线性空间引论

叶明训　郑延履　陈恭亮　编著

修订版

武汉大学出版社

线性空间引论

（修 订 版）

叶明训 郑延履 陈恭亮 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性空间引论/叶明训,郑廷履,陈恭亮编著.—修订版.—武汉:武汉大学出版社,2000.2
ISBN 7-307-02735-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①叶… ②郑… ③陈… Ⅲ.线性空间—概论 Ⅳ.O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 08251 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:李桂珍　　版式设计:支　笛

出版:**武汉大学出版社**　(430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:epd@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
发行:新华书店湖北发行所
印刷:湖北省通山县印刷厂
开本:850×1168 1/32 印张:12.25 字数:313 千字
版次:2000 年 2 月第 1 版　　2000 年 2 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-02735-6/O·207　　定价:13.50 元

内 容 提 要

全书共九章。前两章由群、环、域介绍线性空间的基本理论，并利用它在第三、五章和§4.6讨论矩阵运算、矩阵相似和线性方程组；第四章用交错的多重线性型来讨论行列式；第九章再深入讨论交错多重线性型的一般理论；第六章讲对偶空间后，第七章讲对称的双线性型，并讨论二次齐式、欧氏空间等，第八章则讲类似的埃米特型。

这是一本以线性空间与线性变换为理论基础的线性代数教材，写法力求方便于教学和自学，适用于综合大学、师范院校数学系，也可以作其他院校线性代数课程的参考书。

序　言

线性代数是线性空间与线性变换的理论，我们用这个观点来阐述全书的内容。介绍集合、映射和基本代数结构后，线性空间和线性变换看作带算加群和带算同态。解线性方程组归结成求线性变换为核子空间。矩阵运算性质由线性变换推出；求矩阵的相似对角块型，实质是把线性空间分解成不变子空间的直和。线性泛函是一类特殊的线性变换，对偶空间则是讨论多重线性型的基础。二次齐式和欧氏空间都包含在对称双线性型的内容中，行列式也包含在多重交错线性型的内容中。多重交错线性型的深入讨论，又利用了张量代数和外代数的基本知识。

在上述教材体系下，我们还注意以下几点：交代概念和问题的背景，再抽象到"公理化"的讨论；较现行教材内容有所增减，又保证教学大纲的基本要求；分析和解决问题的思想方法在进化，基本运算能力和解题技巧要保持；大量的例题和习题，使讲课与作业相配合。这个教材，可用于综合大学和师范院校数学系，也可以作其他读者的参考。

1980 年至 1986 年，在武汉大学《中法数学试验班》的线性代数教学中，采用法国的教材和参考书。在教学中，我们吸取这些书籍的大框架，结合中国的具体情况，组织教学内容，自编成讲义，从 1986 年以来又使用了五次。边使用，边修改，还参考了一些中、美的教材，写成现在的这个本子。成书过程中，得到许多师长和同事的指导和帮助，谨致谢意。

水平所限，错误难免，抛砖引玉，力求更新教学内容。

再版前言

这个教材初版于 1990 年,此后在武汉大学数学基地班使用了六次。吸收各位任课教师的具体意见,又作了较多的增添和修改,成为现在的这个本子。再版主要的改动在:

一、保持初版的体系和大框架,把线性代数作为线性空间和线性变换的理论。同时,不拘泥于统一的模式,适时地增加了矩阵运算的许多方法和技巧,例如分块矩阵和初等变换等,以便更灵活地讨论问题。

二、增加了例题和习题的类型和份量,例题所占的篇辐大约可达全书之半。力求精讲多练,使基本理论与解题有较紧密的配合。

三、对全书的习题,除特别简单的,都作了一个提示性的解答,帮助初学者澄清思路,不能代替学生的作业。

目　　录

第一章 代 数 系

集合论的语言和方法,已经深入到数学理论的各个分支,也是代数方面课程的重要基础.为了给这本书各章作准备,在这一章里首先介绍集合论的一些基本概念,然后在集合内引入运算,讲几种常用的代数系.主要讲5个问题:(1)集合与元素;(2)映射;(3)等价关系和等价分类;(4)运算与代数系;(5)群、环、域.

§1.1 集 合

在讨论一个数学问题的时候,我们常常把一些讨论的对象作为一个整体来看待,以便确定这些对象的共同性质和相互关系.在一个问题中,这些讨论对象的全体作为一个整体,叫做**集合**;其中的每一个对象叫做集合的**元素**,简称为**元**.

