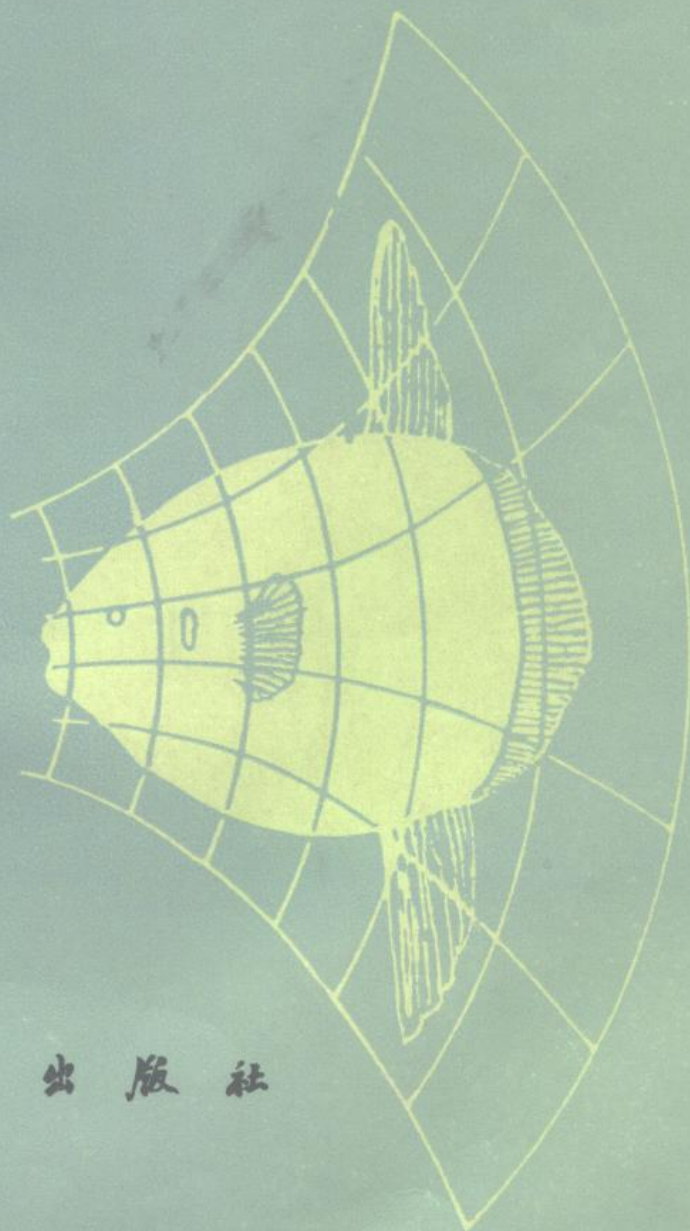
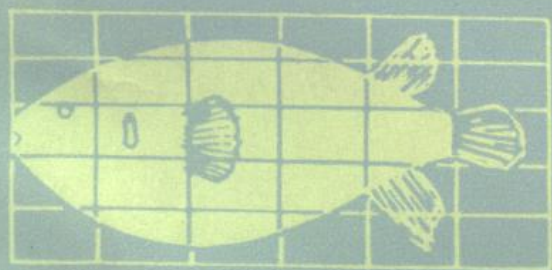


突变理论 及其在生物医学中的应用

赵松年 于允贤 编著



科学出版社

突变理论 及其在生物医学中的应用

赵松年 于允贤 编著



科学出版社

1987

8710703

内 容 简 介

突变理论是近十多年来创立并得到迅速发展的一个生物数学分支。在生态学、胚胎学、免疫学、脑功能、视觉系统信息处理、心理学、社会学等领域得到广泛的应用。它为研究生物科学中各种不连续的现象和建立模型提供了重要而有价值的理论与方法。为了使读者容易学习和掌握，本书前四章对突变理论的主要内容作了简明扼要的论述，后五章较详细地介绍了突变理论在生物科学和医学中的具体应用和建立模型的方法，第十章对突变理论的发展作了简短的回顾与展望。

本书可供生物数学、生物物理学和生物学其他专业的科研人员、大专院校师生和对生物数学有兴趣的人员阅读；也可作为医学、社会学、工程技术、物理学等专业的科技人员学习突变理论的参考书。

DS75/20

突 变 理 论 及其在生物医学中的应用

赵松年 于允贤 编著
责任编辑 王爱琳

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1987年6月第一版 开本：787×1092 1/16

1987年6月第一次印刷 印张：7 1/4

印数：0001—3,000 字数：163,000

统一书号：13031·3530

本社书号：5311·13—10

定价：1.80元

前 言

生物学是当代前沿科学之一，探索一种能描述生物界中普遍存在的不连续性态的理论并建立预测模型，是生物科学研究工作的重要目标之一，而突变理论则是这种探索的组成部分。

突变理论 [catastrophe theory, 也有人译为灾变理论，在地质学中都用灾变，但在数学、物理学方面用突变，这里用突变较为合适，它与遗传学中所称的突变 (mutation) 不同。] 是近十多年来创立并得到迅速发展的生物数学分支。它以拓扑学、奇点和分歧理论为基础，研究系统在平衡点的性态，揭示控制变量或控制因素在连续而渐变的过程中，引起系统状态变量发生突然变化的性质。

突变是生物学中一个普遍的基本现象，例如基因的突变、种群的演变、裂脑人的行为、神经疾病患者的情绪、决策过程、视觉的多稳态、胚胎发育等等，都包含突变性质，因此突变理论在描述所谓软科学（生物学、心理学和社会学）的各种特性方面，显示出它的特点并取得不少重要结果，从而使长期以来那些不连续的、突变的现象有了一种新的描述方法。突变理论所揭示的突跳、双稳态、滞后、发散、不可达性和多径性等特征，加深了人们对生物学中突变现象本质的认识。

