

【美】 JACK K. HALE 著

常微分方程

侯定丕 译

人民教育出版社

[美] JACK K. HALE 著

常 微 分 方 程

侯定丕 译

人民教育出版社

内 容 提 要

本书根据美国 Wiley-Interscience 1969 年出版 Jack K. Hale 著《Ordinary Differential Equations》译出。内容偏重定性理论,并采用了泛函分析等方法。可作高等院校数学专业高年级学生或研究生教学参考书之用。

E002/18

[美] JACK K. HALE 著

常 微 分 方 程

侯 定 丕 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.625 字数 305,000

1980 年 3 月第 1 版 1980 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—12,300

书号 13012·0446 定价 1.10 元

前 言

这本书是从多年来在 Brown 大学应用数学系所开的课程产生的。听课的学生，绝大多数是学应用数学的一、二年级研究生，尽管还有一些是学工程与纯数学的。写这本书的目的有三重。首先，想使读者熟悉常微分方程的某些问题与方法，特别着重在非线性问题。其次，希望提供题材的方式将为读者深钻现代文献与研究微分方程作好准备。第三，为了不致忽视应用方面，以相当的篇幅介绍了现在有广泛应用的专门的解析方法。

由于始终强调非线性现象，在存在性，唯一性与连续依赖性的基本理论之后，就直接介绍二维系统的整体理论。这样作还有一个好处，就是给学生提供推动他们学习以后各章的具体例子与概念。由于一般的 n 维系统还没有令人满意的整体理论可用，我们自然地又回到局部问题，特别是微分方程的解在接近不变集处的特性。在应用中，不但需要研究初始数据变动的影响，而且需要研究向量场变动的影响。在第 III 章与第 IV 章就不变集是平衡点的情况仔细地讨论了这些问题。这样就可以在初等水平上考察微分方程理论中许多基本的与有效的方法。在这些章中研究的解析方法可以直接应用到非线性振动的实用理论中使用最广的方法，即在第 V 章中讨论的平均法。当不变集对应着周期轨道，而且向量场仅容许有自治扰动的时候，讨论与一个平衡点的情况相似，在第 VI 章中进行这种讨论。另一方面，当向量场的扰动是非自治的，或不变集是一含有平衡点的闭曲线时，情况不这么简单。在第 VII 章中，试图介绍这个比较复杂与重要的题材，采用的方式是自然地推广第 IV 章的理论。第 VIII 章介绍确定含有小参数的周期微分

方程何时具有周期解的一般方法。对这个题材写一章，其理由是按照这个体制容易得到 **Hamilton** 系统的重要结论，并且其方法可以推广应用于其它领域，例如偏微分方程，积分方程与泛函微分方程的问题。在第 IX 章中介绍它的抽象推广，并用于求有奇异性的线性系统的解析解，但是限于篇幅，未能应用于其它领域。最后一章介绍稳定性理论中的 **Liapunov** 直接法的基本结果与应用。这个题目不依赖于第 I 章以外的内容，放在书末是为了保持概念的连贯性。

为了发挥泛函分析基本概念的效能并使学生了解其具体应用，我介绍了带有抽象性成分的材料。我虽然要求读者学过高等分析，但在第 0 章与关于殆周期函数的附录中介绍了有关的基础知识。在 **Brown** 大学，第一学期往往教到第 III 章的鞍点性质，第二学期选教以后各章。在整本书中我对进一步学习发表了意见，并且出了习题，其中有些是难题，难处往往发生于习题出在有关方法学习得很少的时候，这样做就能让学生独立思考。当学生准备做习题时，应允许他们花充分的时间，并给适当的提示。

本书不企图包纳微分方程理论的所有方面，限于篇幅，硬是省略了某些从属于上面提到的总目的题目。例如边界值问题与 **Green** 函数，它们是每一个认真学习微分方程的人需要知道的。好在这个题目通常都在另外的应用数学教程中讨论，此外在文献中已有很好的介绍，这可以部分地弥补省略的影响。同样，具体的应用不得不删除，但是有特殊兴趣的人容易找到应用与这里的理论结果的相互关系。

(下略)