例如:所有的自然数组成一个集合,叫做自然数集,记成 $\mathbf{N}$;所有的整数组成一个集合,叫做整数集,记成 $\mathbf{Z}$;此外,类似的还有有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 等.

值得注意的,集合不一定是数集,元素不一定是数.例如:一个平面上的所有点组成一个集合;直观空间内的所有直线也组成一个集合;一台计算机内,所有的集成电路元件也组成一个集合.集合的例子,是不胜枚举的.

集合有两种表示方法,一种是列举元素来表示集合.如集合

$$E=\{1,2,3,5,6,10,15,30\},$$

是30的所有正约数组成的集合,它的元素可以列举无遗.又例如:

$$\{1,2,3,\cdots\},$$

$$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\},$$

$\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 等,它们的元素不可能列举无遗,只好辅以省略号.集合的另一种表示方法,是指出集合内元素所具有的公共性质.例如:$x\in\mathbf{N}$表示 x 是 $\mathbf{N}$ 的元时,前面的 E 又可以表示成

$$\{x\mid x\in\mathbf{N},\ x\mid 30\}.$$

又例如:平面上以原点为圆心、以 1 为半径的圆上所有点,组成一个集合 F,它可以表示成

$$\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R},\ x^2+y^2=1\}.$$

同样,奇数集、偶数集可以分别表示成

$$\{2x+1\mid x\in\mathbf{Z}\},\quad \{2x\mid x\in\mathbf{Z}\}.$$

为了今后叙述的方便,我们约定:不包含任何元素也组成一个集合,叫做**空集**,记成 $\varnothing$.譬如说,

$$\{x\mid x\in\mathbf{Z},\ 3<x<4\}$$

就是空集.我们还约定:集合不包含相同的元素.也就是说,集合是不同元素的全体.当元素的个数有限时,这个集合叫**有限集**,否则叫**无限集**.

如果 x 是集合 E 的元素,就称 x **属于** E,记成 $x\in E$,像上面已经用过的记号;否则,称 x **不属于** E,记成 $x\overline{\in} E$.

假设 E,F 是两个集合.如果 E 的任何元素都属于 F,即任意 $x\in E$ 时都有 $x\in F$,就称 E 是 F 的**子集合**,记成 $E\subseteq F$,读成 F 包含 E,或 E 包含在 F 内.如果 $E\subseteq F$ 但是 $E\neq F$,就称 F **真包含** E,记成 $E\subset F$.譬如说,

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}.$$

假设 E,F 是两个集合,$E\subseteq F$ 而且 $F\subseteq E$,就称 E 与 F **相等**,记成 $E=F$.

假设 E,F 是两个集合.那么,E 与 F 的公共元素的全体,组成一个新的集合,叫做 E 和 F 的**交集**,记成 $E\cap F$.这就是说,

$$E\cap F=\{x\mid x\in E,x\in F\}.$$

另外,E 的所有元素及 F 的所有元素的全体,也组成一个新的集合,叫做 E 和 F 的**并集**,记成 $E\cup F$.这就是说,

$$E \cup F = \{x \mid x \in E, \text{或 } x \in F\}.$$

最后,属于 F 但不属于 E 的所有元素的全体,也组成一个新的集合,叫做 F 对于 E 的**差集**,记成 $F-E$.这就是说,

$$F-E=\{x \mid x \in F, x \overline{\in} E\}.$$

譬如说,$E=\{1,2,3\}$,$F=\{2,3,4\}$,$G=\{1,2\}$时,就有

$$E \cap F=\{2,3\},$$
$$E \cup F=\{1,2,3,4\},$$
$$E-F=\{1\},$$
$$E-G=\{3\},$$
$$G-E=\varnothing.$$

像初等数学的运算一样,集合的交集、并集、差集也有一些类似的性质.

性质 1 假设 E,F,G 是 3 个集合.那么有

1) 交换律:$E \cap F=F \cap E$,$E \cup F=F \cup E$;

2) 结合律:$(E \cap F) \cap G=E \cap (F \cap G)$,
$(E \cup F) \cup G=E \cup (F \cup G)$;

3) 分配律:$E \cap (F \cup G)=(E \cap F) \cup (E \cap G)$,
$E \cup (F \cap G)=(E \cup F) \cap (E \cup G)$.