突变理论的研究工作和学术活动在国外十分活跃，研究范围已扩展到工程学、物理学、社会学和心理学等许多领域，但国内对这一理论的介绍还很少，因此本书在内容的选择上带有入门的性质，理论与应用并重，数学的引用深入浅出，简明易懂，推理详细，便于自学，使从事生物学研究工作的广大科技人员容易学习和掌握突变理论的要点，并在自己的工作中加以应用，从而为推动这一学科在国内的发展作出贡献。

自然界充满了突然变化的现象。当人们经历了象地震那样大规模的灾难性突变的震撼之后，对于由逐渐变化的因素引起突然变化的后果就有了切身体会。

由法国数学家René Thom创立的突变理论已经证明：当控制因子不多于四个时，基本突变类型不超过七种。在了解自然界的各种突变现象时，这一理论会使读者获得许多新奇而有用的知识与方法。

虽然本书是以生物学和医学的应用为主，但书中所举的例子对于各种专业的读者来说，都不难理解，因此本书既可作为生物数学方面的参考书，供大专院校应用数学专业和有关专业的师生阅读，也可作为控制论、信息论等专业的科技人员学习突变理论的参考书。

由于作者水平所限，书中谬误之处在所难免，恳请读者指正。在写作过程中，得到中国科学院生物物理研究所汪云九、姚国正等同志的热心关注并提出宝贵意见；熊小芸同志给予作者多方面的支持和协助；王燕敏同志在病中为本书绘制插图，在此谨向他们表示衷心的感谢。

作 者

一九八五年十月二十六日于北京

目 录

前言

第一章 概述	(1)
§ 1. 进攻与退却模型.....	(1)
§ 2. 突变机构.....	(4)
§ 3. 从动力学系统到突变理论.....	(10)
第二章 势函数的局部特性	(12)
§ 1. 二次型.....	(12)
§ 2. 势函数的表示类型.....	(14)
§ 3. 临界点.....	(18)
§ 4. 向量空间与拓扑空间.....	(18)
§ 5. 映射.....	(19)
第三章 结构稳定性	(22)
§ 1. 势函数的稳定性.....	(22)
§ 2. 扩展.....	(23)
§ 3. 确定.....	(26)
§ 4. 扩展的一般规则.....	(28)
§ 5. 剖分引理.....	(29)
§ 6. 余维数.....	(31)
§ 7. 同构.....	(32)
第四章 基本突变分类	(33)
§ 1. 奇点.....	(33)
§ 2. 平衡曲面.....	(34)
§ 3. 基本突变的几何形状.....	(36)
§ 4. 突变模型的基本特征.....	(51)
第五章 医学中的突变模型	(54)
§ 1. MBD病的数学描述.....	(54)
§ 2. 神经性厌食症.....	(58)
第六章 脑模型与拓扑特性	(63)
§ 1. 脑活动的节律与振荡.....	(63)
§ 2. 脑模型中的Duffing方程.....	(64)
§ 3. 模型的应用.....	(67)
§ 4. 视知觉的双稳态.....	(69)
§ 5. 深度知觉的反转.....	(70)
第七章 Lotka-Volterra方程	(72)

§ 1. Lotka-Volterra 方程.....	(72)
§ 2. 蛋白质合成的开关模型.....	(75)
§ 3. 相变.....	(78)
§ 4. “捕食者-被食者” 种群的突变模型.....	(79)
第八章 B 细胞的免疫学模型.....	(82)
§ 1. 抗体与免疫.....	(82)
§ 2. 免疫机制.....	(83)
§ 3. 突变模型.....	(85)
第九章 发育与形态.....	(90)
§ 1. 发育过程.....	(90)
§ 2. 相似性与差异性.....	(92)
§ 3. 形态形成与结构单元.....	(96)
§ 4. 波、界面与突变模型.....	(99)
第十章 回顾与展望.....	(101)
§ 1. 争论.....	(101)
§ 2. 自然界中的突变规律.....	(102)
§ 3. 展望.....	(103)
参考文献.....	(105)
索引.....	(106)
1. 内容索引.....	(106)
2. 突变理论专业术语.....	(109)
3. 人名索引.....	(110)

第一章 概 述

突变理论是在微分方程的定性理论、分歧理论、奇点理论和拓扑学的基础上创立和发展起来的。为了使读者对突变理论有一个全面的了解，又不致引用太深的数学知识，在第一章首先通过一个典型的例子——进攻与退却模型，说明突变理论的基本概念，然后叙述势函数的局部特性和拓扑学的映射、同构、向量空间与拓扑空间等内容，这也是学习突变理论所必须掌握的基本知识。然后介绍结构稳定性、扩展、确定和剖分引理，最后讨论突变的分类和基本特性。

§ 1. 进攻与退却模型

进攻与退却是行为心理学研究的课题之一，也是人类乃至动物在其生命活动中非常普遍的行为方式。人类的行为哪怕是十分简单的表现方式，也都涉及到思维与复杂的心理活动；而动物的某些行为则比较容易描述，特别是象进攻与退却行为，不仅能够定性地描述，而且还能够进行测量。所以选择动物的进攻与退却行为做为具体例子来说明突变理论的基本原理是很恰当的，它不至于由于例子本身的复杂性而使想要说明的理论自身变得模糊起来。

下面将要详细研究的例子是关于狗的进攻与退却模型。

Konrad Lorenz在《论攻击》一书中指出，进攻行动主要受两个互相矛盾的因素或倾向所制约：发怒和恐惧。对于狗来说这两种因素具有外观表现，因而在某种程度上可以测量出来。一只狗的发怒和张嘴、露齿程度有关，而恐惧程度可以从它的耳朵向后倾斜的多少反映出来。利用面部器官的表情变化作为狗的情绪状态的度量指标，在一定的程度上可以描述狗的行为变化与情绪变化之间的关系。

若用 α 表示发怒程度的变化，用 β 表示恐惧状态的变化，在直角坐标系中所观测到的狗的发怒与恐惧的面部器官变化如图1-1所示。

在两个互相矛盾的因素中如果只考虑出现一个因素的情况，狗的反应比较容易预测。例如狗发怒而不害怕，那么某种进攻行动比如发动攻击就是可以预料的。反之，当狗受到惊吓而未发怒，进攻行动就不大可能发生，狗多半会逃走。如果没有刺激，也就是说既无发怒又无惊吓，那么预测也很简单：狗将处于某种中间状态，同进攻和逃跑都不相干。

