

随动系统的统计计算

M. J. 别列格林 著

涂其桷、欧阳景正 译

科学出版社

1960

CALCUL STATISTIQUE DES SYSTÈMES ASSERVIS

par

MARC J. PELEGRIN

Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'air

Paris, 1953

內 容 簡 介

本书探討了随机扰动下的随动系統之計算方法。

作者証明了,在某些場合下(有用的訊号与噪声均是平稳随机函数时),利用最小均方誤差法則和輸入訊号的一些統計特性(自相关函数或能量譜),可以决定随动系統中修正网络的最优传递函数。其运算之簡便使得这个方法有可能被計算部門采用。

此外,在书中一般地探討了这样一种情况,即在随动系統的网络中引入继电器型的元件后,使得系統变为一个非綫性系統。根据輸入函数的一些統計数据以及继电器的开关時間常数,可以决定继电器輸出函数的譜函数。同时还导出了一些与继电器研究有关的結果。

为了要深入地研究自动駕駛的計算問題,必須測量出大气的湍流。作者提出了一个方法,利用这个方法,根据計算出来的空气运动速度的自相关函数,可以得到大气的“湍流譜函数”。

本书原著是法文,譯本是按 1957 年苏联外文出版社出版的俄譯本(Статистический расчет следящих систем)譯出的。

本书的对象是从事自动調節方面工作的科学工作者、工程师、研究生和高年級大学生。

随 动 系 統 的 統 計 計 算

[法] M. J. 別列格林 著

涂其例、欧阳景正 譯

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1960 年 3 月第 一 版

书号: 2122 字數: 149,000

1960 年 3 月第一次印刷

开本: 787×1092 1/27

(京) 0001—6,500

印张: 6 24/27

定价: 0.86 元

俄文譯本序言

这一本书的中心内容是研究随动系统的修正迴路。作者特别着重飞机的自动駕駛仪以及一些特殊用途的仪器。在这些研究中討論了上述的、意义重大的問題的各个方面。其所取得的结果不仅有着实际的价值，而且可以作为进一步探討的立足点。

H. 維納 (Wiener) 和李郁榮曾經发明过一个办法，可以确定一种过滤器的传递函数，这种过滤器能够最好地消除迭加在消息上的噪声(这儿所指的消息其形式并不能預先确定，它和噪声均同属于一种随机函数，对于这种函数我們只知道一些統計的性質¹⁾)。M. 別列格林发展了这一理論，把它应用来研究随动系统。根据他所作的分析，可以使得計算过程較之用維納的方法簡單得多，而且証明了解的唯一性定理。別列格林进一步又研究了非綫性系统，对这一个困难的問題作了两章的討論。他所采用的深入細致而又概括一般的观点，使得他所作的初步分析足以解决由于繼电器所引起的非綫性这一重要的問題。

书中所敘述的理論研究工作，标志着在这些問題的理論探討方面的一个极为显著的推进。然而这些理論研究的付諸应用，却产生了各式各样的問題；M. 別列格林对于这些問題同样沒有放过。他所提出的解决方案使他的創造性获得了荣誉。

事实上在所有的实际工作中，都要对一些原始的实验数据进行統計分析；这些数据乃是所研究的随机函数的“记录”。进行这些分析的时候，如果缺乏具有高度計算能力的计算机，那是不可能完成的。作者在使用“統計学計时器”时援引了一些原始的概念，

1) 关于这方面的俄文文献可参看：B. B. 索洛多夫尼可夫 (Солодовников) 著“自动调节系统的統計动力学引論 (Введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования)”，M.—Л., 1952——俄文編者按。

这些概念无疑是十分有趣的。

另一方面,当我们计算自动驾驶的问题时,所依据的“记录”显然要和那些描写自然界大气湍流的随机函数发生关系。M. 别列格林曾经系统地进行过许多试验来研究大气的湍流。这些工作,正如我们所看到,建立了一个有效的方法。对于这些方法必须逐步地加以采用。