证 性质 1 的这些命题,证明方法都是一样的.我们只就分配律的第一个命题来证明,其余留给读者做练习.

对于任意 $x \in E \cap (F \cup G)$,有 $x \in E$ 同时 $x \in F \cup G$.也就是说,$x \in E$ 同时 $x \in F$,或者 $x \in E$ 同时 $x \in G$.即 $x \in E \cap F$,或 $x \in E \cap G$.总之,$x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$.这就证明了

$$E \cap (F \cup G) \subseteq (E \cap F) \cup (E \cap G). \tag{1}$$

反过来,显然 $E \cap F \subseteq F$,$E \cap G \subseteq G$.因此,

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq F \cup G. \tag{2}$$

同理可证

$$(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cup E=E. \tag{3}$$

由(2),(3)两式就得到

$$(E\cap F)\cup(E\cap G)\subseteq E\cap(F\cup G). \tag{4}$$

由(1),(4)说明,分配律的第一个命题成立.

性质 2 假设 A,B,E 是 3 个集合.那么有

1) $E-(A\cup B)=(E-A)\cap(E-B)$;

2) $E-(A\cap B)=(E-A)\cup(E-B)$.

证 先来证明第一个命题.

对于任意 $x\in E-(A\cup B)$,有 $x\in E$ 但 $x\overline{\in} A\cup B$.也就是说,

$$x\in E,\ x\overline{\in}A,\ x\overline{\in}B.$$

所以 $x\in E-A$,$x\in E-B$.因而 $x\in(E-A)\cap(E-B)$.这就证明了

$$E-(A\cup B)\subseteq(E-A)\cap(E-B). \tag{5}$$

反过来,对于任意 $x\in(E-A)\cap(E-B)$,有 $x\in E-A$ 和 $x\in E-B$.也就是说,$x\in E$ 但 $x\overline{\in}A$,$x\overline{\in}B$.即是说 $x\in E$ 但 $x\overline{\in}A\cup B$.所以,$x\in E-(A\cup B)$.这就证明了

$$(E-A)\cap(E-B)\subseteq E-(A\cup B). \tag{6}$$

(5),(6)两式说明 1)成立.

利用 1),又得到

$$\begin{aligned}E-[(E-A)\cup(E-B)]&=[E-(E-A)]\cap[E-(E-B)]\\&=E\cap A\cap B.\end{aligned}$$

再由差集的定义,不难得到

$$E-(A\cap B)=(E-A)\cup(E-B).$$

这就证明了 2).

最后,我们来介绍集合的直积,它是由若干个集合导出的一个新的集合.

假设 E,F 是两个集合.由 $x\in E$,$y\in F$ 作一个有顺序的元素对 (x,y).当取遍 E,F 的元素时,所有这样的元素对的全体,组成一个新的集合,叫做 E 与 F 的**直积**,记成 $E\times F$.这就是说,

$$E\times F=\{(x,y)\mid x\in E,y\in F\}.$$

用同样的方法,可以定义 n 个集合 $E_1,\cdots,E_n$ 的直积

$$E_1\times\cdots\times E_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in E_i,i=1,\cdots,n\}.$$

特别地,$E_1=\cdots=E_n=E$ 时,记 $E_1\times\cdots\times E_n=E^n$,即

$$E^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in E,i=1,\cdots,n\}.$$

在几何内有许多集合直积的实例,平面上的点的集合可以看成两个实数集的直积、空间内的点的集合可以看成3个实数集的直积.

习　　题

1. 列举下面每个集合的元素:

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z},4<x<10\},$$
$$B=\{x\mid x\text{ 是偶数},x^2\text{ 是奇数}\},$$
$$C=\{x\mid \text{存在 }y\in\mathbf{Z}\text{ 使得 }x=5y+1\},$$
$$D=\{x\mid x^3=1\},$$
$$E=\{x\mid x\in\mathbf{Z},x>1\text{ 或 }x<2\}.$$

2. 假设 A,B 都是 E 的子集合.那么,$B=E-A$ 的充要条件是

$$A\cup B=E,\quad A\cap B=\varnothing.$$

3. 假设 A,B 都是 E 的子集合.那么,下面4个条件是等价的:

$$A\subseteq B;\ E-B\subseteq E-A;\ A\cup B=B;\ A\cap B=A.$$

4. 假设 A,B,C 都是 E 的子集合.那么有

   1) $A-B=A-(A\cap B)$;

   2) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$;

   3) $A\cap(B-C)=B\cap(A-C)=(A\cap B)-C$.