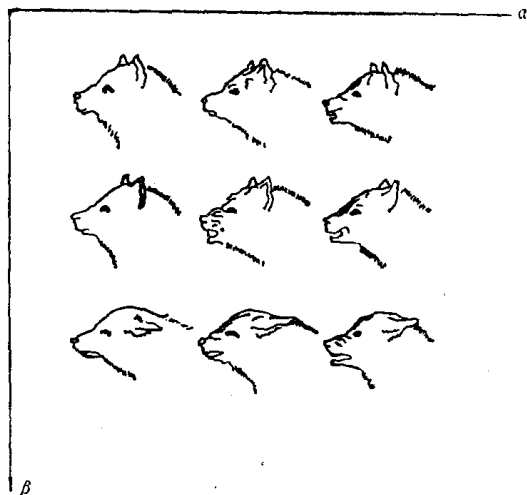


图1 1 (引自参考文献[8])

如果狗受到威胁刺激同时又发怒又恐惧，那它的行为状态将怎么样呢？这两个因素所产生的后果是直接冲突的，用行为状态在控制因素作用下连续变化的模型来预测，两种刺激所产生的效果将相互抵消而回到中间状态，这意味着狗对由威胁而产生的两种相反的控制因素没有反应。而实际情况并非如此，这恰好说明连续的简单模型的缺陷，因为在外界刺激下，中间状态出现的可能性最小。当一只狗又发怒又受惊吓时，采取两种极端行为的概率都很高：可能攻击也可能逃跑，但不可能保持无动于衷。

如果用 x 表示狗从进攻到逃跑的行为状态结果，则 x 便是控制因素 α 与 β 的函数： $x = \alpha - \beta$ 。在三维空间里， x 与 α ， β 的关系如图1-2所示，显然 x 处于一个光滑的斜面上，它

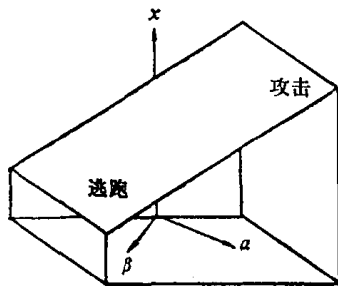


图1-2

不能从本质上说明狗从进攻行为转变为逃跑行为所经历的咆哮、中立、回避等一系列中间过程，尤其不能预测当 α 与 β 同时增加时， x 的真实状态。采用最大似然性来分析这个问题，将会得到一个崭新的结果。实际上 x 的最大似然分布与 α 、 β 的关系，可以分以下四种情况：

- (1) 只有发怒，行为的最大似然性是攻击。
- (2) 只有惊吓，行为的最大似然性是逃跑。
- (3) 既没有发怒，也没有惊吓，这时的行为最大似然性是中立状态。

(4) 既发怒又恐惧，行为的最大似然性或者是攻击或者是逃跑，虽然选择哪一种行为不能预测，但可根据发怒与恐惧的刺激程度来估计狗采取攻击或逃跑的可能性。换句话说，最大似然性分布曲线为双模态。

以上四种情况如图1-3所示。

考虑到双模态这一特点而重新建立的模型称作突变模型，以后将可以看到它既可由突变理论导出，也可以将 α 、 β 与 x 输入到计算机，画出 x 随 α 、 β 变化的三维模型。

从突变理论导出的模型的优点在于能估计出二个值的概率分布，也能够预测在特殊情况下狗将选择什么行动，预测的结果较好地符合实际情况。

建立模型时，首先要在水平面上画出相互垂直的两个轴，表示发怒和恐惧这两个控制因素，相应的平面称为控制面 C 。度量狗的行为状态的第三轴垂直于控制面 C 并称为行为状态轴。我们假定狗的各种可能行为方式都平滑而连续地排列着，如起初是仓惶逃跑，继而退缩、回避、漠然、惊叫、直到咆哮进攻。假定在行为轴上对最有进攻性的行为取最大值，最少进攻性的行为取最小值。由发怒与恐惧的各种组合形成控制面 C 上的每一个点对应着一种可能的行为，将这些行为点连成一个光滑曲面就是行为状态曲面，如图1-4所示。这个曲面有一

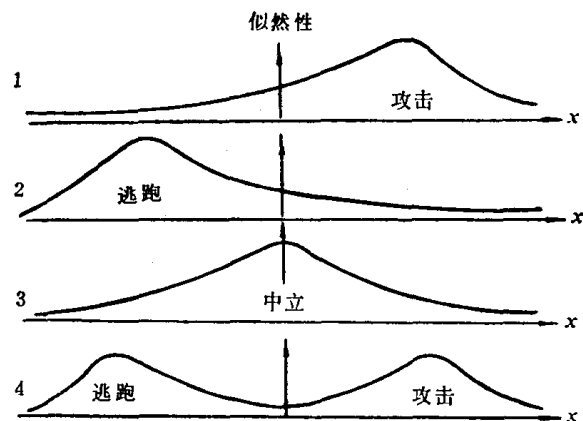


图1-3

种整体性倾斜：从发怒占优势的高数值区域到恐惧占优势的低数值区域。除此而外，突变理论指出，曲面 M 中间一定还有一个光滑的折叠部分（在图1-4中用阴影部分表示），造成从曲面的前部到后部的夹缝，呈现出折叠三叶汇合的奇点，这是突变模型最明显的特点。至于这第三叶是如何形成的，我们将在后面章节中详细说明。