从上所述,可见本书的内容是非常的宽广,而这些研究工作也证明了作者作为一个理论家与实验家的高度水平。这一本书,帮助了我们理解由于我们目前知识水平所限而未能理解的一些困难问题,因而不能不引起人们的重视。我想读者们将会和我们一样,希望作者继续研究这一个具有重大意义的课题。

Ж. 别列 (Пepe) 院士

目 录

俄文譯本序言	i
引論	1
第一章 随动系統和維納定理	4
1.1. 綫性常系数系統的传递函数	4
1.1.1. 綫性系統的定义	4
1.1.2. 傅里叶变换	4
1.1.3. 諧和分析	5
1.1.4. 复平面中的傅里叶变换	6
1.1.5. 拉普拉斯变换	7
1.1.6. 有关随动系統的一些定义	7
1.1.7. 随动系統的两种类型	9
1.1.8. 随动系統的传递函数	11
1.1.9. 随动系統的各种传递函数	13
1.2. 随动系統的穩定問題, 穩定的古典定义与統計定义	13
1.2.1. 古典定义	13
1.2.2. 相位超前网络	14
1.2.3. 附語	18
1.2.4. 迴路输出的能量	20
1.2.5. 随机訊号輸入时的穩定判据	20
1.3. 关于諧和分析的一些注記	25
1.4. 維納理論簡述	27
1.4.1. 問題的提出	27
1.4.2. 方程的导出	28
1.4.3. 維納-何甫方程的解	29
第二章 綫性随动系統传递函数之确定	31
2.1. 問題的提出	31

2.1.1. 前言	31
2.1.2. 計算的准則	33
2.1.3. 随动系統的各种綫路	34
2.1.4. 修正环路的传递函数	36
2.2. 普遍情况	37
2.2.1. 方框綫路图与符号(图19)	37
2.2.2. 方法的本質	37
2.2.3. 方程的建立	38
2.2.4. 均方誤差为最小的条件	41
2.2.5. 普遍情况下方程式(2.35)解的唯一性	48
2.2.6. 通解	49
2.3. 随动系統的情况	52
2.3.1. 由普遍情况导出的一个特殊情况	52
2.3.2. 极点在坐标原点时的情况	53
2.3.3. 类似于維納-何甫方程的一个方程式	53
2.3.4. 解的唯一性	54
2.3.5. 方程式(2.76)的解	55
2.3.6. 例: 通解与极限过渡	56
2.3.7. 同一例題的直接解法	61
2.3.8. 結語	62
第三章 关于平穩随机扰动下的繼电器之研究	63
3.1. 有关繼电器应用方面的一些注記	63
3.1.1. 一些定义	63
3.1.2. 繼电器的各种应用范围	63
3.1.3. 繼电器的灵敏限	64
3.1.4. 繼电器的非綫性	66
3.2. 极化繼电器	67
3.2.1. 前注	67
3.2.2. 問題的提出	67
3.2.3. 可以略去繼电器的時間常数时的情况	69
3.2.4. 繼电器的時間常数不能忽略时的情况	70
3.2.5. 一般情况	71

3.3. 差动继电器	77
3.3.1. 輸入电压的一般形状	77
3.3.2. 继电器的方程	78
3.3.3. 继电器的能量灵敏限	82
3.3.4. 实验分析	83
3.3.5. 差动继电器的近似解	83
3.3.6. 一种重要的特殊情况	85
3.3.7. 实验结果	86
3.4. 继电器的时间常数	86
3.4.1. 同时接通 100 个继电器的研究	86
3.4.2. 多次接通一个继电器之研究	94
第四章 关于非綫性系統計算方法的一些注記	98
4.1. 綫性与非綫性系統	98
4.1.1. 綫性系統	98
4.1.2. 非綫性的各种类型	98
4.1.3. 系統的綫性范围图	100
4.2. 关于計算非綫性系統的一些注記	104
4.2.1. 問題的提出	104
4.2.2. 例	105
4.2.3. 非綫性系統的平均特性	110
4.2.4. 綜合随动系統时非綫性元件的引进	112
4.2.5. 备注	114
4.3. 用来作統計研究的一些目前設計出的計算裝置 的描述	116
4.3.1. 基本資料	116
4.3.2. 自相关函数器	117
4.3.3. 統計学用計时器	118
第五章 外界扰动. 大气湍流的研究	126
5.1. 飞机飞行时所受到的扰动	126
5.1.1. 非大气性质的扰动	126
5.1.2. 大气扰动	127
5.1.3. 陣风随机函数的譜函数	129