作者
1969 年

目 录

第 0 章 数学的预备知识	1
0.1. Banach 空间与例	1
0.2. 线性变换	4
0.3. 不动点定理	5
第 I 章 微分方程的一般性质	15
I.1. 存在性	15
I.2. 解的延拓	19
I.3. 唯一性与连续性	21
I.4. 连续依赖性与稳定性	30
I.5. 微分方程概念的引伸	33
I.6. 微分不等式	36
I.7. 自治系统——概论	45
I.8. 自治系统——极限集, 不变集	55
I.9. 对进一步学习的说明与建议	59
第 II 章 二维系统	61
II.1. 平面二维系统——Poincaré-Bendixson 理论	61
II.2. 环面上的微分系统	75
II.3. 对进一步学习的说明与建议	91
第 III 章 线性系统与线性化	93
III.1. 一般线性系统	94
III.2. 线性与被扰动的线性系统的稳定性	99
III.3. n 阶纯量方程	106
III.4. 常系数线性系统	110
III.5. 二维线性自治系统	119
III.6. 鞍点性质	124
III.7. 线性周期系统	138

■ 8. Hill 方程	142
■ 9. 相反系统	154
■ 10. 典型系统	160
■ 11. 对进一步学习的说明与建议	167
第 IV 章 非临界线性系统的扰动	170
IV. 1. 非齐次线性系统	172
IV. 2. 弱非线性系统——非临界情形	182
IV. 3. 一般鞍点性质	184
IV. 4. 较一般的系统	192
IV. 5. 具有大阻尼与大强迫力的 Duffing 方程	200
第 V 章 简单振动现象与平均法	203
V. 1. 保守系统	203
V. 2. 非保守的二阶方程——极限环	212
V. 3. 平均	220
V. 4. 强迫 van der Pol 方程	229
V. 5. 具有小阻尼与小调和强迫力的 Duffing 方程	230
V. 6. Duffing 方程的三阶次调和解	238
V. 7. 有振动支柱的被阻受激摆	240
V. 8. 习题	242
V. 9. 对进一步学习的说明与建议	244
第 VI 章 在周期轨道附近的性态	245
VI. 1. 在不变闭曲线的周围的局部坐标系	246
VI. 2. 周期轨道的稳定性	252
VI. 3. 二维系统中轨道稳定性的充分条件	258
VI. 4. 自治扰动	261
VI. 5. 对进一步学习的说明与建议	263
第 VII 章 含有小参数的方程的积分流形	264
VII. 1. 确定积分流形的方法	266
VII. 2. 陈述结果	271
VII. 3. 一个“非齐次线性”系统	274
VII. 4. 映射原理	281

VII. 5. 定理 2.1 的证明·····	283
VII. 6. 被扰动流形的稳定性·····	284
VII. 7. 应用·····	285
VII. 8. 习题·····	290
VII. 9. 对进一步学习的说明与建议·····	293
第 VIII 章 含有小参数的周期系统 ·····	295
VIII. 1. 一个特殊的系统·····	296
VIII. 2. 殆线性系统·····	308
VIII. 3. 被扰动的自治方程的周期解·····	322
VIII. 4. 对进一步学习的说明与建议·····	324
第 IX 章 解泛函方程的更替问题 ·····	326
IX. 1. 等价方程·····	327
IX. 2. 推广·····	330
IX. 3. 更替问题·····	332
IX. 4. 周期解的更替问题·····	333
IX. 5. Perron-Lettenmeyer 定理·····	337
IX. 6. 对进一步学习的说明与建议·····	340
第 X 章 Liapunov 直接法 ·····	342
X. 1. 自治系统稳定与不稳定的充分条件·····	342
X. 2. 含有隧道二极管的回路·····	352
X. 3. 非自治系统稳定的充分条件·····	357
X. 4. 渐近稳定性的逆定理·····	361
X. 5. 渐近稳定性的涵义·····	366
X. 6. 对进一步学习的说明与建议·····	369
附录 殆周期函数 ·····	370
参考文献 ·····	380
索引 ·····	391

第 0 章 数学的预备知识

在这一章里, 我们收集了分析中若干在微分方程理论中起重要作用的基本事实.

