

十分明显, 系统的坐标列阵  $\mathbf{x}$ , 是各个子结构坐标的简单拼装, 此即

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{u}_I\} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (4a)$$

$$^{(\alpha)}\mathbf{u}_J = ^{(\alpha)}\mathbf{B}\mathbf{v} \quad (4b)$$

式中,  $^{(\alpha)}\mathbf{B}$  是子结构的正交阵与波尔阵之积, 其作用在于把子结构的局部坐标系转换到总体系, 然后按  $^{(\alpha)}\mathbf{u}_J$  在  $\mathbf{v}$  中所处的位置“对号入座”。可见, 式(4b)实际上是相邻子结构间的位移协调方程。接着, 我们用  $\mathbf{M}_s$  和  $\mathbf{K}_s$  来表示系统的质量和刚度阵, 并引入

$$\mathbf{w} = \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{u}_I\}, \quad (5)$$

则有

$$\mathbf{x} = [\mathbf{w}^T | \mathbf{v}^T]^T \quad (6)$$

以及

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ww} & \mathbf{M}_{wv} \\ \mathbf{M}_{vw} & \mathbf{M}_{vv} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ww} & \mathbf{K}_{wv} \\ \mathbf{K}_{vw} & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \quad (7)$$

各个子结构的位移与系统位移的关系是:

$$\mathbf{U} = \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{u}\} = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (8a)$$

式中

$$\mathbf{T} = \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{t}\} \quad (8b)$$

$$^{(\alpha)}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & ^{(\alpha)}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (8c)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & & \alpha & & \mathfrak{x} & \mathfrak{x}+1 \end{matrix}$

阵中没有写出来的都是零子块, 而  $^{(\alpha)}\mathbf{I}$  是一个相容尺寸的单位阵, 利用无耦合的子结构群的质量和刚度阵, 即相应于(8a)中位移  $\mathbf{U} = \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{u}\}$  的质量和刚度阵

$$\mathbf{m}_U = \text{diag}(^{(\alpha)}\mathbf{m}), \quad \mathbf{k}_U = \text{diag}(^{(\alpha)}\mathbf{k}), \quad (9)$$

以及总体装配阵  $\mathbf{T}$ , 我们可得到:

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{T}^T \mathbf{m}_U \mathbf{T} = \text{row}[\mathbf{t}^T] \text{diag}(^{(\alpha)}\mathbf{m}) \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{t}\} = \sum_{\alpha=1}^{\mathfrak{x}} ^{(\alpha)}(\mathbf{t}^T \mathbf{m} \mathbf{t}), \quad (10a)$$

$$\mathbf{K}_s = \sum_{\alpha=1}^{\mathfrak{x}} ^{(\alpha)}(\mathbf{t}^T \mathbf{k} \mathbf{t}). \quad (10b)$$

把方程(3)和(8)代入(10)中,利用矩阵分块相乘法,易导出:

$$\mathbf{M}_{ww} = \text{diag}({}^{(\alpha)}\mathbf{m}_{II}), \mathbf{K}_{ww} = \text{diag}({}^{(\alpha)}\mathbf{k}_{II}). \quad (11a)$$

$$\mathbf{M}_{vv} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} ({}^{(\alpha)}\mathbf{B}^T \mathbf{m}_{JJ} \mathbf{B}), \mathbf{K}_{vv} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} ({}^{(\alpha)}\mathbf{B}^T \mathbf{k}_{JJ} \mathbf{B}), \quad (11b)$$

$$\mathbf{M}_{wv} = \text{col}\{({}^{(\alpha)}\mathbf{m}_{IJ} \mathbf{B})\}, \mathbf{K}_{wv} = \text{col}\{({}^{(\alpha)}\mathbf{k}_{IJ} \mathbf{B})\}, \quad (11c)$$

在约束(1)之下,由方程(4a)、(7)和(11a)可知,系统的固有振动方程转化为各个约束 $({}^{(\alpha)}\mathbf{u}_J = \mathbf{0})$ 子结构的固有振动方程如下:

$$({}^{(\alpha)}(\mathbf{k}_{II} - \omega^2 \mathbf{m}_{II})) \mathbf{u}_I = \mathbf{0}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, x) \quad (12)$$