5.1.4. 关于模拟装置的一些評述	130
5.2. 研究湍流时空間和时间寬度的比例尺	131
5.2.1. 問題的提出	131
5.2.2. 空間寬度的比例尺	133
5.2.3. 时间比例尺	135
5.3. 所提出的方法的本质	137
5.3.1. 問題的当前情况	137
5.3.2. 目前所采用的方法的評价	138
5.3.3. 作者所采用的湍流測量方法	139
5.3.4. 有关所做的試驗的总評述	140
5.4. 研究大气湍流的各种实验方法	144
5.4.1. 第一个方案(第四到第九試驗)	144
5.4.2. 第二个方案	146
5.4.3. 第三个方案	147
5.5. 热絲作为敏感元件所得的結果	148
5.5.1. 发送器的选择和校正	148
5.5.2. 发送器的布置图	150
5.5.3. 結果的概述	153
5.5.4. 曲綫的逐点研究	160
5.6. 湍流的譜函数	160
5.6.1. 自相关函数和譜函数	160
5.6.2. 大气湍流系数	165
5.6.3. 互相关性	166
5.6.4. 在空間上的平穩性	166
結束語	167
附录 I 在正弦輸入訊号下相位超前迴路的情况	168
附录 II	173
参考文献	177

引 論

本书是根据李郁荣教授所写关于“消息传递之統計理論”¹⁾的
稿件编写而成的。

书中最基本的概念吻合于H. 維納的理論, 认为被传递的消息
不是某个确定的函数, 而是属于消息的一个集合或类集合, 并且又
认为所有消息均可用同一的自相关函数来表征。

当我们要求研究一个承受“噪声”扰动的系統时, 采用統計学
的观点就变得非常必要了。

我们发现, 随动系統的一些問題, 在大多数的場合下, 均与这
一类問題极为接近。但是, 当我们引用維納-李的理論²⁾进行計算
时, 却由于其繁复冗长, 阻碍着我們在这一領域內引用他們的理
論。

然而, 事实却非如此。采用这些理論来确定綫性随动系統的
修正迴路时, 其計算过程可以非常簡單。

在本书中我們將举出带有数值計算的例子, 并且接連地用两
种方法来求解: 第一个方法是直接引用維納-李的“通訊”理論, 而
第二个方法却更切合“随动系統”的情况。

我們曾經試圖把这些結果推广到非綫性系統, 不过我們只对
一个继电器非綫性系統作过徹底的研究; 这一种非綫性系統, 在許
多系統中, 特别是在飞机的自动駕駛仪以及自动駕駛的受控对象
中, 几乎全都存在。只要知道驅動继电器的随机函数之一些統計
性質, 以及继电器閉合与开断的时间常数的平均值, 我們就能够确
定继电器輸出函数的譜函数。

在本书的一开始, 我們就指出, 要在实际上引用这些方法, 得

1) 1949—1950 年在美国麻省理工学院讲授的課程。

2) 在第一章末將敘述这个理論。

备有一些輔助的計算裝置。當我們要想根據隨機函數來求得某些需要的參數時，必須處理隨機函數的許多個“實現”（或者一個持續時間足夠長的實現），而這個工作是无法用人工來完成的。

