

自动控制理论中的 根轨迹法

〔苏联〕Э. Г. 烏杰尔曼 著

上海科学技术出版社

73.822
487

自动控制理論中的根軌迹法

〔苏联〕Д. П. 烏杰尔曼 著

孙 吳 譯

2449155

上海科學技術出版社

內 容 提 要

本书系統地詳細敘述了根軌迹法的基本內容。首先簡要地介紹有关綫性系統的一些必要的知識,然后闡述根軌迹法的实质、根軌迹的特性和繪制以及如何按照根軌迹估計过渡过程和頻率特性的参数,并研究用根軌迹法綜合自动控制系統的問題,都举有計算实例。

- 本书供自动化工程技术人員及大专学生参考。

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Э. Р. Удерман

Госэнергоиздат • 1963

自动控制理論中的根軌迹法

孙 吳 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/32 印張 4 8/32 排版字数 93,000

1966 年 2 月第 1 版 1966 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—3,600

統一书号 15119·1843 定价(科六) 0.50 元

前 言

根軌迹法出現已十多年了，是广泛用来分析和綜合自动控制系统（包括自动調節系統、自动檢測系統和随动系統）的一种有效的方法。这是因为根軌迹法除了具有頻率法的某些优点外，还能使設計人員得到直接計算系統过渡特性和脉冲特性所需要的全部数据，也就是不仅是在頻域內、而且是在时域內分析和綜合自动控制系统所需要的数据。此外，根軌迹法很簡單，任何技术人員都很容易掌握。

本书是給广大的科学工作者、工程技术人員以及那些对自动控制系統的設計問題感兴趣的人閱讀的。这里对根軌迹法作了系統的敘述，并列举了大量的計算例題作为說明，这些例題一般都导出了最后的数值結果。

本书敘述的原則是：从簡單到复杂，从例題到一般証明。

全书共分5章。在第1章緒論里，介紹有关綫性自动控制系统方面的一些必要的知識，便于讀者掌握后面的材料。第2章和第3章闡述了根軌迹法的实质、根軌迹的性质和繪制。在第4章里談到了怎样按照根的軌迹来估計过渡特性和頻率特性的参数，这对于有效地利用根軌迹来解决自动控制系統的分析和綜合問題，是很必要的。这一章和下一章有一部分材料是以前沒有发表过的。第5章的內容是利用根軌迹法在自动控制系統的零、极点平面上綜合它的校正元件問題。

目 录

前 言

第1章 緒論	1
1. 根軌迹法的特性及应用范围	1
2. 有关綫性自动控制系统方面的一些必要知識	2
第2章 根軌迹法	12
3. 零、极点平面	12
4. 根軌迹法的构思	16
5. 一些简单的例子	20
第3章 根軌迹的性质及繪制	24
6. 根軌迹的性质	24
7. 根軌迹的繪制	30
8. 非单环系統	38
9. 根軌迹基本性质的証明	46
第4章 按照根軌迹估計过渡特性和頻率特性的参数, 过渡过程 曲綫的繪制	52
10. 引言	52
11. 閉环系統零、极点的位置对过渡特性 $h(t)$ 的影响	59
12. 閉环系統零、极点的位置对其頻帶的影响	70
13. 不是施加在系統主輸入端的扰动作用	76
第5章 自动控制系統的綜合	83
14. 引言	83
15. 微分校正 (相位超前校正)	85
16. 积分校正	95
17. 积分-微分校正	102
18. 軟反饋	106
19. 扰动校正	114
20. 自整定系統	119
附 录 确定多项式根的方法	124
参考文献	128