只要按照文献[1]所示的分划原则来选定子结构,上述方程就便于求解。首先从约束子结构的特征方程(12)中提取其主要模态对

$$({}^{(\alpha)}\Phi_{Ik}), ({}^{(\alpha)}\Omega_{kk} = \text{diag}(\omega_j^2)) \quad (13a)$$

并认为固有模态已按质量归一,此即

$$({}^{(\alpha)}(\Phi_{Ik}^T \mathbf{m}_{II} \Phi_{Ik})) = \mathbf{I}_{kk}. \quad (13b)$$

方程(13)中的下标 $({}^{(\alpha)}k)$ 有双重意义,一是表示 kept modes(保留模态),二是指最低几阶的子结构的模态个数,我们用它们去形成综合系统优势模态的李兹基的一部分:

$$\mathbf{X}_{NK} = \begin{bmatrix} \text{diag}({}^{(\alpha)}\Phi_{Ik}) \\ \mathbf{0}_{VK} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中, $N$ 为系统的自由度数, $K = \sum_{\alpha=1}^{\infty} ({}^{(\alpha)}k)$ 为各个约束子结构的保留主模态数之和。阵中的零子块 $\mathbf{0}_{VK}$ ,表明 $\mathbf{X}_{NK}$ 中的每列模态都符合约束方程(1)。

为了使系统得到复原,我们用下式确定的子结构的约束模态 $({}^{(\alpha)}\mathbf{c}_{IJ})$ 来释放约束 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (也即 $({}^{(\alpha)}\mathbf{u}_J = \mathbf{0})$ ,此即

$$({}^{(\alpha)}\mathbf{u}_I = \mathbf{c}_{IJ} \mathbf{u}_J = ({}^{(\alpha)}(\mathbf{c}_{IJ} \mathbf{B})) \mathbf{v} \quad (15a)$$

其中,约束模态

$$({}^{(\alpha)}\mathbf{c}_{IJ} = -\mathbf{k}_{IJ}^{-1} \mathbf{k}_{II}) \quad (15b)$$

方程(15)表明,当 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 时,子结构的内坐标将作图1c所示的伴随着 $\mathbf{v}$ (注意 $({}^{(\alpha)}\mathbf{u}_J = ({}^{(\alpha)}\mathbf{B} \mathbf{v}))$ 的约束变形运动,据此我们可形成综合系统优势模态的李兹基的另一部分

$$\mathbf{X}_{NV} = \begin{bmatrix} \text{col}\{({}^{(\alpha)}(\mathbf{c}_{IJ} \mathbf{B}))\} \\ \mathbf{I}_{VV} \end{bmatrix} \quad (16)$$

显然,阵中的每列模态的力学意义是,给予 $\mathbf{v}$ 中一个相应坐标以单位位移(强制其余坐标为零),所产生的系统的一种静变位。不难断定, $\mathbf{X}_{NV}$ (注意,下标 $V$ 是 $\mathbf{v}$ 中坐标数)中 $V$ 个约束模态的独立性,以及 $\mathbf{X}_{NK}$ 和 $\mathbf{X}_{NV}$ 间的独立性。

至此,我们有子结构化了(综合系统优势模态)的李兹基:

$$\mathbf{X}_{Nq} = [\mathbf{X}_{NK} | \mathbf{X}_{NV}] \quad (17)$$

式中,下标 $q = K + V$ 为李兹坐标 $q$ 的维次,

$$\mathbf{q} = [\mathbf{p}^T | \mathbf{v}^T]^T \quad (18a)$$

$$\mathbf{p} = \text{col}\{({}^{(\alpha)}\mathbf{p}_k)\} \quad (18b)$$

在李兹缩聚变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_{Nq} \mathbf{q} \quad (91)$$

下,系统的自由度数从  $N = \left( \sum_{\alpha=1}^{\infty} {}^{(\alpha)}I \right) + V$  下降到  $q = \left( \sum_{\alpha=1}^{\infty} {}^{(\alpha)}k \right) + V$ 。