除了一般通用的相關函數器之外，我們還做出了一些用來獲得某些必要的參量的儀器。

然而還有一些現象我們還未能深入理解，只能去找尋它的統計特性；而表征這些特性的參量又不十分明確；尤有甚者，連它的平穩性也只能靠直覺去判斷。大氣的擾動就屬於這一類型。因而我們必須首先弄清楚什麼是大氣的擾動，然後着手記錄一個或多個與大氣擾動有關的量，在時間上和在空間中去驗證它的平穩性，最後才求出它的能量譜。

書中有不少地方涉及到自動駕駛儀的問題。我們並不想緘口不談如何來確定自動駕駛儀所承受的擾動之譜函數。然而這一問題的繁複與困難迫使我們只能在此敘述研究大氣湍流的方法，以及介紹我們所取得的一些結果。

對於書中所述的各個問題，我們並不是分別無關地去對它們進行研究，而是認為它們都同一地屬於平穩隨機過程的範疇。這一個前提自然是十分重要的。因為，比如說，根據已知譜函數的平穩隨機輸入與擾動計算出來的綫性系統，可能在單位階步輸入時，其反應極壞¹⁾。

書中還討論了其他一些問題。比如，多個繼電器在同一時刻下接通時，以及一個繼電器作多次接通時，其觸點閉合時間之概率分布。對後一種情況所作的量測告訴我們：當繼電器安裝在振動的底板（特別是安裝在帶活塞發動機的飛機）上時，閉合時間的方差非常大，可能引起工作的不正常。

書中包含的範圍如此寬廣，以至無法把某些特殊問題的詳細分析與其綜合兼收並蓄。不過對於我們來說，對某些特殊問題（象自動駕駛問題）進行綜合，將會更為有用。鑑於隨機理論在這一領

1) 當然，在所指的平穩隨機函數中不包含單位階步函數，這一種隨機函數在第二章末的數值例子中將加以研究。

域中的应用所引起的广泛兴趣,这一种尝试的意义就很明白了;在这些领域中直到目前为止,几乎还是惟一地保守于运算分析,以及正弦扰动和“速度为16米/秒的典型扰动”¹⁾等方法上,而这些扰动与实际情况却有着极大的差别。

1) 规范 AIR 2004-C.

第一章

随动系統和維納定理

1.1. 綫性常系数系統的傳遞函数

1.1.1. 綫性系統的定义

如果一个系統是由任意阶綫性微分方程組所描述的話，則称之为綫性系統，这种系統的基本性質乃是可以施用迭加定理：如果 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 是系統的两个解，則 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 同样是它的解（ C_1 和 C_2 是常数）。

通常，特別是研究随动系統的时候，我們总把綫性系統理解为常系数微分方程所描述的系統。这种系統具有这样的一个优点，就是对它可以采用拉普拉斯变换。采用这种变换后，在大多数的場合中，只要通过一个相当簡單的計算，就可以求得系統穩定度的估值。

如果系統微分方程阶数高于二的話，則直接研究这些对時間的微分方程組必然导致繁瑣冗长的演算。一个系統的穩定与否，是首要解决的問題；它的解决归结为查明系統特征方程是否具有正实数根或实数部分为正的复根；为此，曾經提出过各种各样的法則（如罗斯法則、胡維茨条件），但其中沒有一个能够便利地应用到所有場合中。

1.1.2. 傅里叶变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.1)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.2)$$

一个具有有界变化的函数 $f(t)$, 按照 (1.2) 式定义出函数 $F(\omega)$. 又如果积分 (1.1) 存在的话, 那么这个积分在 $f(t)$ 连续的一切点上, 将重新产生原始函数 $f(t)$.

1.1.3. 譜和分析

假设我們取得了某个过程的记录. 所謂“对被记录的过程作譜和分析”的意思有必要把它詳細說明. 一般說来, 被记录的現象是在进行记录以前就已經存在, 并且记录完毕之后还在延續. 在这个过程中, 表征这个現象的数值都是不恆为零. 在进行譜和分析的时候, 我們认为这个记录是記下了某个周期过程的一个循环, 其周期长度乃相应于所用分析仪器的基綫¹⁾. 因此对已得到的记录进行譜和分析, 就意味着对某个周期过程进行譜和分析, 这个周期过程在一个周期内和我們所取得的记录相重合.

如果被记录的过程在开始记录之前和记录完毕之后并不存在 (即其数值为零), 那么我們可以計算它的傅里叶积分, 它将完全准确地表达出整个的过程 (记录以及其前后的零值).

反之, 如果在这时把被记录得的函数 $f(t)$ 展开为傅里叶級数的話, 那么, 級数的和只是在 $f(t)$ 的定义区間 (非零区間) 内代表函数 $f(t)$. 在区間 AB (如图 1) 之外, 如点 C , 級数将定义出一个函数 $f_1(t)$, 它等于曲綫 $f(t)$ 移动了一个整数時間区間以后的值, 这个時間区間相当于曲綫的周期.

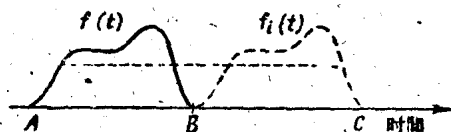


图 1

1) 帶有 Coradi 球的分析儀其基綫等于 360 或 400 毫米.

我們也可以把某个函数的一部分展成傅里叶級数, 这时候必須說明到底在哪个区段内这种展式有效.

1.1.4. 复平面中的傅里叶变换

为了要采用拉普拉斯变换, 我們需要在复平面上作傅里叶变换.

設 $f(t)$ 是在区段 $(-\infty, 0)$ 上恆为零, 而在区段 $(0, \infty)$ 上有有限变化的单值函数. 这时, 一般地說, 存在一个实数 c (比如說一个正数), 使得极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| e^{-c\tau} d\tau \quad (1.3)$$

有界.

对函数 $f(t)e^{-ct}$ 采用变换式(1.2), 我們得到

$$\int_0^{\infty} [f(t)e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt = F(c, \omega). \quad (1.4)$$

绝对收敛的区域是受囿于数集 c 的下极限 c_0 , 对于这个 c (1.3) 式有界.

反变换可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c, \omega) e^{jt\omega} d\omega &= f(t) e^{-ct}, \\ t &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

上列方程与不等式必須看作为一个不可分割的整体.

我們可以把(1.4)式写成:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c+j\omega)t} dt &= F(c + j\omega), \\ c &\geq c_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

此时反变换取如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(c + j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c + j\omega) &= f(t), \\ c &> c_0, \\ t &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

1.1.5. 拉普拉斯变换

令 $p = c + j\omega$ 为平面 p 上的复变数 (图 2). 此时确定收敛区域的条件为: $\mathcal{R}(p) > c_0$ ($\mathcal{R}(p)$ 表示数 p 的实部). 他一个条件, $t \geq 0$ 将被满足, 如果

当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$.

拉普拉斯变换方程可写成

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt &= F(p), \\ \mathcal{R}(p) &> c_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp &= f(t), \\ \mathcal{R}(p) &> c_0, \\ t &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

必须指出, 当 c_0 为负时, 可令 $\mathcal{R}(p) = 0$; 此时方程式 (1.8) 和 (1.9) 为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega); \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &= f(t), \\ t &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

1.1.6. 有关随动系统的一些定义

我们从功率的概念出发, 来引进随动系统的定义.

在一个系统中, 按照已知规律从能源取得的功率经受着调节, 使得被调节机构在一定的误差条件下 (如最小误差, 最小均方误差等等) 跟随着功率极小的主控作用 (讯号或消息), 则称这个系统是随动系统.

这个系统内各部分的详尽定义得用下列物理概念来解释.

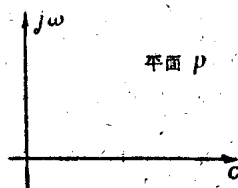


图 2

被調節机构在一般情況下是这样的系統，它具有質量、慣性、摩擦、彈性力與彈性聯結，無一能夠忽略。與被調節机构相聯的執行机构¹⁾，通常具有極大的慣性，有時甚至大於被調節机构的慣性。因此，這兩個机构組成的系統，其共振頻率無論何時均將低於100 赫，並且通常均在0.2至20 赫之間。這種現象常見於海軍及空軍的槍炮迴轉架、自動駕駛儀以及仿型機床的伺服机构中。

我們來研究一個由被調節机构與執行机构組成而且具有共振頻率為10 赫的系統。如果被調節量是被調節机构在每一瞬間的位置，則如所周知，在正弦擾動力的頻率達到共振頻率時，則系統的位置與正弦擾動力之間存在 180° 的相移。而且其“振幅頻率”特性曲線在這個頻率下也將有一個最大值。這個最大值可能很顯著，也可能不大顯著，要看具體系統而定。但無論如何，當擾動力的頻率接近共振頻率時，被調節机构位置的振幅與相位總是和理想的有所差異。在理想的情況下，振幅的比值為1，相移為0；而現在它們卻和擾動力的頻率有關²⁾。

我們量測出每一瞬間的誤差，並且用這個誤差函數驅動執行机构。這樣，系統就構成了一個閉合迴路，這就是隨動系統。實驗證明，對於一個已定的被調節系統，當具有閉合迴路時，其準確度與最大激勵頻率均將增大。

最後指出，我們總是經常把隨動系統看作為一個功率放大器。一個電話微音器輸出的平均功率為數毫瓦，而普通接收耳機所需功率僅為幾十微瓦，這兒功率水平被減低，因此這個系統不是隨動系統，儘管有許多元件（如修正迴路）和概念在這個開路系統與隨動系統之間都是共通的。

差減元件

除了與執行机构相聯的被調節机构之外，在任何一个隨動系統中，通常還有檢測器或比較机构。它可能明顯地表現為單獨的

- 1) 執行机构是直流電動機、兩相或三相交流電動機、旋轉式或推進式液壓發動機、氣動發動機、磁發動機、干式或磁液式離合器等等。嚙合機械與槓杆也屬於這類。
- 2) 對綫性系統而言。

环节，也可能被包含在許多其他环节之中。例如一个在移动槓桿上装有相位超前机械系统¹⁾的轉速測量器就是这个例子(图 3)。在

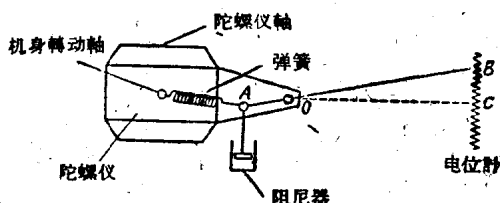


图 3

这个装置中，一个与机身联接的电位器，在其上有一个移动着的槓杆 AOB 在滑动，間接地记录飞机与直綫航道的偏离所引起的誤差。这个誤差是一个非常复杂的函数。根据計算并經過实验考証，这个装置的传递函数²⁾(在零初始条件下輸出函数的拉普拉斯变换与輸入函数的拉普拉斯变换之比)为：

$$\frac{1}{\varphi} = K \frac{p + 1}{p^2 + 2\xi p + \omega^2},$$

$$K \approx 5 \text{ 毫米/}8^\circ,$$

$$\omega^2 \approx 3600,$$

$$\xi \approx \text{从 } 0.1 \text{ 到 } 0.2,$$

$$l \text{——电位器移把的位移。}$$

在随动系统中有时也会逢到一些“修正系统”，作为一个单独的环节存在。这些环节上面已經說过，可能是电网络，也可能是机械装置。

随动系统也可以是多环的，而且常常很难把附属环路或内部环路与主要环路分开。

1.1.7. 随动系统的两种类型

这两种随动系统的差别是在于其所追随的輸入訊号性质不

1) 陀螺仪轉速指示器 E. C. A.

2) 传递函数定义于 1.1.8 节。