现在让我们仔细地根据突变模型，来预测狗的行为状态与外界刺激结果的关系。

行为曲面 M 的顶叶与底叶上的所有点表示狗的最大可能行为，而中间叶则表示最小可能的行为，为了说明使用突变模型预测行为，必须研究狗对改变刺激的反应。假设狗的初始情绪状态是中间的，可以用控制面上的原点表示，这时在行为曲面上标出的狗的行为也是中间的。如果外界刺激增强了狗的怒气而不使之害怕，那么在行为曲面上标出一个光滑地向上改变的行为方向，趋向于进攻态势；当发怒增强到足够程度，狗便会采取攻击行为。如果狗的恐惧开始增强，而发怒仍然保持高水平，那么控制面上表示这些情态的点一定向中央部分伸展过去，而表示行为的点也跟着移动，但因为行为曲面在这一区域不很陡，行为变化很轻微，所以狗仍保持着进攻态势。

当恐惧继续增强，最后行为点必然达到折叠的边缘，顶叶经过向下折叠以后其效果已经消失，只要稍许增加一点恐惧，顶叶就不起作用了。行为态势将直接取决于突变模型的底叶，它表示完全不同的行为方式。顶叶的进攻态势已经不可能了，代之而来的是突然从进攻转变为驯顺态势，因此可以预计，一只发怒的狗如果逐渐恐惧起来，随着恐惧程度的增加将放弃攻击而突然逃跑，所以人们也常把这种突变方式叫作逃跑突变，在图1-4中对应于 A 轨迹曲线。同样，一只受到惊吓的狗被激怒以后，行为方式将沿着 B 轨迹移动，直到底叶消失为止，然后突跳到顶叶，随着发怒程度的增加狗不再畏缩而突然发动攻击，这就是进攻突变。

最后，一只狗若最初处于中间状态，后来同时受到激怒与惊吓，其行为方式将会怎样呢？行为点开始在原点上，如图1-4 S 点及曲线（3）所示。在相互对立的两种刺激作用下，狗的行为轨迹是一段指向奇点的直线，到达奇点时行为曲面发生折叠，行为点究竟移动到顶叶变为进攻状态还是移动到底叶变为驯顺，则严格取决于发怒和恐惧的数值，也取决于狗在达到奇点以前的行为态势，这时一个很小的刺激会产生一个很大的行为变化，这个现象叫作发散。行为状态曲面在控制面上的投影是一条尖形曲线，由于这个尖顶标志着行为出现分歧的区域边界，因而称作分支集，很明显，发散的行为轨迹在控制面 C 上的投影是相互靠得很近的、几乎是平行的直线，但分别穿过分支集左右两条边界曲线，这与底叶、顶叶上的行为轨迹（4）相对应。

通过对狗的进攻与退却的分析而建立的突变模型，给我们展示了许多新奇的特性，

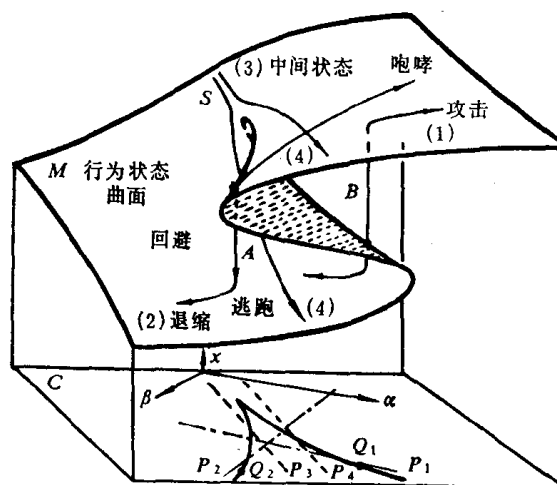


图1-4

这种描述不连续的、发散现象的数学方法使人们在认识不连续现象的本质方面又前进了一步。

在这里构造模型时，是基于一个本质上带有决定性的假设，即狗的行为能够从反映在面部器官表情上的变化而预测。选择发怒和恐惧作为控制因素是具有普遍性的。但是，也有一些例外情形，如狗的偷袭行为。这时就很难观测到狗的面部情绪状态的变化，更谈不上对它的行为进行预测，这说明上述模型在描述复杂的生命活动时，显得简单化了。

在介绍了突变理论的基本内容之后，我们还要回过头来再次分析狗的进攻与退却模型，那时读者将不难看出突变模型在揭示突变现象的本质方面所取得的成功和表现出理论上的预测能力。

§2. 突 变 机 构

狗的进攻与退却模型，实际上是作为突变理论具体应用的实例来介绍的。在这一节里将介绍一个有名的突变机构，它是由 E. C. Zeeman 在 1969 年提出的。虽然有许多突变机构值得介绍和研究，但 Zeeman 突变机构非常简单，分析时不需要复杂的数学推演，而其动力学特性却能很好地说明突变理论的基本思想，因此下面将详细进行讨论。

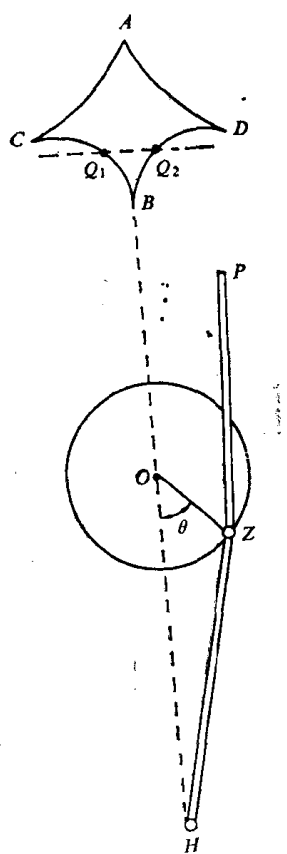


图1-5 (引自参考文献[8])