5. 假设 A,B,C,D 是4个集合.那么有

   1) $A\subseteq B,C\subseteq D$ 的充要条件是 $A\times C\subseteq B\times D$;

   2) $(A\times C)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times C$;

   3) $(A\times C)\cap(B\times C)=(A\cap B)\times C$;

   4) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$.

6. 假设 A,B,C 都是 E 的子集合,$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$.那么有 $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$,$A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

§1.2　映　　射

为了讨论不同集合之间的相互关系,我们引入映射的概念.

假设集合 X 的元素与集合 Y 的元素之间,有一个对应的规则 f:对于任意 $x\in X$,都有一个对应的 $y\in Y$,记成 $y=f(x)$.那么,这个对应的规则 f 叫做 X 到 Y 的**映射**,y 叫做 x 的像,x 叫做 y 的**像源**.映射和元素的对应关系通常记成

$$f:\ X\longrightarrow Y \quad 或 \quad X\xrightarrow{f}Y,$$

$$f:\ x\longmapsto y \quad 或 \quad x\stackrel{f}{\longmapsto}y.$$

根据上述定义,对于映射 f,X 内的任意元素 x 都有像 $f(x)$ 在 Y 内.但是,Y 内的任意元素 y 不一定都有像源.譬如说,集合 E 到 E 的映射:$x\longmapsto x$,它把 E 的任意元都对应它自身.这个映射叫做 E 的**恒等映射**,记成 id_E.显然,E 内任意元素都有像源.再譬如说,$\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射:$x\longmapsto x^2$.$\mathbf{R}$ 内的元素 $y<0$ 时,y 就没有像源.假若 f 是 X 到 Y 的映射,而且 Y 内任意元素都有像源.那么,这种 f 叫做 **X 到 Y 上的映射**.

根据映射的定义,对于映射 f,X 内任意元素 x 的像 $f(x)$ 是唯一的.但是,Y 内的元素 y 有像源时,y 的像源不一定是唯一的.譬如说,对恒等映射 id_E,E 内任意元素 x 有唯一的像源 x.再譬如说,对 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 内的映射:$x\longmapsto x^2$,$\mathbf{R}$ 内元素 $y>0$ 时,y 都有像源 $\pm\sqrt{y}$,不是唯一的.再举个例子,

$$f:\ x\longmapsto\frac{2x}{x-1}$$

是 $\mathbf{R}-\{1\}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射.任意 $x\in\mathbf{R}$, $x\neq1$,都有像 $f(x)\in\mathbf{R}$.但是,$\mathbf{R}$ 内 $y=2$ 没有像源,不存在 $x\in\mathbf{R}-\{1\}$ 使 $\frac{2x}{x-1}=2$.容易看出,f 是 $\mathbf{R}-\{1\}$ 到 $\mathbf{R}-\{2\}$ 上的映射;而且,$\mathbf{R}-\{2\}$ 内任意元素的像源是唯一的.假若 f 是 X 到 Y 的映射,Y 内元素 y 有像源时,y 的像源还是唯一的.那么,f 叫做 X 到 Y 的**一对一的映射**.上面的例子,就是 $\mathbf{R}-\{1\}$ 到 $\mathbf{R}-\{2\}$ 上的、一对一的映射.X 到 Y 上的一对一的映射又叫做**可逆映射**.

还是用上面的例子,对于 $\mathbf{R}-\{1\}$ 到 $\mathbf{R}-\{2\}$ 上的一对一的映

射 f,任意 $x\in\mathbf{R}-\{1\}$,都有 $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}\in\mathbf{R}-\{2\}$. 反过来,任意 $y\in\mathbf{R}-\{2\}$,都有 $x=\dfrac{y}{y-2}\in\mathbf{R}-\{1\}$,而且是唯一的,使得 $f(x)=y$. 于是,

$$g:\ y\longmapsto\frac{y}{y-2}$$

是 $\mathbf{R}-\{2\}$ 到 $\mathbf{R}-\{1\}$ 上的一对一的映射. 再举一个例子,

$$f:x\longmapsto x^3$$

是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的可逆映射. 于是,把像与像源相颠倒,又得到 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射

$$g:\ y\longmapsto\sqrt[3]{y}.$$

一般地说,假设 f 是 X 到 Y 的可逆映射. 那么,对于任意 $y\in Y$,存在唯一的 $x\in X$,使得 $f(x)=y$. 如果把上述 y 对应于 x,即 $y\longmapsto x$,就得到一个 Y 到 X 的映射. 它是由 f 派生出来的一个新的映射,叫做 f 的**逆映射**. 记成 f^{-1}. 前面的 g 就是 f 的逆映射,即 $g=f^{-1}$.

对于元素个数相同的有限集合,各种映射有下面的简单关系.

定理 1 *假设 X, Y 都是 n 个元素的集合,f 是 X 到 Y 的映射. 那么,下面的 3 个条件是等价的: 1) f 是到上的; 2) f 是一对一的; 3) f 是可逆的.*

证 事实上,只要证明前两个条件是等价的,命题就成立. 记 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$.

如果 f 是到上的. 那么 $\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}=Y$. 但是 Y 也是 n 个元素组成的,所以 $f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 是 n 个不同的元素. 即是说,不同的 n 个元素的 n 个像是不同的. 这说明,f 是一对一的.

反过来,如果 f 是一对一的,那么 $f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 是 Y 的 n 个不同元素. Y 只有 n 个元素,因而 $Y=\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$,$f$ 是到上的.

定理 1 证毕.

我们已经看到,映射是与两个集合相联系的.再举一个例子,$\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射

$$f: 2n \longmapsto n;\ 2n+1 \longmapsto 2n+1.$$

奇数集 $\mathbf{Z}_1$ 与偶数集 $\mathbf{Z}_2$ 都是 $\mathbf{Z}$ 的子集合.假若只看 f 在 $\mathbf{Z}_1$ 内的作用,它是 $\mathbf{Z}_1$ 到 $\mathbf{Z}$ 内的一对一的映射.假若只看 f 在 $\mathbf{Z}_2$ 内的作用,它是 $\mathbf{Z}_2$ 到 $\mathbf{Z}$ 内的一对一的映射.一般地说,假设 f 是 X 到 Y 的映射,$X_1 \subseteq X$.对于任意 $x \in X_1$,使得 $x \longmapsto f(x)$ 的映射 f_1,叫做 f 在 X_1 上的**限制**,它是 X_1 到 Y 的映射.上面例子中,f 不是一对一的,但 f 在 $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ 上的限制都是一对一的.

下面开始讨论两个映射,假设 f_1, f_2 都是 X 到 Y 的映射.如果对于任意 $x \in X$ 都有 $f_1(x) = f_2(x)$,就称 f_1 与 f_2 **相等**,记成 $f_1 = f_2$.

假设 X, Y, Z 是 3 个集合,f 是 X 到 Y 的映射,g 是 Y 到 Z 的映射.对于任意 $x \in X$,有 $f(x) \in Y$;对于 $f(x) = y \in Y$,又有 $g(y) = z \in Z$,即是

$$x \stackrel{f}{\longmapsto} y \stackrel{g}{\longmapsto} z.$$

那么,对于任意 $x \in X$,使得 $x \longmapsto z$ 的对应规则是 X 到 Z 的映射,叫做 f 与 g 的**乘积**,记成 $g \circ f$,或 gf.即

$$gf(x) = g[f(x)].$$

值得注意的,上面的 gf 存在,是 X 到 Z 的映射;而 fg 不一定存在,因为 $Z \cap X = \emptyset$ 时 fg 就不能定义.还要注意,即使 fg 与 gf 都存在,也不一定相等.譬如 $X = Y = Z = \mathbf{R}$ 时,假设 $f(x) = \sin x$,$g(x) = x^2$.那么 $gf(x) = \sin^2 x$,$fg(x) = \sin x^2$,可见 $fg \neq gf$.

有了映射乘积的概念之后,介绍一个判别可逆映射的方法.

定理 2 假设 f 是 X 到 Y 的映射,g 是 Y 到 X 的映射,而且

$$gf = \mathrm{id}_X,\quad fg = \mathrm{id}_Y,$$

那么,f 和 g 都是可逆映射,而且互为逆映射.

证 首先,由 $gf = \mathrm{id}_X$,可以得到:(1) g 是到上的:因为对于