大学数学学习指导

# 线性代数

## ——方法导引

屠伯埙编著

DA XUE SHU XUE XUE XI ZHI DAO

复旦大学出版社

大学数学学习指导

# 线性代数

## ——方法导引

屠伯埙 编著



复旦大学出版社

**线 性 代 数**

**——方法导引**

复 旦 大 学 出 版 社 出 版
新华书店上海发行所发行
复 旦 大 学 印 刷 厂 印 刷
字数256千 开本850×1168 1/32 印张8.75
1986年11月第一版 1986 年11月第一次印刷
印数：1——10,000

书号：13253·026 定价：1.80元

# 内 容 简 介

本书系统地介绍了线性代数的方法。第一部分是“解析理论”，即矩阵论，介绍了它的六大基本方法；第二部分为“几何理论”，详细介绍了四个基本的方法。此外，每章都配有大量的例题和习题，较难的习题都附上了提示。本书可供理工科师生和线性代数自学者阅读与参考，也可供报考研究生的读者作为复习的材料。

# 序

本书介绍了处理线性代数问题的各种方法。作者在多年讲授本课程的过程中，经常听到有些学生反映：线性代数解题方法“灵活多变，不易捉摸”。事实上，不少人学后尚能动口（内容似乎懂），但不能动手（分析问题和解决问题的能力较差）。为有助于解决这一矛盾，同时也为了区别于一般教科书和习题集，本书着重于概念的运用和方法的归纳，并配有大量的例题和练习，大多数习题附上了提示。因此，本书不但可作为理工科学生学习线性代数的参考书，也可作为广大自学者和报考研究生的读者作为复习线性代数的综合性材料。

本书在“解析理论”这一部分中，详细介绍了矩阵论的六大方法，讨论了方阵的各种标准形；对于“几何”理论的六大方法，则选择其中四个常用的方法进行详细的论述。至于具体的计算方法，一般就不再写入。此外，为节省篇幅，本书略去了一般线性代数教科书中常见的定理证明，但对其他书上很少出现的一些有用而又容易接受的方法，则在有关地方作了介绍。因此，本书也可供讲授线性代数的教师阅读与参考。

编者多年来为复旦大学学生讲授线性代数，并数次为报考研究生的学生开设线性代数理论与方法的复习辅导讲座，因此本书主要取材于编者的讲稿。书中归纳的主要方法和理论是编者在执教过程中的经验与体会，限于本人的水平，难免有处理不妥与片面之处，甚至可能会有某些错误，恳切希望广大读者批评指正。

屠伯埙　1984年国庆

# 线性代数的基本内容与学习要求

线性代数由两大方面组成：一为矩阵论部分，也称为线性代数的解析理论部分；二为线性代数的“几何”理论部分。

矩阵论部分比较具体，它所要解决的问题也相当明确，而解决问题的方法虽然是多种多样的，但其主要的，是六大基本方法之运用（计算方法未列入其中）。关于这部分的要求，除了要掌握主要的基本结论以及基本运算外，应以掌握六大基本方法之运用为主，并且兼及其他方法。

“几何”理论部分比较抽象，由于它的基本概念是以代数、分析、几何等方面的某些概念作为雏型而抽象出来的，因此重点应放在对这些概念的理解与运用上，具体地说：一、要求对线性空间公理系统的意义与作用有初步的了解，并能用公理系统论证一些基本结论，以初步训练严谨的思维与严格的逻辑推理能力，为学习现代数学走好第一步；二、要求能初步将基本概念及由其推导出来的基本结论运用到代数方面、分析方面以及几何方面；三、要求会运用“几何”理论中的六个基本方法中的四个方法，并了解另外两个方法的运用。