Zeeman 突变机构如图1-5所示。用实线标出的圆纸质盘可以绕着O点任意旋转，圆盘直径为1个长度单位， $\overline{PZ}$ 与 $\overline{HZ}$ 均为橡皮筋，未拉伸长度均为1个长度单位，圆盘通过转轴固定于纸质底板上， $\overline{OH}$ 长度为2个单位，Z点固定在圆盘的边缘上，P点为控制端可在底板上自由移动。当P点连续而缓慢地移动时，Z点也相应地缓慢移动，但当P点移动到底板的某些特殊位置时Z点将发生突跳，如果让P点在圆盘平面上沿着各种不同方向作直线移动如图1-6所示，并标出Z点发生突跳时的位置，将可以看到突跳点形成了一个四边钻石形曲线ABCD（见图1-5），它实际上是P点沿各直线方向移动时形成的包络线，也是分支集。因为P点若在钻石曲线ABCD之外，圆盘（即Z点）只有一个稳定的平衡位置；P点若在钻石曲线ABCD之内，圆盘将有二个稳定的平衡位置，一个与Z在中线左边相对应，另一个与Z在中线右边相对应。在这二个平衡位置之间还存在第三个平衡位置，但它是不稳定的。如果让P点在钻石形曲线B点的邻域

（关于邻域的严格定义将在以后的章节给出）内移动，则可以看到平衡点对应于 θ 角的最小值，这说明平衡点是稳定的。

现在分两种情形来分析Zeeman突变机构的动力学特性。

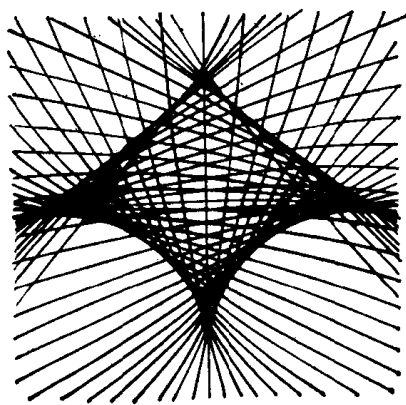


图1-6

(一) P 点沿中线移动的情形

设 OP 长度为 x , 突变机构简化如图1-7所示. 根据Hooke定律, 橡皮筋中存贮的能

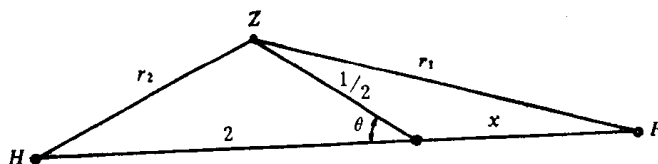


图1-7

量即势能与橡皮筋拉伸前后的长度增量之平方成正比, 即

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \mu [(r_1 - 1)^2 + (r_2 - 1)^2] \quad (1-1)$$

式中 r_1 与 r_2 为橡皮筋受拉伸时的长度, μ 为弹性模数. 显然, r_1 与 r_2 可以用下式计算

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + \frac{1}{4} + x \cos \theta \\ r_2^2 &= 4 + \frac{1}{4} - 2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

把 $\cos \theta$ 展开成Maclaurin级数

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (1-3)$$

取前三项代入式(1-2)可得

$$r_1^2 \doteq x^2 + \frac{1}{4} + x \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 \right) \quad (1-4)$$

$$r_2^2 \doteq \frac{17}{4} - 2 \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 \right) \quad (1-5)$$

即

$$r_1 \doteq \left[x^2 + \frac{1}{4} + x \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-6)$$

$$r_2 \doteq \left[\frac{17}{4} - 2 \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-7)$$

再通过Taylor级数展开式将上式化简

$$r_1 = (x + \frac{1}{2}) \left[1 - \frac{x\theta^2}{4(x + \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{16} \left(\frac{x}{3(x + \frac{1}{2})^2} - \frac{x^2}{2(x + \frac{1}{2})^4} \right) \theta^4 \right] \quad (1-8)$$

$$r_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{7}{108}\theta^4 \quad (1-9)$$

将 r_1 与 r_2 的表示式代入式(1-1)就得到势函数 $V(\theta)$ 的级数表示式

$$V(\theta) = \frac{1}{2}\mu \left\{ (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{3} - \frac{x(2x-1)}{2(2x+1)} \right] \theta^2 + \left[\frac{x}{24} - \frac{x}{12(2x+1)} + \frac{x^2}{2(2x+1)^3} + \frac{5}{108} \right] \theta^4 \right\} \quad (1-10)$$

势函数 $V(\theta)$ 不包含 θ 的线性项, 就是说 $\left. \frac{dV(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0, \pi} = 0$, 它表示当控制端沿中线移动时, θ 角或者为零或者为 180° , 直观判断可知前者对应于稳定的平衡点, 后者对应于不稳定的平衡点。

现在分析一下当 x 变化时, 平衡点是如何变化的。令式(1-10)中 θ^2 的系数为零, 即

$$\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{3} - \frac{x(2x-1)}{2(2x+1)} = 0 \quad (1-11)$$

或者

$$6x^2 - 7x - 2 = 0 \quad (1-12)$$

得

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{97}}{12}$$

负根表示至少有一根橡皮筋不受拉伸, 因此是无关紧要的。正根 $x \approx 1.40$ 对应于 B 点位置, 当 $\theta = \pi$ 时可求得 $x \approx 2.46$, 对应于 A 点位置。根据 $d^2V(\theta)/d\theta^2$ 的符号之正、负可以判断平衡点的性质, 为此将式(1-10)写成更普遍的表示式

$$V(\theta) = a + b\theta^2 + c\theta^4 \quad (1-13)$$

一阶与二阶导数分别为

$$V'(\theta) = 2b\theta + 4c\theta^3 \quad (1-14)$$

$$V''(\theta) = 2b + 12c\theta^2 \quad (1-15)$$

当控制点 P 位于 B 点下面且 θ 角很小时, $x < 1.40$, b 和 c 均为正值, 因此 $\theta = 0$ 时 $V'(\theta) = 0$, $V''(\theta) = 2b > 0$ 突变机构的势能为最低值, 平衡点是稳定的。当 P 点移至 B 点时, $x \approx 1.40$, $V(\theta)$ 的前三阶导数均为零, 但 $V(\theta)$ 的4阶导数 $V^{(4)}(\theta)$

$$\left(\frac{x}{24} - \frac{x}{12(2x+1)} + \frac{x^2}{2(2x+1)^3} + \frac{5}{108} \right) \Big|_{x=1.40} > 0$$