第 1 章

緒 論

1. 根軌迹法的特性及应用範圍

根軌迹法是計算綫性閉环动力学系統(亦即反饋系統)的一种方法,这种系統在过渡过程时的性能用綫性微分方程式来描述,对工程实际來說,已足够精确。

許多自动調节系統、自动檢測系統、随动系統^①以及反饋放大器,都属于綫性反饋系統。

所謂根軌迹是指当系統的某个参数(往往是总放大系数)从 0 变到 ∞ 时,系統特征方程式的根在根的复平面上所描繪的一些曲綫。

用根軌迹法能够根据对系統在过渡过程(由加在系統上的扰动或者控制作用所引起)时的性能提出的要求,也就是对系統的“品质”提出的要求,成功地解决綫性系統的分析 and 綜合問題。

根軌迹法比計算自动控制系統的頻率法出現得要晚一些,由于它具有无可置疑的优点,因而应用亦甚广。根軌迹法实质上是一种图解法,因此它和頻率法一样,非常直观。

一般說来,要从系統在过渡过程时的性能这个角度来解

① 以后我們把所有这些系統都叫做自动控制系统。——原注

釋它的頻率特性，是相當困難的，但根軌迹的數據卻可以按照一些簡單的公式，直接用來計算過渡過程，而且往往用不着另外計算，只要對根軌迹進行觀察，就可以看出過渡過程的主要特徵。

當然，在我們具體設計自動控制系統的時候，每一種方案都不是用一種方法，而是用好幾種方法來計算的，然後從所有的方案中挑出一種最好的方案。在這種情況下，根軌迹法和頻率法可以很好地相互補充，設計人員同時利用這兩種方法，就可以比較容易地解決給定自動控制系統的分析和綜合問題。

本書主要是講述根軌迹法的實質和應用，它可以解決下面幾個問題：

(1) 繪制當系統的總放大系數或其他某個參數變化時，閉環系統傳遞函數極點的軌迹。

(2) 定性和定量地估計，當根軌迹的參數變化時，系統對典型訊號的響應將是怎樣變化的。

(3) 考慮因附加元件而使系統改變或者複雜化時，系統所出現的新參數的影響，或者考慮一些小參數。

(4) 綜合系統的校正元件。

在論述根軌迹的方法及性質以前，先回顧一下有關綫性自動控制系統的一些基本知識和概念。

2. 有關綫性自動控制系統方面的一些必要知識

任何自動控制系統都可用作用圖來表示(圖1)，其中，某調節對象 O 的被調量 x_{BLIX} 由調節器 P 以一定的準確度保持等於輸入量 x_{BX} 或者與輸入量 x_{BX} 成正比(如果系統的輸出端和比較元件 BC 之間用變換元件 Π 來變換訊號的話)，輸入量

x_{BX} 是自动控制系统給定值。

对所謂鎮定系統的自动控制系统來說,譬如調压器、調速器等, x_{BX} 等于常数。对随动系統來說, x_{BX} 是某个時間函数,我們把它叫做控制作用。

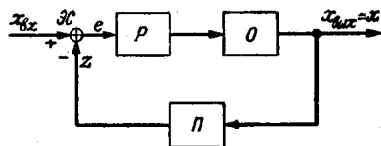


图1 系統的作用图

以后,我們將认为綫性自动控制系统参数都是集中参数,并且与時間无关,因此,描述綫性系統的方程式都是如下的常系数微分方程式^①

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \frac{d^m x_{BX}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_{BX}}{dt} + b_m x_{BX} \quad (1)$$

式(1)中 $m \leq n$, 系数 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 和 $b_j (j=0, 1, 2, \dots, m)$ 都是常数,为了簡便起見, x_{BX} 用 x 来表示。对每个具体的綫性系統來說,在許多情況下利用自动控制系統的结构图来列写式(1)这样的方程式要容易得多。结构图是由一些和自动控制系統的物理元件(或者是元件的一部分)相对应的动态环节所組成,如图2a的标号1、2、3和4所示的。

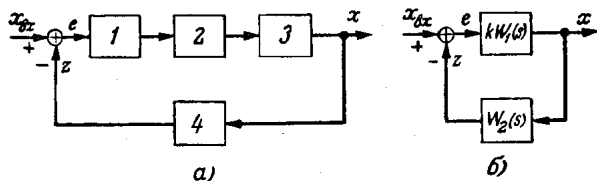


图2 自动控制系統的结构图

① 为了簡單起見,式(1)中沒有考虑到不是施加在系統輸入端的扰动作用。求解式(1)必須知道初始条件,初始条件也可能等于零。——原注

基本动态环节的数目不多,这就是:无惯性环节(或叫放大环节)、非周期环节(或叫惯性环节)、积分环节、微分环节、振荡环节以及纯滞后环节。除了这些环节之外,自动控制系统中还经常要用到稳定环节和校正环节,例如无源四端网络。

上面列举的每个环节中的过程除了滞后环节以外,都可用 $n \leq 2$ 的微分方程式来描述,它是式(1)的一种特殊情况。然而,一个十分重要和非常有用的概念则是环节(系统)的传递函数的概念,它完全反映了环节(系统)的动态性能,传递函数的定义是输出量和输入量在零初始条件下的拉普拉斯象函数之比,即

$$W(s) = \frac{x_{\text{BLX}}(s)}{x_{\text{BX}}(s)} \quad (2)$$

这样一来,如果式(1)是描述闭环系统的,那末,根据式(2),系统在闭环状态下的传递函数为

$$W_0(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (3)$$

而开环系统的传递函数(图 26) 为

$$kW(s) = kW_1(s)W_2(s) = \frac{z(s)}{e(s)}$$

式中

$$e(s) = x_{\text{BX}}(s) - z(s)$$

如果 $W_2(s) = 1$, 则 $z(s) = x(s)$, $e(s)$ 就是系统的偏差象函数。闭环系统传递函数 $W_0(s) = x_{\text{BLX}}(s)/x_{\text{BX}}(s)$ 和开环系统传递函数 $kW(s) = kW_1(s)W_2(s)$ 之间的关系由下式给定

$$W_0(s) = \frac{kW_1(s)}{1 + kW_1(s)W_2(s)} \quad (4)$$

① 以后凡闭环系统的传递函数都用脚码 0 来表示。——原注

这从图 26 的结构图很容易得到。在这个图上, 图 2a 的环节 1、2、3 的总传递函数为 $kW_1(s)$, 而环节 4 的传递函数为 $W_2(s)$ 。

上面已经说过, 传递函数 $kW_1(s)W_2(s)$ 和 $W_0(s)$ 完全决定了系统 (环节) 的动态性能, 这是由于它们都与系统的结构和全部参数有关。因此, 传递函数说明了系统的特性, 当然, 系统 (环节) 也可用其他的特性, 诸如过渡特性、脉冲过渡特性以及频率特性来描述。

这些特性都是系统 (环节) 相应地对加在系统 (环节) 上的所谓典型输入作用或标准输入作用的响应, 并且在输入作用加入以前, 系统处于静止状态。所谓过渡特性 $h(t)$ 就是系统 (环节) 对单位阶跃函数

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

形式的输入作用的响应。脉冲过渡特性或者权函数 $g(t)$ 是系统 (环节) 对单位脉冲函数 $\delta(t)$ (也叫做 δ 函数或狄拉克函数, 它由条件 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ 确定) 形式的输入作用的响应; 频率特性 $W(j\omega)$ 是系统 (环节) 对单位幅度的谐波输入作用的稳态响应, 谐波输入作用的频率我们假定取从 0 到 ∞ 之间的所有值。

这些特性的意义不仅仅是因为它们是系统在经常遇到的最典型的作用下的响应, 而且还由于这些典型作用, 譬如单位阶跃 $1(t)$, 在许多情况下是系统最苛刻的作用^①。如果系统在单位阶跃作用下的性能能够满足对它提出来的要求, 那末可以认为, 它在其他作用形式下的性能更能满足要求。

① 就它们所引起的过渡过程来说。——原注

此外,根据线性系统可以运用迭加原理,当知道了系统的过渡特性 $h(t)$ 或脉冲过渡特性 $g(t)$ 以后,总可以计算出它在其他特征作用下的过渡过程。例如,对随动系统来说,这类作用常常是随时间线性增长的或按抛物线规律(按匀加速度运动规律)增长的输入作用 $x_{\text{BX}}(t)$ 。

知道了系统的特性 $g(t)$ 或者 $h(t)$ 以后,利用迭积分

$$x_{\text{BIX}}(t) = \int_0^t x_{\text{BX}}(\tau) h'(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_{\text{BX}}(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

就可以确定系统在任何给定作用形式下的输出量 $x_{\text{BIX}}(t)$ 。

上述系统的各种特性之间存在着简单的关系。系统的过渡特性就是系统的传递函数除以 s 以后的原函数,即

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_0(s)}{s} \right]$$

因为

$$\frac{1}{s} \rightarrow x_{\text{BX}}(t) = \mathbf{1}(t)$$

脉冲过渡特性等于系统传递函数的原函数

$$g(t) = L^{-1} [W_0(s)]$$

因为

$$1 \rightarrow x_{\text{BX}}(t) = \delta(t)$$

频率特性也叫做复放大系数或复传输系数,它可以这样得到:在传递函数的表达式 $W(s)$ 中,用虚变量 $j\omega$ 来替代拉普拉斯变换的复变参数 s

$$W(j\omega) = W(s)_{s=j\omega}$$

模值 $|W(j\omega)| = A(\omega)$ 和频率 ω 的关系叫做系统的幅频特性,而 $\arg W(j\omega) = \varphi(\omega)$ 叫做相频特性。系统的频率特性 $W(j\omega)$ 是计算自动控制系统和随动系统的频率法的基础,

因为它也反映了系统的动态性能。

在有干扰的情况下，系统的输入信号是时间的随机函数，要计算这样的系统也必须知道频率特性 $W(j\omega)$ 。

作为一个例子，我们来看看非周期环节的各种特性，它的微分方程式的形式是

$$T \frac{dx_{\text{BLIX}}(t)}{dt} + x_{\text{BLIX}}(t) = kx_{\text{BX}}(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

$$g(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

式中取 $k=1$ ； T 为非周期环节的时间常数，它的大小乃是环节惯性的量度。知道了各个环节的传递函数以后，就很容易得到整个系统的微分方程式，也就是式(1)这样的输出量和输入量之间的关系式。

通常系统都是由单向作用的环节构成的，也就是说，将这些环节联接起来以后，后面的环节对前面的环节没有影响（没有反作用），普通的环节串联法则和并联法则都用得上：几个环节串联后的传递函数等于各个环节传递函数之积，而并联时等于各个传递函数之和。

图3是一个随动系统的原理图和结构图，它由一个校正环节，一个放大环节，两个非周期环节和一个积分环节构成。

开环系统传递函数 $kW(s) = \frac{x(s)}{e(s)}$ 等于

$$\begin{aligned} kW(s) &= \frac{\alpha\tau s+1}{\beta\tau s+1} k_0 \frac{k_1}{T_1 s+1} \frac{k_2}{T_2 s+1} \frac{k_3}{s} \\ &= \frac{k(\alpha\tau s+1)}{s(\beta\tau s+1)(T_1 s+1)(T_2 s+1)} \end{aligned} \quad (5)$$

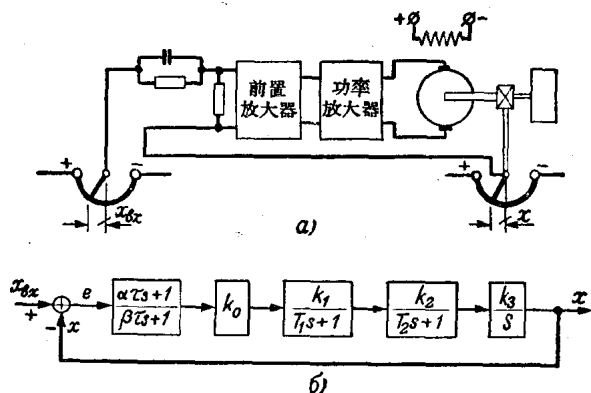


图 3

a—原理图； b—结构图

式中 $k = k_0 k_1 k_2 k_3$ 。

当 $W_2(s) = 1$ 时，闭环系统传递函数 $W_0(s) = \frac{x(s)}{x_{bx}(s)}$ 。根据式(4)等于

$$W_0(s) = \frac{k(\alpha\tau s + 1)}{s(\beta\tau s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k(\alpha\tau s + 1)} \quad (6)$$

用 $x(s)/x_{bx}(s)$ 来代替 $W_0(s)$ ，去掉分母，并用 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ 来表示 s 相应次项的系数（即 s^{n-i} 和 s^{m-i} 的系数， $i=0, 1, 2, \dots$ ），然后再将 s 换成 d/dt ，就得到式(1)这样的微分方程式。

以后，并不需要把闭环系统的传递函数 $W_0(s)$ 化成系统的微分方程式，因为知道了 $W_0(s)$ 的零、极点和初始条件后，利用下面引用的拉普拉斯反变换公式，可以立即写出这个方程式在单位阶跃 $1(t)$ 或单位脉冲 $\delta(t)$ 这种典型作用下的解。

从式(3)和(4)可以看到，所研究的自动控制系统的传递函数 $W_0(s)$ ，都是复变量 s 的有理函数

$$W_0(s) = \frac{G(s)}{H_0(s)}$$

式中 $G(s)$ 和 $H_0(s)$ 分别为 m 阶和 n 阶多项式, 并且 $m \leq n$; 多项式 $H_0(s)$ 等于零, 就是闭环系统的特征方程式。

系统的过渡特性 $h(t)$, 可利用拉普拉斯反变换 (海维赛德展开式) 进行计算

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_0(s)}{s} \right] = L^{-1} \left[\frac{G(s)}{s H_0(s)} \right]$$

当 $H_0(s)$ 的根都是单根 (非重根) 时, $h(t)$ 的形式为^[12, 13]

$$h(t) = \frac{G(0)}{H_0(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{G(s_k)}{s_k H'_0(s_k)} e^{s_k t} \quad (7)$$

而脉冲过渡特性为

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(s_k)}{H'_0(s_k)} e^{s_k t} \quad (8)$$

式(7)和(8)中的 $s_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是特征多项式 $H_0(s)$ 的根, 或者说, 是闭环系统传递函数 $W_0(s)$ 的极点, $H'_0(s_k)$ 是 $s=s_k$ 时的一阶导数 $\frac{dH_0(s)}{ds(s=s_k)}$ 。

这样看来, 要按式(7)和(8)求出过渡特性 $h(t)$ 和 $g(t)$, 得知道闭环系统特征方程式 $H_0(s)=0$ 的根。

仅仅当多项式的阶数 $n \leq 2$ 时, 求根才比较容易, 当 $n=3, 4$, 特别是 $n > 4$ 时, 要用经典的方法确定具有已知数值系数的方程式的根, 是相当复杂的, 阶数 n 愈高, 则愈复杂 (而当方程式的系数是字母时, 一般说来 $n \geq 4$ ① 原则上已不可能求解)。

根轨迹法不仅可以用简单的图解法求出闭环系统特征方程式的根 (与方程式的阶数 n 无关), 而且还可以确定, 当系统

① 原书为 $n \geq$ 。

的某个重要参数——例如系统的总放大系数——变动时，这些根变化的趋势。因而根轨迹法可以解决线性自动控制系统分析和综合的一系列问题。

在结束这一节的时候，简单地讲一讲自动控制系统的一些主要品质指标，因在评价自动控制系统的品质，以及在分析和综合自动控制系统时，都要用到。

由于根轨迹法可以直接判断线性自动控制系统在过渡过程时的性能，因此，这种方法在评价自动控制系统的品质时所用的主要指标，都是时间指标：即调节时间 t_0 、超调量 ξ 和衰减振荡角频率 ω_1 （或者是在时间 t_0 内的振荡次数 N ），如图 4a 所示。

时间品质指标表明了系统在输入端加上单位阶跃形式的作用后的调节过程，因此， t_0 、 ξ 和 ω_1 都是对过渡特性 $h(t)$ 的

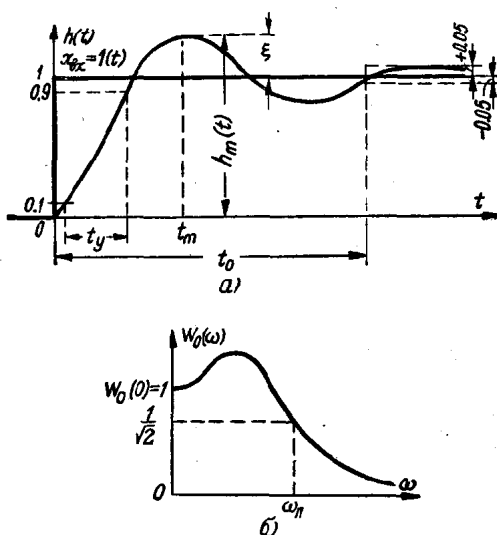


图 4 调节过程的时间品质指标

評價。

因为自动控制系统的主要任务就是要使被調量以一定的准确度保持在給定值附近(譬如,准确度达3~5%),那末,除了上面提到的系統的品质指标外,表征系統靜态調节准确度的指标,即系統的最大稳态偏差,也是一个很重要的指标。

当对过渡特性要求更詳細时,除了上面主要的品质評價以外,有时还加上过渡特性 $h(t)$ 到达第一个最大值的时间 t_m 方面的評價,以及上升时间 t_y 方面的評價; t_y 是指过渡特性 $h(t)$ 从0.1增长到0.9所需要的时间。

自动控制系统和随动系統的一項很重要的指标就是系統通頻帶 ω_n 的大小。通頻帶按照規定的标准来确定,通常取

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ (图46)。因此, ω_n 决定了这样一段頻率区間,

在这段頻率范圍內,閉环系統幅頻特性的纵坐标值 $W_o(\omega)$, 不小于初始值 $W_o(\omega)_{\omega=0} = W_o(0) = 1$ 的0.707。 ω_n 的数值太小則系統响应“迟鈍”,太大則系統对于干扰过于灵敏。

在进行綜合时,不可能保証所有品质指标的数值都是最优的,因此,在选择最后的方案的时候,必須采取某种折衷的办法,以便根据具体的情况,首先滿足那些主要的技术条件。

第 2 章

根軌迹法

3. 零、极点平面

第 2 节中已經讲过，綫性自动控制系统动态性能完全决定于它的傳遞函数(參閱图 26 及式 (4))

$$W_0(s) = \frac{kW_1(s)}{1 + kW_1(s)W_2(s)} \quad (9)$$

系統某一部分以及相应于这一部分的参数，通常都已給定(譬如調节对象、随动系統的动力部分、調节器的执行机构以及其他某些元件)，并且不可能改变。

其他的一些元件，譬如校正元件，它們的結構和参数都要进行选择，以保証系統的品质指标按照規定的技术条件来說是最优的，或者最低限度也是可行的。同样，系統的总放大系数也可以在一定的範圍內变化。

在图 3 所示結構图的例子中，放大系数 k_1 、 k_2 和 k_3 以及時間常数 T_1 和 T_2 可以认为是已給定的参数，其余的参数 α 、 β 、 τ 和 k_0 是要选定的。很明显，改变 k_0 ，总的放大系数 k 也就改变了。

这一章我們將只研究单环系統，并假定系統的結構和它的全部参数都已經知道，只有系統的总放大系数可以在很大