综合系统(相应于广义坐标  $q$  的质量和刚度阵应为:

$$\mu = X_{Nq}^T M_x X_{Nq}, \kappa = X_{Nq}^T K_x X_{Nq} \quad (20)$$

把方程(17)和(7)代入(20),然后利用方程(14)、(16)和(11),经由矩阵分块相乘,我们不难获得:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{KK} & \mu_{KV} \\ \mu_{VK} & \mu_{VV} \end{bmatrix}, \kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{KK} & \kappa_{KV} \\ \kappa_{VK} & \kappa_{VV} \end{bmatrix} \quad (21a)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \mu_{KK} &= \text{diag}({}^{(\alpha)}I_{kk}), \kappa_{KK} = \text{diag}({}^{(\alpha)}\Omega_{kk}) \\ \mu_{KV} &= \text{col} \{ {}^{(\alpha)}[\Phi_{Ik}^T(m_{I1}c_{I1} + m_{I2})B] \}, \kappa_{KV} = 0 \\ \mu_{VV} &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} {}^{(\alpha)}[B^T(m_{JJ} + m_{J1}c_{J1} + c_{J1}^T m_{J1} + c_{J1}^T m_{I1}c_{I1})B] \\ \kappa_{VV} &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} {}^{(\alpha)}[B^T(k_{JJ} + c_{J1}^T k_{J1})B] \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

通常,引用下列记号:

$$\left. \begin{aligned} {}^{(\alpha)}a_{kJ} &= \Phi_{Ik}^T(m_{I1}c_{I1} + m_{I2}) = \Phi_{Ik}^T m_{IJ} + \Omega_{kk}^{-1} \Phi_{Ik}^T k_{IJ} \\ {}^{(\alpha)}m_{JJ} &= m_{JJ} + m_{J1}c_{J1} + c_{J1}^T m_{J1} + c_{J1}^T m_{I1}c_{I1}, \\ {}^{(\alpha)}\hat{k}_{JJ} &= k_{JJ} + c_{J1}^T k_{J1}, \end{aligned} \right\} \quad (21c)$$

分别称为子结构的广义惯性耦合阵以及静态缩聚质量、刚度阵。在上述记法下,我们可把  $\mu_{KV}$ 、 $\mu_{VV}$  和  $\kappa_{VV}$  简写成:

$$\mu_{KV} = \text{col} \{ {}^{(\alpha)}(a_{kJ}B) \}; \quad (21d)$$

$$\mu_{VV} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} {}^{(\alpha)}(\hat{B}^T \hat{m}_{JJ} B) = \sum_{\alpha} {}^{*}\hat{m}_{JJ}, \kappa_{VV} = \sum_{\alpha} {}^{*}\hat{k}_{JJ}. \quad (21e)$$

式中,  $\sum^{*}()$  表示子结构矩阵的装配和。

最终,我们从特征值问题

$$(\kappa - \lambda\mu)q = 0 \quad (22)$$

提取其前  $r(=[q/3])$  阶模态对:

$$\left. \begin{aligned} Q_{qr} &= [q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(r)}] \\ \tilde{\lambda}_i, i &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

它们将是系统优势模态的优良近似解,系统的物理模态可按式计算:

$$\tilde{X}_{Nr} = X_{Nq} Q_{qr}. \quad (24)$$

综上所述,可知在实际做的时候,只要按方程(21)去形成矩阵束  $(\mu, \kappa)$ , 然后求解特征方程(22)并按方程(24)计算系统模态;而所有这一切的运算都已被子结构化了。

约束子结构法,首先由 W. C. Hurty 提出,后被 R. R. Craig 改进成目前这个模式,因此人们常把这种方法叫做 Craig 模态综合法。有关这种方法的改进,读者可参阅文献[9]。