故平衡点仍然是稳定的。当 P 点移至 A 点时, $\theta = \pi$, $x \approx 2.46$, $b < 0$, $c < 0$, 因此 $V'(\theta) < 0$, 平衡点是不稳定的。当 P 点移入钻石形曲线内部时, $x > 1.4$, 因此 $b < 0$, 这时 $V'(\theta) = 0$ 有三个不同的实根, 即

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \sqrt{\frac{-b}{2c}}, \quad \theta_3 = -\sqrt{\frac{-b}{2c}}$$

将 $\theta_1 = 0$ 代入 $V'(\theta)$ 时得零, 而 $V''(\theta) = 2b < 0$, 故 θ_1 为不稳定平衡点, 将 θ_2 与 θ_3 之值代入 $V''(\theta)$ 时得正值 $(-4b)$, 故 θ_2 与 θ_3 是稳定的平衡点, 这与我们在前面通过直观分析得

出的结论是一致的。

(二) P 点在 B 点邻域内移动的情形

以 B 为原点, 设 P 点在 B 点的邻域内, 其坐标为 α, β , 如图1-8所示。

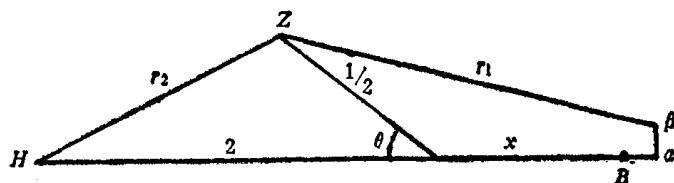


图1-8

此时 r_2 的计算公式仍如式(1-9)所示, r_1 的求解公式如下

$$r_1^2 = \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \beta\right)^2 + \left(x + \alpha + \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 \quad (1-16)$$

用Taylor级数展开式求出 r_1 的表示式再代入式(1-1), 取 θ 的四次项为止, 势函数 $V(\theta)$ 的级数表示式如下:

$$V(\theta) \doteq \frac{1}{2}\mu(a_0 + a_1\beta\theta + a_2\alpha\theta^2 + a_3\beta\theta^3 + a_4\theta^4) \quad (1-17)$$

其中各系数的近似值为

$$a_0 \sim 0.54, a_1 \sim 0.24, a_2 \sim 0.16, a_3 \sim -0.09, a_4 \sim 0.045$$

为了由这些运算得出普遍表示式, 需要作某些变换。首先, 适当选取弹性模量的单位使 θ^4 的系数归一化, 即 $\frac{1}{2}\mu a_4 = 1$, 这时势函数 $V(\theta)$ 可改写成下式

$$V(\theta) \doteq b_0 + b_1\beta\theta + b_2\alpha\theta^2 + b_3\beta\theta^3 + \theta^4 \quad (1-18)$$

为了消去 θ^3 项, 作变量代换

$$\theta = x - \frac{1}{4}b_3\beta \quad (1-19)$$

因为 θ^3 项中所含 x^3 项与 θ^4 项中所含 x^3 项均为 $b_3\beta x^3$, 但符号相反而使 x^3 项消去。其次, 改变坐标原点以消去势函数 $V(\theta)$ 中的常数项, 并引入新的变量 u 和 v , 则简化后的势函数普遍表示式可以写成

$$V(x) \doteq x^4 + ux^2 + vx \quad (1-20)$$

$$u = b_2\alpha, \quad v = b_1\beta \quad (1-21)$$

我们主要关心的是势函数 $V(x)$ 的临界点及其特性。而临界点由 $V(x)' = 0$ 决定, 根据式(1-20)可得

$$4x^3 + 2ux + v = 0 \quad (1-22)$$

很明显, 三次代数方程或者有一个实根、二个虚根; 或者有三个实根, 通过判别式可以确定根的性质。将方程(1-22)改写成下式

$$x^3 + 8\left(\frac{1}{6}u\right)x + 2\left(\frac{1}{8}v\right) = 0$$

或者

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \quad (1-23)$$

式中 $p = u/6$, $q = v/8$ 。从而判别式 $D = q^2 + p^3 = \frac{v^2}{8^2} + \frac{u^3}{6^3} = \frac{1}{27 \times 64}(27v^2 + 8u^3)$,

令 $\Delta = (27v^2 + 8u^3)$, 则有

$\Delta > 0$ 时, 方程 (1-22) 有一个实根;

$\Delta < 0$ 时, 方程 (1-22) 有一个三重根 ($p=q=0$ 时), 或者有二个根 (其中一个为重根);

$\Delta < 0$ 时, 方程 (1-22) 有三个实根.

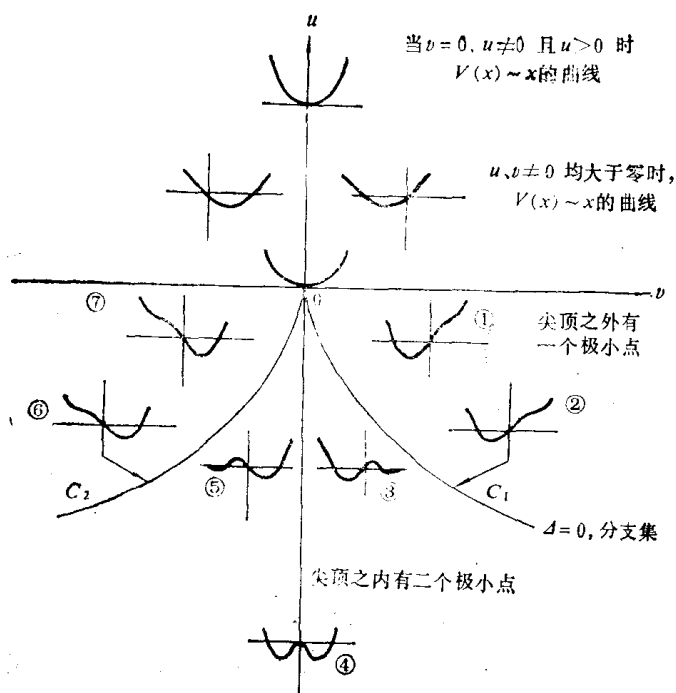


图 1-9

给定 u, v 的不同参数值, 在 $u-v$ 平面上对应于不同的 u, v 值画出势函数 $V(x)$ 随 x 而变化的曲线, 如图 1-9 所示. 因为 u, v 和 α, β 之间存在简单的变换关系 [见式 (1-21)], 所以图 1-9 实际上也表示了势函数 $V(\theta)$ 与参数 α, β 的相互关系. 图中 C_1 与 C_2 为分支集, 即三维曲面 $V(x)$ 在控制平面 $u-v$ 中的投影, 正如前面所分析的, 在钻石形曲线内部, 也就是分支集内部, $V(x)$ 有二个极小值与稳定的平衡点相对应, 有一个极大值与不稳定的平衡点相对应. 在分支集之外, 只有一个极小值对应于一个稳定点.

由方程 (1-20) 求分支集方程 $\Delta = 0$ 的方法, 除了判别式之外, 还有一种普遍而适用的方法. 已知势函数 $V(x, a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$, 分别求出一, 二, 三阶导数:

$$\text{临界点: } x^3 + ax + b = 0 \quad (1-24)$$

$$\text{二个折叠的非退化点: } 3x^2 + a = 0 \quad (1-25)$$

$$\text{三个折叠的非退化点: } 6x = 0 \quad (1-26)$$

然后按下面箭头所示流程求解

$$\text{式 (1-26)} \xrightarrow{\text{式 (1-25)}} x = 0 \xrightarrow{\text{式 (1-24)}} a = 0 \xrightarrow{\text{式 (1-24)}} b = 0 \quad (1-27)$$

势函数 $V(x; a=0, b=0) = x^4/4$ 在原点有一个三重非退化的临界点, 进而

$$\text{式 (1-25)} \xrightarrow{\text{式 (1-24)}} a = -3x^2 \xrightarrow{\text{式 (1-24)}} b = 2x^3 \quad (1-28)$$

从式 (1-28) 中消去 x 可以得出 a 与 b 的关系式

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}} &= x = \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1-29)$$

考虑到 $V(x)$ 与 $V(x, a, b)$ 只是系数不同, 将 $a=u/2$ 及 $b=v/4$ 代入式 (1-29) 则得

$$27v^2 + 8u^3 = 0$$

(1-30)

这与前面的判别式 Δ 完全一样.

根据动力学原理, 圆盘O总是旋转到使能量 $V(x)$ 趋于最小的位置. 由于转动部分存在磨擦而不会产生振荡, 控制参量缓慢变化时, 能量 $V(x)$ 的变化也是缓慢的. 当控制端P沿着图1-5所示的虚线从左向右运动时, 势函数 $V(x)$ 的能量变化序列如图1-10所示.

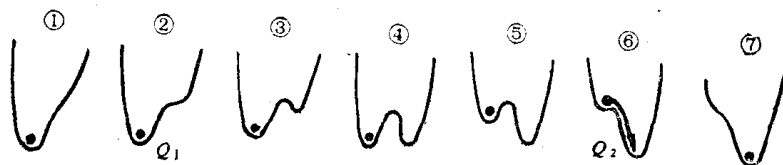


图1-10

示. 不难看出, $V(x)$ 的能量变化序列就是图1-9中 $u < 0$ 时不同 v 的势函数 $V(x)$ 曲线. 突跳发生在 Q_2 点, 反之当控制端P沿虚线从右向左移动时, 突跳发生在 Q_1 点, 这一特性就是滞后, 如图1-11所示.

最后再进一步研究由 (x, a, b) 或 (x, u, v) 空间确定的平衡超曲面 M 或突变流形的性态. 前面曾提到, a, b 或 u, v 是控制参量, 它们所在的平面是控制平面 C , x 是状态变量, 所在的空间叫状态空间或相空间, 其实都是指同一个问题.

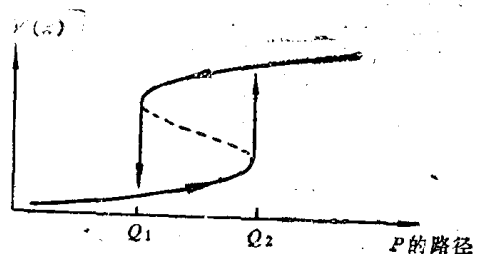


图1-11

由式(1-24)组成的平衡超曲面 M 如图1-12所示, 它在控制平面 C 上的投影是一种拓扑变换或映射, 用 f 表示则有

$$f: M \rightarrow C (R^3 \rightarrow R^2) \quad (1-31)$$

即

$$(x, a, b) \mapsto (a, b), (x \in M) \quad (1-32)$$

M 超曲面上的相点在折叠曲线边缘必然发生突跳, 并产生滞后现象, 这在图1-12中已很容易观察出来, 就不再赘述了.

需要指出的是, 图1-12只画出了所谓正则的尖顶突变, 还有二个所谓对偶尖顶突变没有画出. 由于Zeeman突变机构 $V(\theta)$ 的状态变量是转角 θ , 周期为 2π , 因此只需研究 $V(\theta)$ 在 θ 到 $\theta + 2\pi$ 之间变化时的性态即可. 这时平衡超曲面将由4叶折叠曲面以螺旋式连接而成, 它在控制平面上的投影便形成四边钻石形曲线.

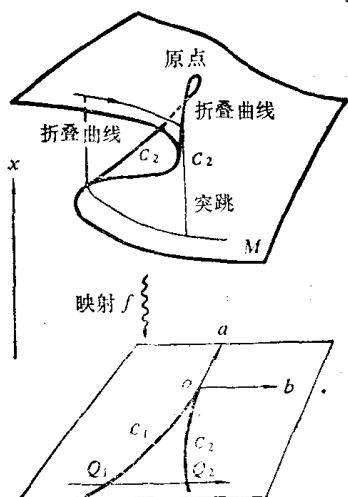


图1-12

至此, 我们已经比较详细地研究了Zeeman突变机构在平衡点附近的各种性态, 以及通过势函数 $V(\theta)$ 描述该机构的突跳与滞后现象, 显示了突变理论在解释突然变化的现象方面具有明显的优点.

§ 3. 从动力学系统到突变理论

自然界中存在着一类可以由微分方程描述的运动及变化过程, 由牛顿和Leibnitz发现和创立的微分法特别适合于连续而光滑的变化规律. 已为人们所熟知的例子举不胜举, 其中特别有名的例子有: 运动学三定律; 引力方程; Maxwell电磁波方程组和爱因斯坦的广义相对论场方程等. 这样的例子所描述的对象, 小至基本粒子, 大至天体运行, 它们的运动都严格地遵循精密的模型与数学公式.

在生物科学中, 已经建立了描述神经纤维活动的Hodgkin-Huxley微分方程组; 描述视觉感受器侧抑制特性的Hartline-Ratliff方程组; 在生物力学中还可以举出许多成功的例子.

无论是在物理学中, 还是在生物学中, 微分方程所描述的仅仅是连续变化与光滑变化的现象, 也就是说这些微分方程的解组必须是可微分的函数, 然而这些有规律、有很好性态的现象, 毕竟是很少的. 相反, 自然界与人类社会充满了突然变化和不可预测的事件, 这些现象都要求不可微分的函数.

突变理论正是适应上述需要而发展起来的, 它能描述由逐渐变化的力量或运动而导致突然发生变化的情形, 因而具有普遍意义.

此外, 突变理论还有效地将连续光滑的变化现象与突然的分散的现象联系起来, 以非常简洁优美的数学方法 (主要是拓扑学) 研究了上述两种变化的交界处的奇异性态, 显示了突变理论的启发性和预测性.

正因为突变理论所要解决的是连续变化中的突变现象, 因而必然与微分方程解的定性理论有关, 也与描述空间光滑曲面的拓扑学特性有关. 下面我们从描述一般动力学的方程组如何简化为突变模型的过程来说明突变理论的主要思想和基本方法.

若设一个 n 阶微分方程或 n 个一阶微分方程组在 R^N 空间内的解为 $\Psi_1(t, x; C_a)$, $\Psi_2(t, x; C_a)$, $\dots$, 而坐标 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$; 则有

$$F_i\left(\Psi_j, C_a, t, \frac{d\Psi_j}{dt}, \frac{d^2\Psi_j}{dt^2}, \dots, x_l, \frac{\partial\Psi_j}{\partial x_l}, \frac{\partial^2\Psi_j}{\partial x_l \partial x_m}, \dots, \int dx_l, \dots\right) = 0 \quad (1-33)$$

式中

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq l, m \leq N, \quad 1 \leq a \leq k \quad (1-34)$$

变量 x_l 和 t 分别表示空间坐标与时间坐标. 方程组的解 Ψ_j 完全描述了方程组的特性或系统的状态, 因此通常将 Ψ_j 称作状态变量. 式(1-33)与 k 个参数 C_a 有关, C_a 的变化可以影响或控制解 Ψ_j 的定性特性, 因此 C_a 通常称作控制参数.

直接求解式(1-33)来研究 Ψ_j 与 C_a 的关系是一件极其困难而无法进行的事, 必须对式(1-33)作一系列简化假设才有可能.

首先假设式(1-33)既不包含积分项和对空间坐标 x_l, x_m 的偏微分项, 也不包含空间坐标 x_l 项, 则式(1-33)简化为

$$F_i = F_i\left(\Psi_j, C_a, t, \frac{d\Psi_j}{dt}, \frac{d^2\Psi_j}{dt^2}, \dots\right) \quad (1-35)$$

其次假定式 (1-35) 中不包含高于一阶的时间导数, 同时一阶时间导数项可以单独出现在方程中, 则式 (1-35) 可以写成

$$F_i = \frac{d\Psi_i}{dt} - f_i(\Psi_j, C_a, t) \quad (1-36)$$

令 $F_i = 0$ 就得到所谓的“动力学系统”, 它仍然是难于求解的, 尚需作进一步简化. 假设方程 (1-36) 中 f_i 与时间 t 无关, 即所谓“自治动力学系统”, 当 $k \leq 4$ 时已获得了某些有用的结果. 在经典力学中 f_i 看作分力并假定可以从势函数导出

$$f_i = - \frac{\partial V(\Psi_j, C_a)}{\partial \Psi_i} \quad (1-37)$$

势函数 V 对 Ψ_i 的偏微分就是梯度, 因此式 (1-36) 可以改写成

$$F_i = \frac{d\Psi_i}{dt} + \frac{\partial V(\Psi_j, C_a)}{\partial \Psi_i} = 0 \quad (1-38)$$

同时将 F_i 称作梯度动力学系统, 式 (1-38) 也常写成下式

$$\dot{\Psi} = - \nabla_{\Psi} V \quad (1-39)$$

对梯度动力学系统已经作了大量研究, 取得了许多重要结果.

我们对 $d\Psi_i/dt = 0$ 的特殊情形特别感兴趣, 因为后面将会看到, 结构稳定的系统一般与时间 t 无关, 许多生物学现象也与时间 t 无关, $d\Psi_i/dt = 0$ 也许能描述这些现象的本质, 而特别把

$$\frac{\partial V(\Psi_j, C_a)}{\partial \Psi_i} = 0 \quad (1-40)$$

所描述的系统称作梯度动力学系统的平衡方程. 其解就是系统的临界点, 它的隐函数形式也确定了 R^n 空间的平衡超曲面 M .

研究势函数 $V(\Psi_j; C_a)$ 的平衡点 $\Psi_j(C_a)$ 如何随着控制参数 C_a 而变化的规律和 $V(\Psi_j; C_a)$ 与 Ψ_j, C_a 之间关系的理论, 就是突变理论的基本内容.