# 目　录

## 第四章 矩阵的秩及其应用



## 第五章 方阵的特征值与方阵的相似



## 第六章 方阵的相似标准形



## 第七章 方阵的正交相似与酉相似



## 第八章 方阵的合同与二次型

## 第九章　正定阵及其应用



# 第二部分　线性代数的“几何理论”

## 第十章　线性空间与欧氏空间



## 第十一章　线性空间上的线性映射



## 第十二章　线性代数的“几何”理论中的基本方法

# 第一部分　线性代数的“解析理论”

## 第一章　矩　　阵

在本书中，称以数 $a_{ij}$ 为元素的 $m$ 行 $n$ 列矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $m\times n$ 阵，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$。当 $m=n$ 时，即 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为方阵时，称 $A$ 为 $n$ 阶阵（或 $n$ 级阵），称 $n\times 1$ 阵为 $n$ 维列向量，称 $1\times n$ 阵为 $n$ 维行向量，以 $A'$ 表示 $A$ 的转置阵，即 $A'=(b_{ij})_{n\times m}$，$b_{ij}=a_{ji}$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$。为节省篇幅，今后常用 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 表示列向量。

称以实数为元素的方阵为实方阵；以复数为元素的方阵为复方阵。

在本书中用得最多的两种实方阵是实对称阵及正交阵，它们的定义分别为：

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实方阵，且 $A=A'$，即 $a_{ij}=a_{ji}$；$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 $A$ 为**实对称阵**。

设 $A$ 是 $n$ 阶实阵，且 $AA'=I_n$，则称 $A$ 为**正交阵**，这里 $I_n$ 表示 $n$ 阶单位阵。

### §1　基本概念与基本结论

本章的主要概念有三，即矩阵的分块与分块矩阵；非异阵及其逆阵；矩阵的初等变换与初等阵。上述三者与“矩阵的秩”（见第三、四章）及“矩阵的特征值”（见第五章）是矩阵中最基础的概念。

## 一、关于矩阵的分块与分块矩阵

若将$m\times n$阵$A$作如下分块：

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_r\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s\end{array}\\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \cdots\cdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix}\end{array}=(A_{ij})_{r\times s} \qquad (1)$$

其中，子块（或称子矩阵）$A_{ij}$是$m_i\times n_j$阵，$\sum\limits_{i=1}^{r}m_i=m$，$\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$，则$A$既是以数为元素的$m\times n$阵，又可将$A$看作以子矩阵$A_{ij}$为元素的$r\times s$分块矩阵。

与数为元素的矩阵一样，分块矩阵也有三种运算：加法、数量乘法与乘法、以乘法运算最为重要，它的运算规则如下。

设$B$是$n\times p$阵，若将$B$作如下分块：

$$B=\begin{array}{c} \\ n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_s\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t\end{array}\\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t}\\ \cdots\cdots & & & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st}\end{pmatrix}\end{array}=(B_{ij})_{s\times t},\quad \sum_{i=1}^{t}p_i=p$$

则

$$AB=(A_{ij})_{r\times s}\cdot(B_{ij})_{s\times t}=\begin{array}{c} \\ m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_r\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t\end{array}\\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t}\\ \cdots\cdots & & & \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt}\end{pmatrix}\end{array}$$

其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}=\sum_{i=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$$

$$i=1,2,\cdots,r;\quad j=1,2,\cdots,t$$

换言之，两个分块矩阵在作乘法运算时，必须符合两个条件：（1）$(B_{ij})_{s\times t}$的行数与$(A_{ij})_{r\times s}$的列数相同（都是$s$）；（2）分块后的子矩阵的乘法都要有意义（指凡是要相乘的子块），这两者缺一不可，下面的例子就是错误的：

**例** 若$n$阶阵$F$的分块是

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}=\begin{array}{c|cc} & n-1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -a_n \\ n-1 & I_{n-1} & \alpha \end{array}$$

其中$I_{n-1}$是$n-1$阶单位阵，$\alpha=(-a_{n-1},-a_{n-2},\cdots,-a_1)'$，按此分块法就不能求$F^2$，因为从

$$F^2=\begin{array}{c|cc} & n-1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -a_n \\ n-1 & I_{n-1} & \alpha \end{array}\cdot\begin{array}{c|cc} & n-1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -a_n \\ n-1 & I_{n-1} & \alpha \end{array}$$