原理上,我们也可丢弃  $X_{NK}$  而仅以  $X_{NV}$  作为李兹基,此时问题简化为由矩阵束  $(\mu_{VV}, \kappa_{KK})$  所表征的静态减缩系统:

$$(\kappa_{VV} - \lambda\mu_{VV})v = 0 \quad (25)$$

说得更确切些,它是在连接坐标  $v$  上的 Guyan (静态)缩聚<sup>[10]</sup>。通常,人们把方程(25)称作节

化特征值问题。在这里利用静力(约束)关系式(15a)把  $\mathbf{x}_s = \text{col}\{^{(\alpha)}\mathbf{u}_i\}$  当作副自由度(slaves)消掉, 并把系统的质量和刚度借助方程(21e) 缩聚到正自由度  $\mathbf{x}_m = \mathbf{v}$  (masters) 上。但是, Guyan 减缩的精度完全取决于正、副自由度  $\mathbf{x}_m$  和  $\mathbf{x}_s$  在原始自由度  $\mathbf{x}$  中的分布<sup>[16~18]</sup>。一般, 连接坐标  $\mathbf{v}$  并非正自由度的良好选择。因此, 为了提高精度, 增补  $\mathbf{x}_{NK}$  作为李兹基的另一部分, 是完全必要的。

下面我们将概略论述约束子结构方法与分支模态法的联系。让系统接受一组线性独立的约束:

$$\mathbf{d}_s^T \mathbf{x} = 0, \mathbf{d}_s \neq \mathbf{0} \quad s = 1, 2, \dots, r. \quad (26)$$

式中,  $\mathbf{d}_s$  是任意选取的  $N$  维非零列向量。由于  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  恒满足上述方程组, 因此这组约束不破坏系统原有的平衡位置。

我们把在约束组(26)之下的系统定义为系统的一个分支, 并把分支(约束系统)的模态称为分支模态。

注意到, 目前  $\mathbf{x} = [\text{row}[\mathbf{d}_s^T] | \mathbf{v}^T]^T$ , 且在约束子结构法中所采用的两组约束

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

和

$$^{(\alpha)}\mathbf{u}_i = ^{(\alpha)}(\mathbf{c}_{ij} \mathbf{B}) \mathbf{v}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, x. \quad (15)$$

都符合方程(26); 因此, 依据上面给出的定义, 由图 1b 和图 1c 所示的约束系统应是原系统的两类分支, 而  $\mathbf{x}_{NK}$  和  $\mathbf{x}_{NV}$  则分别是这两类分支的分支模态, 所以约束子结构法也是一种分支模态法。

在 Gladwell<sup>[13]</sup> 的分支模态法中所采用的约束措施, 是局部刚化, 这种约束的性质限制了该法在赘余对接结构上的应用。而 Craig 方法并无此种限制, 从这个意义上讲, 约束子结构法也是 Gladwell 分支模态法的一种推广。

最后值得提醒的是, 如果我们所施加的约束并不把系统分裂成子结构群, 则分支模态法不必与子结构法联系在一起。但为了统一论证, 我们可把任一分支定义为广义子结构, 这样便可把 Guyan 减缩、李兹减缩以及 Kuhar<sup>[19]</sup> 的动力变换等都泛称为动态子结构方法。

## 二、自由子结构法

割断结构某些部位的联系, 使它解体成若干个子结构, 并用被割断部件中的内力来代替原有的联系。这种做法是先增加自由度而后利用对接界面上的位移协调(或再辅以对接力平衡)去掉多余的自由度<sup>[1]</sup>。这是自由子结构法中的措施。

当系统处于频率为  $\sqrt{\lambda}$  的自由简谐振动状态时, 子结构运动方程可写为:

$$^{(\alpha)}(\mathbf{m}\mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, x. \quad (27)$$

其中, 子结构的位移列阵和质量、刚度矩阵仍如方程(2)和(3)所示, 替代被割断部位联系的系统的内力, 目前已转化为子结构的外激励力, 故

$$^{(\alpha)}\mathbf{f} = [\mathbf{0} | \mathbf{f}_j^T]^T \quad (28)$$

由展开定理, 将子结构的结点位移列阵  $^{(\alpha)}\mathbf{u}$  用其主坐标表示如下:

$$^{(\alpha)}\mathbf{u} = \Phi_N \xi \quad (29)$$

式中, 归范正交的完备主模态矩阵  $\Phi_N$  得自自由子结构的特征方程:



$$^{(\alpha)}(k\Phi_N) = m\Phi_N\Omega_N \quad (30)$$

十分明显,  $\Phi_N$  和  $\Omega_N$  可分块成如下形式:

$$\Phi_N = [\Phi_R | \Phi_E], \Omega_N = \text{diag}(\mathbf{0}_R, \Omega_E) \quad (N = R + E) \quad (31)$$