0.1. Banach 空间与例

集合的交记作 $\cap$, 集合的并记作 $\cup$, 集合的包含记作 $\subset, x \in S$ 表示 x 是集合 S 的元素. R (或 C) 将用来表示实数 (或复数) 域. R (或 C) 上的 抽象线性向量空间 (或线性空间) $\mathcal{X}$ 是这样的元素集合 $\{x, y, \dots\}$, 对于 $\mathcal{X}$ 中的任何 x, y , 它们的和 $x+y$ 有定义, $x+y \in \mathcal{X}$, $x+y=y+x$, 又 $\mathcal{X}$ 中有元素 0 , 使得对于所有 $x \in \mathcal{X}$, 有 $x+0=x$; 对于任何数 $a, b \in R$ (或 C), 纯量乘积 ax 有定义, $ax \in \mathcal{X}$, $1 \cdot x = x$, $(ab)x = a(bx) = b(ax)$, $(a+b)x = ax + bx$, $a(x+y) = ax + ay$. 如果对于线性空间 $\mathcal{X}$ 的每个 x , 对应着一个实数 $|x|$, 称为 x 的 范数, 它满足下述条件

(i) 当 $x \neq 0$ 时 $|x| > 0$, $|0| = 0$;

(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式);

(iii) 对于所有 R (或 C) 中的 a 与 $\mathcal{X}$ 中的 x , 有 $|ax| = |a| \cdot |x|$. 这种线性空间 $\mathcal{X}$ 就是 赋范线性空间. 在可能混淆时, 在 $|\cdot|$ 下角加表示 $\mathcal{X}$ 的记号. 赋范线性空间 $\mathcal{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $\mathcal{X}$ 中的 x , 指的是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$. 我们把它写作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. $\mathcal{X}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使得若 $n, m \geq N(\varepsilon)$, 则 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 如果 $\mathcal{X}$ 中的每个 Cauchy 序列收敛到 $\mathcal{X}$ 的一个元素, 空间 $\mathcal{X}$ 是 完全的. 完全的赋范线性空间是 Banach 空间. 赋范线性空间 $\mathcal{X}$ 的元素 x 的 ε -邻域 是 $\{y \in \mathcal{X} :$

$|y-x|<\varepsilon\}$. 如果 $\mathcal{X}$ 中的集合 S 的任何 x 都有包含在 S 内的 ε -邻域, S 就是开集. 如果元素 x 的每个 ε -邻域都包含集合 S 的点, x 是 S 的极限点. 如果集合 S 包含它所有的极限点, S 是闭集. 集合 S 的闭包是 S 与全体极限点的并集. 如果 S 的闭包是 $\mathcal{X}$, 则集合 S 在 $\mathcal{X}$ 中稠密. 如果 S 是 $\mathcal{X}$ 的子集, A 是 R 的子集, 而 $a\in A, V_a$ 是 $\mathcal{X}$ 的开集的集合, 使得 $\bigcup_{a\in A} V_a \supset S$, 则集合 V_a 被称作 S 的开复盖.

如果 $\mathcal{X}$ 中的集合 S 的每个开复盖包含有限个仍然复盖住 S 的开集, 则 S 是紧的. 对于 Banach 空间, 它与下述说法等价: 如果 Banach 空间的集合 S 的任何序列 $\{x_n\}$ 总包含收敛到 S 的元素的子序列, 则 S 是紧的. 如果对于 $\mathcal{X}$ 中的集合 S , 存在 $r>0$, 使得 $S\subset\{x\in\mathcal{X}: |x|<r\}$, 则 S 是有界的.

例 1.1. 设 $R^n(C^n)$ 是实(复) n -维向量空间. 对于特定的坐标系, $R^n(C^n)$ 的元素 x 便写作 $x=(x_1, \dots, x_n)$, 此地每个 x_j 属于 $R(C)$. 如果 $x=(x_1, \dots, x_n), y=(y_1, \dots, y_n)$ 属于 $R^n(C^n)$, 那么对于 $R(C)$ 中的 a, b , $ax+by$ 被定义为 $(ax_1+by_1, \dots, ax_n+by_n)$. $R^n(C^n)$ 显然是线性空间. 如果对于 $x=(x_1, \dots, x_n)$ 取 $|x|$ 为 $\sup_i |x_i|$,

$\sum_i |x_i|$ 或 $[\sum_i |x_i|^2]^{\frac{1}{2}}$, 则 $R^n(C^n)$ 是 Banach 空间. 这些范数在

这样的意义下是等价的, 按一种范数收敛的序列也按其它种范数收敛. 由于收敛性意味着坐标的收敛性, 而 $R(C)$ 又是完全的, 因此 $R^n(C^n)$ 是完全的.

$R^n(C^n)$ 中的集合 S 是紧的, 当且仅当它是闭的与有界的.

习题 1.1. 如果 E 是有限维线性向量空间, 而 $|\cdot|, \|\cdot\|$ 是 E 的两种范数, 证明存在正的常数 m, M 使得对于 E 中所有 $x, m|x|\leq\|x\|\leq M|x|$.

例 1.2. 设 D 是 R^n [或 C^n]的紧子集, 而 $\mathcal{C}(D, R^n)$ [或 $\mathcal{C}(D,$

$C^n]$ 是由把 D 映入 R^n [或 C^n]的连续函数所成的线性空间。 $\mathcal{C}(D, R^n)$ 中的函数序列 $\{\phi_n, n=1, 2, \dots\}$ 称为在 D 上一致收敛的, 如果存在把 D 映入 R^n 的函数 ϕ , 使得对于每个 $\varepsilon>0$ 存在 $N(\varepsilon)$ (不依赖于 n), 使得对于所有 $n\geq N(\varepsilon)$ 与 D 中的 x 都有 $|\phi_n(x)-\phi(x)|<\varepsilon$. 序列 $\{\phi_n\}$ 称为一致有界的, 如果存在 $M>0$ 使得对于所有 D 中的 x 与所有 $n=1, 2, \dots$ 都有 $|\phi_n(x)|<M$. 序列 $\{\phi_n\}$ 称为同等连续的, 如果对于每个 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得只要 D 中的 x, y 满足 $|x-y|<\delta$, 就有

$$|\phi_n(x)-\phi_n(y)|<\varepsilon, \quad n=1, 2, \dots,$$

$\mathcal{C}(D, R^n)$ 中的函数 f 称为满足Lipschitz 条件的, 如果存在常数 K 使得对于 D 中所有 x, y 有 $|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$. 最常碰见的 $\mathcal{C}(D, R^n)$ 中的同等连续序列是满足 Lipschitz 条件且 Lipschitz 常数 K 不依赖于 n 的序列 $\{\phi_n\}$.

引理 1.1. (Ascoli-Arzelà) $\mathcal{C}(D, R^n)$ 的任何一致有界、同等连续的函数序列有在 D 上一致收敛的子序列.

引理 1.2. 如果 $\mathcal{C}(D, R^n)$ 中的序列在 D 上一致收敛, 则极限函数属于 $\mathcal{C}(D, R^n)$.

如果我们定义

$$|\phi| = \max_{x \in D} |\phi(x)|,$$

则易知它是 $\mathcal{C}$ 上的一种范数, 而上述引理说明 $\mathcal{C}(D, R^n)$ 是具有这种范数的 Banach 空间. 对于 $\mathcal{C}(D, C^n)$ 也同样.

习题 1.2. 假设 $m=n=1$. 若定义

$$\|\phi\| = \int_D |\phi(x)| dx,$$

试说明 $\mathcal{C}(D, R)$ 是赋范线性空间. 给出例子说明为什么这个空间不完全, 什么是这个空间的完全化?

0.2. 线性变换

把某空间的集合 A 变入某空间的集合 B 的函数称为由 A 入 B 的变换或映射. A 叫做映射的区域, 映射值的集合叫做映射的值域. 如果 f 是由 A 入 B 的映射, 我们简记之为 $f:A \rightarrow B$, 又记 f 的值域为 $f(A)$. 如果 $f:A \rightarrow B$ 是一对一的, 并且与其逆都是连续的, 则 f 为由 A 到 B 的同胚. 如果 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是实(或复)Banach 空间, 而 $f:\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. 对于所有 $\mathcal{X}$ 中的 x_1, x_2 与所有实(或复)数 a_1, a_2 有 $f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$, 则 f 称为线性映射. 由 $\mathcal{X}$ 入 $\mathcal{Y}$ 的线性映射称为有界的, 如果存在常数 K 使得 $|f(x)|_2 \leq K|x|_1$ 对所有 $\mathcal{X}$ 中的 x 成立, 这里 1, 2 分别表示范数是在 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 中取的.

引理 2.1. 假设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 Banach 空间, 线性映射 $f:\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 有界, 当且仅当它是连续的.

习题 2.1. 证明此引理.

习题 2.2. 证明由 R^n (或 C^n)入 R^m (或 C^m)的每个线性映射可以用 $m \times n$ 实(或复)矩阵表示, 因此必然连续.

连续线性映射 $f:\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 的范数 $|f|$ 定义为

$$|f| = \sup\{|f(x)|_2 : |x|_1 = 1\}.$$

容易证明这样定义的 $|f|$ 具备范数定义中的性质(i) - (iii), 并且

$$|f(x)|_2 \leq |f| \cdot |x|_1 \quad \text{对于一切 } \mathcal{X} \text{ 中的 } x.$$

如果把 n 维线性空间映入 m 维线性空间的线性映射是由 $m \times n$ 矩阵 A 确定的, 我们把它的范数记作 $|A|$.

习题 2.3. 假设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 Banach 空间, 且 $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是由 $\mathcal{X}$ 入 $\mathcal{Y}$ 的有界线性算子的集合. 证明 $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是具有上面定义的范数的 Banach 空间.

例 2.1. 定义 $f:\mathcal{C}([0, 1], R) \rightarrow R$ 为 $f(\phi) = \int_0^1 \phi(s) ds$, f 是线性、连续映射, $|f| = 1$.

例 2.2. 定义 $S = \{\mathcal{C}([0,1], R) \text{ 中有连续的一阶微商的 } \phi\}$. S 在 $\mathcal{C}([0,1], R)$ 中稠密. 对于任何 S 中的 ϕ , 定义 $f\phi(t) = d\phi(t)/dt, 0 \leq t \leq 1$. 函数 f 是线性的, 但是无界. 事实上, 函数序列 $\phi_n(t) = t^n, 0 \leq t \leq 1$, 满足 $\|\phi_n\| = 1$, 但是 $\|f\phi_n\| = n$. 说明无界性的另一方法是证明 f 不连续. 考虑函数 $\phi_n(t) = t^n - t^{n+1}, 0 \leq t \leq 1, n \geq 1$. 在 $\mathcal{C}([0,1], R)$ 中, $n \rightarrow \infty$ 时 $\phi_n \rightarrow 0$, 但是 $f\phi_n(t) = t^{n-1}[n - (n+1)t]$ 且 $f\phi_n(1) = -1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时不趋于 0.

在微分方程中经常用到的另一个非常重要的泛函分析工具是一致有界性原理. 在本书中, 我们用比较初等的证明来回避这个原理, 只在第 IV 章中有一个例外.

一致有界性原理.

假设 $\mathcal{A}$ 是指标集合, 而对 $\mathcal{A}$ 中的 α , T_α 是由 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 到 Banach 空间 $\mathcal{Y}$ 的有界线性映射, 并且对 $\mathcal{X}$ 中的每个 x , $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} |T_\alpha x| < \infty$, 则 $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|T_\alpha\| < \infty$.

0.3. 不动点定理

变换 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 的不动点是 $\mathcal{X}$ 中满足 $Tx = x$ 的点 x . 关于变换不动点存在性的定理在微分方程中用起来很方便, 即使并非绝对必要. 这些定理可以当作一种工具, 以避免重复议论, 使人能注意问题的实质.

分析中的一种标准方法是逐次逼近法, 它的基本原理已被抽象为所谓 Banach 与 Cacciopoli 压缩映射原理. 如果 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的子集. 而 T 是由 $\mathcal{F}$ 映入 Banach 空间 $\mathcal{Y}$ 的变换 (记作 $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Y}$), 则 T 是 $\mathcal{F}$ 上的压缩, 如果存在 $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$, 使得

$$|Tx - Ty| \leq \lambda |x - y|, \quad x, y \in \mathcal{F}.$$

常数 λ 称为 T 在 $\mathcal{F}$ 上的压缩常数.

定理 3.1. (Banach-Cacciopoli 压缩映射原理). 如果 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的闭子集, 而 $T: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 是压缩, 则 T 在 $\mathcal{F}$ 中有唯一不动点 $\bar{x}$. 并且如果在 $\mathcal{F}$ 中任取 x_0 , 序列 $\{x_{n+1}=Tx_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时总收敛于 $\bar{x}$, 并且 $|\bar{x}-x_n| \leq \lambda^n |x_1-x_0|/(1-\lambda)$, 此地 $\lambda < 1$ 是 T 在 $\mathcal{F}$ 上的压缩常数.

证明 唯一性. 如果 $0 \leq \lambda < 1$ 是 T 在 $\mathcal{F}$ 上的压缩常数, 又有 $x, y \in \mathcal{F}$ 满足 $x = Tx, y = Ty$, 于是 $|x-y| = |Tx-Ty| \leq \lambda|x-y|$. 由此推知 $|x-y| \leq 0$, 故 $|x-y| = 0$ 即 $x=y$.

存在性. 设 x_0 是任意的, 而 $x_{n+1}=Tx_n, n=0, 1, 2, \dots$, 根据假设每个 $x_n, n=0, 1, \dots$, 属于 $\mathcal{F}$. 又 $|x_{n+1}-x_n| \leq \lambda|x_n-x_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^n|x_1-x_0|, n=0, 1, \dots$ 于是对于 $m > n$

$$\begin{aligned} |x_m-x_n| &\leq |x_m-x_{m-1}| + |x_{m-1}-x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1}-x_n| \\ &\leq [\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + \lambda^n] |x_1-x_0| \\ &= \lambda^n [1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-n-1}] |x_1-x_0| \\ &= \frac{\lambda^n [1 - \lambda^{m-n}]}{1 - \lambda} |x_1-x_0| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1-x_0|, \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 在 $\mathcal{X}$ 中有 $\bar{x}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. 因为 $\mathcal{F}$ 是闭的, 故 $\bar{x}$ 属于 $\mathcal{F}$. 因为 T 连续, 又 $|\cdot|$ 连续 (因为 $|x| - |x_n - x| \leq |x_n| \leq |x_n - x| + |x|$), 所以推知

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} |x_{m+1} - Tx_m| = |\lim_{m \rightarrow \infty} [x_{m+1} - Tx_m]| = |\bar{x} - T\bar{x}|,$$

故 $T\bar{x} = \bar{x}$. 这就证明了不动点的存在性.

在前面对 $|x_m-x_n|$ 的估计式中令 $m \rightarrow \infty$, 便证明了最后的估计式, 定理证毕.

习题 3.1. 假设 $\mathcal{X}$ 是 Banach 空间, $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 是连续线性算子, $|T| < 1$. 证明: 若 I 为恒等算子, 则 $I-T$ 有有界的逆. 即证明方程 $(I-T)x=y$ 在 $\mathcal{X}$ 中有唯一解 x , 它连续依赖于 $\mathcal{X}$ 中的 y .

设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 Banach 空间, D 是 $\mathcal{X}$ 中的开集. 函数 $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$ 称为在 D 中点 x (Frechet) 可微, 如果存在 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 的有界线性算子 $A(x)$, 使得对于每个 $h \in \mathcal{X}$, 只要 $x+h \in D$ 就有

$$|f(x+h) - f(x) - A(x)h| \leq \rho(|h|, x),$$

此地 $\rho(|h|, x)$ 满足当 $|h| \rightarrow 0$ 时 $\rho(|h|, x)/|h| \rightarrow 0$. 线性算子 $A(x)$ 称为 f 在 x 的导数, 而 $A(x)h$ 称为 f 在 x 的微分.

习题 3.2. 假设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 是 Banach 空间, $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{X}$ 的开子集, $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Y}$, 而对于每个 $x_0 \in \mathcal{A}$, $h \in \mathcal{X}$ 以及实变量 t , 极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = \omega(x_0)h$$

存在. 再假设对于所有 $x_0 \in \mathcal{A}$ 而言, $\omega(x_0)$ 是连续线性映射, 又假设 ω 作为由 $\mathcal{A}$ 入 $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的映射是连续的, 其中 $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是习题 2.3 中所定义的. 证明, f 是 (Frechet) 可微的, 在 $x_0 \in \mathcal{A}$ 的导数是 $\omega(x_0)$.

习题 3.3. 证明上一习题中的 $\omega(x_0)$ 可能对于每个 h 都存在, 是连续线性映射, 但可能不是 f 在 $x_0 \in \mathcal{A}$ 的 Frechet 导数.

习题 3.4. 设 $\mathcal{C}^1([0, 1], R^n)$ 是连续可微函数 $x: [0, 1] \rightarrow R^n$ 的空间, 在其中按通常的方式定义了加法与纯量乘法, 又令 $|x| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |\dot{x}(t)|$, 此地 $\dot{x}(t) = dx/dt$. 证明 $\mathcal{C}^1([0, 1], R^n)$ 是 Banach 空间.

习题 3.5. 设 $w: \mathcal{C}^1([0, 1], R^n) \times [0, 1] \rightarrow R^n$ 是赋值映射, $w(x, t) = x(t)$. 证明 w 连续可微, 并计算其导数. 用两法作此题, 一法是按导数的定义, 一法是据习题 3.2.

若 $f: R^m \rightarrow R^n$ 在点 x 可微, 则 $A(x) = \partial f(x) / \partial x = (\partial f_i(x) / \partial x_j, i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m)$ 是 f 对于 x 的 Jacobi 矩阵.

引进一些关于阶关系的记号, 以后有用. 如果 $|f(x)|/|x|$ 对零的邻域内的 x 有界, 就说当 $|x| \rightarrow 0$ 时 $f(x) = O(|x|)$. 如果

$|x| \rightarrow 0$ 时 $|f(x)|/|x| \rightarrow 0$, 就说当 $|x| \rightarrow 0$ 时 $f(x) = o(|x|)$.

假设 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的子集, $\mathcal{G}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{Y}$ 的子集, 而 $\{T_y, y \in \mathcal{G}\}$ 是 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$ 的算子族. 如果 $T_y: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, 且有 $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$. 使得

$$|T_y x - T_y \bar{x}| \leq \lambda |x - \bar{x}| \quad \text{对于所有 } y \in \mathcal{G} \text{ 与 } x, \bar{x} \in \mathcal{F}.$$

则说算子 T_y 是在 $\mathcal{F}$ 上的一致压缩. 换句话说, 对于每个 $\mathcal{G}$ 中的 y 而言, T_y 是压缩, 而压缩常数又可取得不依赖于 y .

定理 3.2. 如果 $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的闭子集, $\mathcal{G}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{Y}$ 的子集; 对于 $\mathcal{Y}$ 中的 $y, T_y: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一致压缩; 对于 $\mathcal{F}$ 中每一个固定的 $x, T_y x$ 对 y 是连续的, 则 T_y 的唯一不动点 $g(y)$ 对 y 是连续的. 并且, 如果 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是开集 $\mathcal{F}^\circ, \mathcal{G}^\circ$ 的闭包; 而 $T_y x$ 对 y, x 的一阶导数相应地为 $A(x, y), B(x, y)$, 并且都连续; 则 $g(y)$ 对于 $\mathcal{G}^\circ$ 中的 y 的一阶导数连续.

推论 3.1. 假设 $\mathcal{X}$ 是 Banach 空间, $\mathcal{G}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{Y}$ 的子集; $A_y: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 对于 $\mathcal{Y}$ 中每个 y 是连续线性算子; 对于所有 $y \in \mathcal{G}, |A_y| \leq \delta < 1$; 对于 $\mathcal{X}$ 中每个 x 而言, $A_y x$ 对 y 连续. 则算子 $I - A_y$ 有有界的逆, 此逆连续地依赖于 y .

证明 因为 $T_y: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 是一致压缩, 所以存在 $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$, 使得对于 $\mathcal{G}$ 中所有 y 与 $\mathcal{F}$ 中所有 $x, \bar{x}$ 有 $|T_y x - T_y \bar{x}| \leq \lambda |x - \bar{x}|$. 设 $g(y)$ 是 T_y 在 $\mathcal{F}$ 中的唯一不动点, 据定理 3.1 知它是存在的. 于是

$$\begin{aligned} g(y+h) - g(y) &= T_{y+h} g(y+h) - T_y g(y) \\ &= T_{y+h} g(y+h) - T_{y+h} g(y) + T_{y+h} g(y) \\ &\quad - T_y g(y), \end{aligned}$$

而

$$|g(y+h) - g(y)| \leq \lambda |g(y+h) - g(y)| + |T_{y+h} g(y) - T_y g(y)|,$$

由此推知

$$|g(y+h) - g(y)| \leq (1-\lambda)^{-1} |T_{y+h} g(y) - T_y g(y)|.$$

由于 $T_y x$ 对于 $\mathcal{X}$ 中每个固定的 x 而言, 对 y 是连续的, 故 $g(y)$ 是连续的. 这就证明了定理的第一部分.

从此可几乎直接地证明推论 3.1. 事实上, 我们需要证明的是, 对于 $\mathcal{X}$ 中每个 z , 方程 $x - A_y x = z$ 有唯一解, 而此解连续地依赖于 y, z . 这等价于求由 $T_{y,z} x = A_y x + z$ 所定义的算子 $T_{y,z}$ 的不动点 x . 由于算子 A_y 是一致压缩, 从定理 3.2. 的第一部分便推出推论 3.1 的结论.

为了证明定理的后一部分, 我们假设对于 $y \in \mathcal{Y}^\circ, x \in \mathcal{X}^\circ, T_y x$ 有连续的一阶导数, 它们相应地是 $A(x, y), B(x, y)$. $g(y) = T_y g(y)$. 我们先假定 g 有导数 $C(y)$, 对于 $\mathcal{Y}$ 中 h , 来找 g 的微分 $z = C(y)h$ 应满足的方程. 如果微分的链式法则可用, 则

$$z = B(g(y), y)z + A(g(y), y)h, \quad (3.1)$$

此地 h 是 $\mathcal{Y}$ 的任意元素. 容易证明, 由 T_y 是一致压缩, 可推知对于 $\mathcal{X}^\circ$ 中的 x 与 $\mathcal{Y}^\circ$ 中的 y 有 $|B(x, y)| < \delta < 1$.

由于对于 $\mathcal{X}^\circ$ 中的 x 与 $\mathcal{Y}^\circ$ 中的 y 有 $|B(x, y)| < \delta < 1$, 从推论 3.1 推知对于 $\mathcal{Y}$ 中每个 y 与 $\mathcal{Y}$ 中 h , 方程 (3.1) 有唯一解 $z(y, h)$, 它对 y, h 是连续的. 根据唯一性, 可见对于所有纯量 α, β 与 $\mathcal{Y}$ 中 h, u 有 $z(y, \alpha h + \beta u) = \alpha z(y, h) + \beta z(y, u)$; 即 $z(y, h)$ 对 h 是线性的, 可以写成 $C(y)h$, 此地 $C(y): \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ 对每个 y 是连续线性算子, 并且对 y 是连续的. 为了证明 $C(y)$ 是 $g(y)$ 的导数, 我们对充分小的 h 来考察

$$\begin{aligned} g(y+h) - g(y) &= T_{y+h} g(y+h) - T_y g(y) \\ &= T_y g(y+h) - T_y g(y) + A(g(y+h), y)h \\ &\quad + o(|h|) \\ &= B(g(y), y)[g(y+h) - g(y)] + o(|g(y+h) \\ &\quad - g(y)|) + A(g(y+h), y)h + o(|h|), \end{aligned} \quad (3.2)$$

如果 $g(y+h) - g(y) - C(y)h = w$, 那么由关系式 (3.2) 与 $z = C(y)h$