中看出，虽然前者的列数与后者的行数相同，然而要相乘的子矩阵却不能进行乘法运算（因为前者子矩阵的列数与后者子矩阵的行数不相同）。本例中的方阵$F$常称为弗罗本尼乌斯(Frobenius)阵。

另外，若$A$的分块法如（1）那样，则须注意：

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \cdots\cdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{pmatrix}$$

## 二、关于非异阵及其逆阵

**定义** 对于方阵$A$，若存在同阶方阵（或称同级方阵）$B$，使$AB=BA=I$（$I$是同级单位阵），则称$A$为**非（奇）异阵**（或**可逆阵**）。而称$B$为$A$的**逆阵**。否则，就称$A$为**奇异阵**。

由矩阵乘法的定义易证：有一行（或一列）为0的方阵必为奇异

阵。

有关非异阵的基本性质有六条，其中一、二两条为：

**定理1．** 若 $A$ 是非异阵，则 $A$ 的逆阵是唯一的（故可记为 $A^{-1}$），并且 $A'$，$\overline{A}$，$kA(k\neq0)$ 均非异，它们的逆阵分别是：

$$(A')^{-1}=(A^{-1})',\ (\overline{A})^{-1}=(\overline{A^{-1}}),\quad (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \qquad (2)$$

又 $(A^{-1})^{-1}=A$。这里 $A'$ 表示 $A$ 的转置，$\overline{A}$ 表示 $A$ 的共轭，即 $A$ 的每个元素（数）的共轭（复数）按照 $A$ 的原来的相对位置排成的同阶方阵。

**定理2．** 若 $A_1$，$A_2$，…，$A_s$ 是同阶非异阵，$s\geqslant2$，则 $A_1A_2\cdots A_s$ 是非异阵，且

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1} \qquad (3)$$

非异阵的第三、四、五条性质见第二段（定理4、5，6）；第六条性质见第二章定理4．

## 三、关于矩阵的初等变换与初等阵

矩阵的初等变换与初等阵的概念见本章§4，关于它的基本结论有四条，即

**定理3．** 对任何非零 $m\times n$ 阵 $A$（即 $m$ 行 $n$ 列的长方阵，其元素中至少有一个数非零），必存在 $m$ 阶非异阵 $P$ 与 $n$ 阶非异阵 0，使

$$PAQ=\begin{array}{c|cc} & r & n-r \\ \hline r & & \\ m-r & & \end{array}\!\!\!\!\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad r>0 \qquad (4)$$

且 $r$ 由 $A$ 唯一确定。其中，$I_r$ 是 $r$ 阶单位阵，主对角块的 0 是 $(m-r)\times(n-r)$ 阵，而左下角与右上角的 0 分别是 $(m-r)\times r$ 阵与 $r\times(n-r)$ 阵。

**定理4．** 设 $A$ 是 $n$ 阶非零阵，且［由（4）式］

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ r>0$$

（此时 $m=n$），其中 $P$ 与 $Q$ 都是 $n$ 阶非异阵，则 $A$ 是非异阵的充要

条件是 $r=n$。

**定理5.** 方阵 $A$ 是非异阵的充要条件是 $A$ 可表（或分解）为有限个初等阵（它们都是非异阵）的乘积。

**定理6.** $n$ 阶阵 $A$ 是非异阵的充要条件是 $n\times 2n$ 阵 $(A,I_n)$ 可经有限次初等变换化为 $(I_n,B)$。当 $(A,I_n)$ 可经有限次初等变换化为 $(I_n,B)$ 时，恒有 $B=A^{-1}$。

## §2 非异阵及其逆阵

在下节的例 3 中将用初等变换的方法证明：$AB=I$ 的充要条件是 $BA=I$。据此，为要判别方阵 $A$ 是否非异，只要看能否找到同阶方阵 $B$，使 $AB=I$（或 $BA=I$），即可知 $A$ 为非异阵，且 $B=A^{-1}$。

判断方阵的非异性并求出其逆阵的主要方法有四种：

**第一，初等变换法** 若能用有限次初等行变换将 $(A,\ I)$ 化为 $(I,B)$，则由定理 6 可知 $A$ 是非异阵，且 $B=A^{-1}$，此法对数字矩阵特别适用。因为任何教科书上均有此类例子，故这里不再举例了。又此法对非数字阵有时也相当有效（见§4）。

**第二，行列式法** 用行列式判断 $A$ 的非异性并求其逆，见第二章§3.

**第三，降阶方法** （见 §4）

**第四，"和化积"法** 这是专门用于讨论与方阵之和有关的一类问题的方法，这里用来判断方阵之和是否非异，其基本思想是，将方阵之和 $A+C$ 直接化为 $(A+C)B=I$ 的形状，此时 $A+C$ 为非异，且 $B=(A+C)^{-1}$（见例 1）；或者将方阵之和 $A+C$ 表为若干个已知的非异阵之积，再应用定理 2，即知 $A+C$ 是非异阵，并可得出其逆阵（见例 2）。

**例1.** 若方阵 $A$ 满足矩阵恒等式：

$$A^3=3A(A-I) \tag{5}$$

证明：$I-A$ 是非异阵，并求 $(I-A)^{-1}$。

**证** 将（5）式改写为

$$-3A+3A^2-A^3=0 \tag{6}$$

欲证 $I-A$ 是非异阵，就是要找出 $B$，使

$$(I-A)B=I$$

不论如何找法，(6) 式右端必须出现单位阵，故在 (6) 式两端加上 $I$，即得

$$I-3A+3A^2-A^3=I$$

由于 $I$ 与 $A$ 可交换，所以上式可改写为 $(I-A)^3=I$，亦即

$$(I-A)(I-A)^2=I$$

故 $I-A$ 是非异阵，且 $(I-A)^{-1}=(I-A)^2$。

**例2.** 设 $A$、$B$ 及 $A+B$ 都是非异阵。证明：$A^{-1}+B^{-1}$ 也是非异阵，并求其逆。

**证** 将 $A^{-1}+B^{-1}$ 表示为已知非异阵的乘积：

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(I+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

由定理 1 可知，$A^{-1}$ 与 $B^{-1}$ 都是非异阵，再由定理 2 知 $A^{-1}+B^{-1}$ 是非异阵，且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

下章还将继续用到和化积的思想（第二章 §2 例 1），有时，需要结合其他技巧，方能应用和化积的思想，下例就是。

**例 3.** 设 $A$ 与 $B$ 分别是 $n\times m$ 阵与 $m\times n$ 阵，且 $I_m-BA$ 是非异阵，证明：$I_n-AB$ 也是非异阵，并求 $(I_n-AB)^{-1}$。

**证** 在证明之前先分析一下，我们的目的是要找 $C$，使 $(I_n-AB)C=I_n$，欲达此目的，自然要应用假设条件：$I_m-BA$ 的非异性，这就必须先建立 $(I_n-AB)$ 与 $(I_m-BA)$ 的关系式，很自然地会想到下式：

$$B(I_n-AB)=(I_m-BA)B \tag{7}$$

（把 B 从左边“送入”括号内，再“取出” $B$ 到括号的右边，此法称为“送取法”，其思想在别处也很有用）。以下将由此正式证明本例：由 (7) 式可得：

$$B=(I_m-BA)^{-1}B(I_n-AB)$$

于是

$$I_n=(I_n-AB)+AB=(I_n-AB)+A(I_m-BA)^{-1}B(I_n-AB)$$

$$=[I_n+A(I_m-BA)^{-1}B](I_n-AB)$$

**故**$I_n-AB$是非异阵，且

$$(I_n-AB)^{-1}=I_n+A(I_m-BA)^{-1}B$$

由例 3 立刻可得下面的

**例4.** 设$A$是$n$阶非异阵，$\alpha$与$\beta$分别是$n$维列向量，且$1+\beta'A^{-1}\alpha\neq 0$，证明：$A+\alpha\beta'$也是非异阵，并求$(A+\alpha\beta')^{-1}$。

**证** 先将$A+\alpha\beta'$写成：

$$A+\alpha\beta'=A[I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')] \tag{8}$$

由定理 2，只要证明$I_n-(A^{-1}\alpha)\ (-\beta)'$是非异阵即可，但由假设：$1-(-\beta)'(A^{-1}\alpha)\neq 0$，故由例 3 可知：$I_n-(A^{-1}\alpha)\ (-\beta')$是非异阵，且

$$[I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')]^{-1}=I_n+(A^{-1}\alpha)[1-(-\beta')A^{-1}\alpha]^{-1}(-\beta')$$
$$=I_n-\frac{A^{-1}\alpha\beta'}{1+\beta'A^{-1}\alpha}$$

由上式并应用定理 2 及（8）式得到：

$$(A+\alpha\beta')^{-1}=[I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')]^{-1}A^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \tag{9}$$

（9）式被称为**歇尔曼**(Sherman)－**摩利逊**(Morrison)公式，该公式在计算方法与最优化理论中都是有用的。

## §3 矩阵的初等变换与初等阵

### 一、“八字规则”

矩阵的初等变换是指对$m\times n$阵 A 作如下的三种变换：

1．对调$A$的第$i$、$j$两行(列)的位置($1\leqslant i,j\leqslant m$，或$1\leqslant i,j\leqslant n$)。

2．以一个非零数$C$乘$A$的第$i$行（列）($1\leqslant i\leqslant m$ 或 $1\leqslant i\leqslant n$)。

3．将$A$的第$j$行（列）的$k$倍（$k$是一个数）加到第$i$行（列）上去（$1\leqslant i,j\leqslant m$ 或 $1\leqslant i,j\leqslant n$)。

分别称上述变换为第一、二、三种**初等行（列）变换**。

初等阵是指

1．对调单位阵的第 $i$ 行(列)和第 $j$ 行(列)的位置得到的方阵：

$$P_{ij}=\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccccccc} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 0 && 1 && \\ &&&& \ddots &&& \\ &&& 1 && 0 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ (1\leqslant i,j\leqslant m \text{ 或 } 1\leqslant i,j\leqslant n) \\ \longleftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

2．以非零数 $c$ 乘单位阵的第 $i$ 行（列）得到的方阵：

$$D_i(c)=\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& c &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{第 } i \text{ 行}(1\leqslant i\leqslant m\text{或}1\leqslant i\leqslant n) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

3．将单位阵的第 $j$ 行（列）的 $k$ 倍加到第 $i$ 行（列）上得到的方阵：

$$T_{ij}(k)=\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{1} & \phantom{\ddots} & \phantom{1} & \phantom{\ddots} & j & \phantom{\ddots} & \phantom{1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && k && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \quad(1\leqslant i,j\leqslant m \text{ 或 } 1\leqslant i,j\leqslant n) \\ \longleftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

分别称上述初等阵为第一、二、三种(初等变换相应的）初等阵。矩阵的初等变换与初等阵的密切联系可由下列命题表出。

**命题** 矩阵 $A$ 作一次初等行（或列）变换后得到的矩阵 $B$(或 $C$)等于以一个相应的初等阵左（或右）乘 $A$，即 $B=PA$（或 $C=AP$)，$P$ 是相应的初等阵。

为便于记忆，上述关系可概括为**“左行右列，首尾为主”**的**八字规则**。“左行右列”意即：以初等阵 $P$ 左乘 $A$ 的结果（得到 $B$）相当于对 $A$ 作相应的行变换；以初等阵 $P$ 右乘 $A$ 的结果（得到 $C$）相当于对 $A$ 作相应的列变换。“首尾为主”是专对第三种初等变换来说的（它用得最多），即 $T_{ij}(k)$左乘 $A$ 后使 $A$ 的第 $i$ 行变化，“$i$”位于$T_{ij}(k)$