式中,  $\Phi_R$  为子结构的零频刚体模态矩阵, 阶数  $N \times R$  ( $0 \leq R \leq 6$ ),  $\Phi_E$  为子结构的完备弹性模态矩阵, 阶数  $N \times E$ 。把变换式(29)代入方程(27), 并以  $\Phi_N^T$  左乘所得结果式之两侧, 利用主模态的  $m$ -正交性和  $k$ -正交性, 即可导出完全等价于方程(27)的主坐标  $\xi_N$  的支配方程:

$$^{(\alpha)}(\delta - \lambda\gamma)\xi_N = \Phi_N^T f \quad (32)$$

这里为了简化记法, 我们仍以  $\xi_N$  和  $f$  来表示它们的稳态振幅, 方程(32)中的主质量矩阵和主刚度矩阵分别为:

$$^{(\alpha)}\gamma = I_N, ^{(\alpha)}\delta = \text{diag}(\mathbf{0}_R, \Omega_E) \quad (33)$$

其中,  $^{(\alpha)}\mathbf{0}_R$  表示阶数  $R \times R$  的零阵, 而  $^{(\alpha)}\Omega_E = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \vdots \\ \omega_j^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ ,  $^{(\alpha)}\omega_j$  为子结构的第  $j$  阶弹性频率。

把这些表示式代入方程(32) 可解得

$$^{(\alpha)}\xi_N = \begin{Bmatrix} p_R \\ p_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\lambda^{-1}\Phi_R^T \\ [\Omega_E - \lambda I_E]^{-1}\Phi_E^T \end{Bmatrix} f \quad (34)$$

可见, 弹性主坐标列阵

$$^{(\alpha)}p_E = [p_1, p_2, \dots, p_h, \dots, p_E]^T \quad (35)$$

的第  $h$  个分量  $p_h$  是:

$$^{(\alpha)}p_h = \frac{\Phi_h^T f / \omega_h^2}{1 - (\sqrt{\lambda} / \omega_h)^2} = b_h [1 - (\sqrt{\lambda} / \omega_h)^2]^{-1} \quad (36)$$

其中,  $^{(\alpha)}\Phi_h$  是子结构的第  $h$  阶弹性主模态, 相应的主刚度

$$^{(\alpha)}K_h = \omega_h^2, \quad (37)$$

因而,  $^{(\alpha)}b_h$  是主坐标  $p_h$  对激频为  $\sqrt{\lambda}$  的对接界面反力  $^{(\alpha)}f$  的(准)静态响应:

$$^{(\alpha)}b_h = \Phi_h^T f / K_h \quad (38)$$

通常, 有工程意义的是系统的优势模态, 下以  $\sqrt{\lambda_s}$  ( $s = 1, 2, \dots, t$ ) 表示有待综合的系统之最先  $t$  阶固有频率, 那时一定可取到正整数  $k$ , 使得当  $h > k$  时, 下述频比不等式成立:

$$\sqrt{\lambda_s} / \omega_h \leq \varepsilon \quad (39)$$

式中,  $\varepsilon$  是个小于 1 的任意正数。我们将  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限过程理解为系统中单元趋向无穷小的过程, 致使每个子结构的有限元离散模型都会有足够丰富的频率, 使不等式(39)获得满足。据此, 我们把方程(36)给定的  $p_h^{(s)}$  按泰勒级数展开:

$$p_h^{(s)} = b_h^{(s)} \left\{ 1 + \left( \frac{\sqrt{\lambda_s}}{\omega_h} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (s \leq t, h > k) \quad (40)$$

在一级近似之下, 得到

$$p_h^{(s)} \approx b_h^{(s)}, \quad (s \leq t, h > k) \quad (41)$$

此式表明, 对于满足频率准则(39)的子结构的一切模态, 他们对于系统前  $t$  阶固有模态的贡献十分接近于静态量。

将近似式(41)代入方程(29), 我们获得系统优势模态的近似描述: