

报考硕士研究生

高等数学与线性代数 解 题 指 南

张永曙 主编

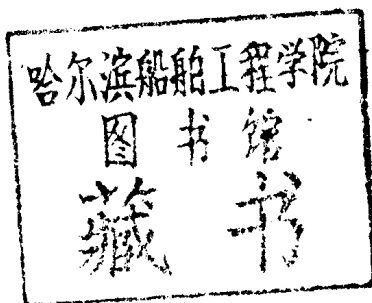
西北工业大学出版社

• 报考硕士研究生

高等数学与线性代数解题指南

张永曙 主编

张永曙 张 剑 符丽珍 合编



西北工业大学出版社

1992年8月 西安

(陕)新登字第 009 号

【内容简介】 为了帮助报考硕士研究生的考生全面系统地掌握高等数学与线性代数的解题方法和技巧, 提高解题能力, 编者根据多年来从事考前指导同学复习高等数学与线性代数积累的资料和经验及统考阅卷中的启示, 编写了此书。本书按照 1992 年全国工学硕士研究生入学考试大纲的要求, 全面系统地归纳总结了高等数学与线性代数中的各种解题方法和技巧。全书按考试大纲分章设节, 每节按内容或题型分项, 每一项介绍解题方法和技巧, 并通过例题阐述解题思路和方法的运用。对每个例题, 都先进行分析, 从分析中找出解答方法, 并随时指出解题过程中容易发生的错误。各节均配有适量的练习题, 并附有答案或解题提示。

报考硕士研究生
高等数学与线性代数解题指南

主 编 张永曙
责任编辑 刘彦信
责任校对 樊 力

西北工业大学出版社出版发行
(西安市友谊西路 127 号 邮政编码 710072)
各地新华书店经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN7-5612-0412-4 / G · 63

开本 787×1092 毫米 1/16 21 印张 503 千字
1992 年 8 月第 1 版 1992 年 8 月第 1 次印刷
印数: 1—10 000 册 定价: 8.65 元

前 言

全国每年都有数以 10 万计的应届大学本科毕业生和在职青年报考硕士研究生, 对于这些考生来说, 都希望能拥有对考试有帮助的复习指导和参考书。为此, 我们按照国家教委制定的 1992 年全国工学硕士研究生入学考试高等数学与线性代数考试大纲, 并根据多年来考前指导积累的资料和经验及统考阅卷中的启示, 编写了这本《解题指南》。本书共 14 章, 主要是系统地归纳、总结了高等数学和线性代数两门课程中的各种解题方法和技巧。全书按考试大纲分章设节; 每节按内容或题型分项; 每一项介绍解题方法和技巧, 并通过例题阐述解题思路和方法的运用, 且随时指出解题过程中容易发生的错误。各节还配备了多种题型(填空题、选择题、解答题、证明题等)的练习题, 并附有练习题的答案或提示。1987 年至 1992 年的研究生入学考试高等数学和线性代数的部分试题也收入到例题或练习题中。

本书第一、二、三、七、九、十、十一章由西北工业大学张永曙编写, 第四、五、六、八章由西安交通大学张剑编写, 第十二、十三、十四章由西北工业大学符丽珍编写, 由张永曙任主编。

本书除作为报考硕士研究生的高等数学和线性代数的复习指导书外, 还可供各类高等学校的教师和同学参考。

限于水平, 书中缺点和错误之处在所难免, 欢迎读者批评指正。

编 者

1992 年 5 月

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续	1
§ 1-1 一元函数	1
一、求函数的表示式和定义域的方法	1
二、求函数的值的方法	3
§ 1-2 函数的极限	5
一、求待定式极限的方法	6
二、求非待定式极限的方法	15
三、函数极限的局部逆问题的求解方法	15
四、函数极限综合题的求解方法	16
五、求分段函数的极限的方法	17
六、无穷小的阶的比较方法	18
§ 1-3 函数的连续性	20
一、函数的连续性讨论	20
二、确定函数的间断点及其类型	21
三、在闭区间上的连续函数的性质的应用	22
第二章 一元函数的微分学	26
§ 2-1 导数和微分	26
一、求函数的导数的基本方法	26
二、不同形式的函数的求导方法	30
三、求函数的高阶导数的方法	32
四、求函数的微分的方法	34
§ 2-2 导数和微分的应用	37
一、求平面曲线的切线和法线方程	37
二、研究函数的单调增减性	38
三、求函数的极值和最值	39
四、研究曲线的凹凸性	42
五、证明中值命题	43
六、证明方程的根的存在性与个数	47
七、证明不等式	49
八、求曲线的曲率、曲率半径和曲率圆	53

第三章 一元函数的积分学	58
§ 3-1 不定积分	58
一、求不定积分的三种基本方法	58
二、几种特殊类型的函数的积分法	64
§ 3-2 定积分	73
一、计算定积分的基本方法	73
二、奇偶函数的定积分算法	75
三、分段函数(含带绝对值的函数)的定积分的计算方法	75
四、证明定积分等式的方法	76
五、证明定积分不等式的方法	77
六、应用积分中值定理证明中值命题的方法	78
七、估计定积分的值和证明具体函数的积分不等式的方法	78
八、求由定积分定义的函数的极限、导数、极值和研究这种函数 的单调增减性的方法	79
九、广义积分的计算方法	81
§ 3-3 定积分的应用	86
一、定积分在几何上的应用	86
二、定积分在物理学上的应用	91
第四章 向量代数和空间解析几何	95
§ 4-1 向量代数	95
一、向量的基本概念及几何意义	95
二、向量的坐标表示	95
三、向量的运算	96
§ 4-2 空间解析几何	96
一、求方程问题	96
二、求距离与交角	98
第五章 多元函数的微分学	103
§ 5-1 多元函数的基本概念	103
一、二元函数的定义域与值域	103
二、二元函数的极限	103
三、二元函数的连续性讨论	105
§ 5-2 多元函数的微分法	107
一、求偏导数的基本方法	107
二、求复合函数的偏导数的方法	108
三、求隐函数的偏导数的方法	110
四、证明偏微分方程成立及转化方程	113

五、求全微分的方法	115
六、利用全微分进行近似计算	116
七、方向导数与梯度	116
八、多元函数的连续性、偏导数的存在性、方向导数的存在性 及可微性的讨论	117
§ 5-3 偏导数的应用	122
一、求空间曲线的切线与法平面方程	122
二、求曲面的切平面与法线方程	123
三、多元函数的泰勒展式	126
四、求多元函数的极值	127
五、多元函数极值的应用	129
第六章 多元函数的积分学	135
§ 6-1 重积分	135
一、重积分的计算	135
二、重积分在几何上的应用	140
三、证明积分等式的方法	145
四、证明积分不等式的方法	146
五、求由重积分定义的函数的极限、导数等	147
六、重积分在物理、力学上的应用	147
§ 6-2 曲线积分	156
一、对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）的计算	156
二、对坐标的平面曲线积分（第二类曲线积分）的计算	159
三、对坐标的空间曲线积分的计算	165
四、曲线积分的应用	167
五、两类曲线积分的关系	168
§ 6-3 曲面积分	170
一、对面积的曲面积分的计算	170
二、对坐标的曲面积分的计算	171
三、曲面积分的应用	174
四、曲面积分的证明题	174
§ 6-4 场论初步	176
一、基本概念、基本公式的测试形式	176
二、奥高公式、斯托克斯公式的应用	177
第七章 无穷级数	180
§ 7-1 常数项级数	180
一、判别正项级数的敛散性的方法	180
二、判别交错级数的收敛性的方法	182

三、判别任意项级数的收敛性的方法	183
四、关于常数项级数敛散性的证明题的证明方法	184
五、求收敛的常数项级数的和的方法	186
§ 7-2 幂级数	189
一、求幂级数的收敛半径和收敛域的方法	189
二、求幂级数在收敛域内的和函数的方法	191
三、利用幂级数的和函数求收敛常数项级数的和的方法	194
四、关于幂级数的敛散性的阿贝尔定理的应用	195
五、将函数展开成幂级数的方法	196
六、幂级数的应用	199
七、求一般函数项级数的收敛域的方法	200
§ 7-3 傅里叶级数	203
一、狄里克雷定理的应用	203
二、将函数在 $[-l, l]$ 上展成傅里叶级数的方法	203
三、将函数在 $[0, l]$ 上展成正弦级数或余弦级数的方法	205
四、利用函数的傅里叶级数展开式, 求收敛常数项级数的和的方法	207
五、其他情况举例	208
第八章 微分方程	213
§ 8-1 一阶微分方程	213
一、用变量分离法解方程	213
二、齐次方程的解法	215
三、全微分方程的解法	217
四、线性方程的解法	218
五、伯努利方程的解法	219
§ 8-2 可降阶的高阶微分方程	221
一、方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的解法	221
二、方程 $y'' = f(x, y')$ 的解法	221
三、方程 $y'' = f(y, y')$ 的解法	222
§ 8-3 高阶线性微分方程	223
一、高阶常系数齐次线性微分方程的解法	223
二、二阶常系数线性微分方程的解法	223
三、欧拉方程的解法	226
四、高阶常系数非齐次线性微分方程的解法	227
五、二阶线性方程的通解讨论	227
六、含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组的解法	228
七、微分方程的幂级数解法	230
八、二阶齐次线性微分方程的逆问题解法	231
九、求解积分微分方程	231

十、杂 例	232
§ 8-4 微分方程的应用	237
一、在几何上的应用	237
二、在物理上的应用	239

第二部分 线 性 代 数

第九章 n 行列式	242
一、计算 n 阶行列式的基本方法	242
二、计算 n 阶行列式的其他方法	245
三、证明行列式等式的方法	249
第十章 矩 阵	253
§ 10-1 矩阵的运算	253
一、矩阵的线性运算与乘法运算	253
二、求方阵的幂	254
三、关于矩阵运算的证明题举例	255
四、求与给定矩阵可交换的矩阵	256
§ 10-2 矩阵的逆阵	257
一、求矩阵的逆阵的方法	257
二、解矩阵方程	259
三、有关逆阵证明题的证明方法	261
四、方阵的行列式的计算	263
五、求分块矩阵的逆阵	263
§ 10-3 矩阵的秩	268
一、求矩阵的秩的方法	268
二、关于矩阵的秩的证明题举例	268
第十一章 向 量	270
§ 11-1 向量的运算	270
§ 11-2 向量组的线性相关性	270
一、把一个向量用一向量组线性表示的方法	270
二、判别向量组线性相关性的方法	272
三、向量组线性相关性的讨论	274
四、证明向量组线性相关或线性无关	275
五、向量组线性相关或线性无关的充要条件的证明方法	276
§ 11-3 向量组的秩	279
一、求向量组的秩与最大无关组的方法	279

二、关于向量组的秩的证明题举例	279
三、判别两向量组等价的方法	280
四、关于等价向量组的证明题举例	280
§ 11-4 向量空间	281
一、判断一个向量集合是否构成向量空间的方法	281
二、求向量空间的基底和维数的方法	282
三、求向量空间中的向量在给定基底下的坐标的方法	282
四、求 n 维向量空间的基变换和过渡矩阵	283
五、求 n 维向量空间中的向量在不同基底下的坐标变换公式	284
§ 11-5 正交向量组	285
一、已知向量空间的一个基, 求它的一个正交单位基的方法	285
二、已知向量空间的一个正交向量组, 求它的一个正交单位基的方法	286
第十二章 线性方程组	288
§ 12-1 n 阶线性方程组	288
一、解 n 阶线性方程组的克莱姆法则	288
二、 n 阶线性方程组的矩阵解法	289
§ 12-2 齐次线性方程组	290
一、齐次线性方程组恒相容 (有解)	290
二、齐次线性方程组解的性质	290
三、齐次线性方程组解的情况	290
§ 12-3 非齐次线性方程组	292
一、线性方程组有解的判别定理	292
二、非齐次线性方程组解的性质	292
三、非齐次线性方程组解的情况	293
§ 12-4 用初等行变换求解线性方程组	294
一、用初等行变换求解齐次、非齐次线性方程组	294
二、非齐次线性方程组的系数及自由项中含有待定参数时求解的讨论	297
第十三章 矩阵的特征值与特征向量	301
§ 13-1 矩阵的特征值与特征向量	301
一、矩阵的特征值与特征向量的概念	301
二、特征值与特征向量的求法	302
三、关于特征值与特征向量的逆问题的解法	303
§ 13-2 相似矩阵	305
一、相似矩阵的概念、性质	305
二、判断方阵与对角形矩阵相似的方法	307
§ 13-3 实对称矩阵的相似矩阵	308
一、用相似变换化实对称矩阵为对角形矩阵的方法	308

二、用正交变换化实对称矩阵为对角形矩阵的方法	309
三、正交矩阵的性质及有关证明	311
四、利用矩阵的对角化求方阵的幂	311
第十四章 二次型	314
§ 14-1 二次型及其矩阵表示	314
一、二次型及其矩阵表示	314
二、二次型的秩	314
§ 14-2 二次型的标准形	315
一、用配方法化二次型为标准形	316
二、用正交变换化二次型为标准形	317
§ 14-3 正定二次型与正定矩阵	320
一、正定矩阵的性质	320
二、正定二次型（或正定矩阵）的判别方法	321
三、二次型中含有待定系数时正定性的讨论	323

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试大纲：函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；反函数、复合函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；简单应用问题的函数关系的建立；数列极限的 ε - N 定义、函数极限的 ε - δ 定义和函数的左右极限；无穷小；无穷大；无穷小的比较；极限四则运算；极限存在的两个准则——单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）。

§ 1-1 一元函数

函数是高等数学的主要研究对象。这一部分内容，除了要熟悉考试大纲中有关函数的概念、表示法、特性，知道基本初等函数的性质和图形外，主要要掌握以下几个方面的解题方法和技巧。

一、求函数的表示式和定义域的方法

这里说的求函数的表示式，主要是指求复合函数的表示式，或者已知函数满足某一关系式求它的表示式，等等。求函数的表示式，主要涉及函数记号的运用，所以一定要了解函数记号的意义，并能灵活地运用。求函数的定义域重点是掌握求复合函数的定义域的方法。具体地有以下几种情形：

(一) 已知 $f(x)$ ， $\varphi(x)$ 的表示式求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 的表示式

方法：用 $\varphi(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 或用 $f(x)$ 替换 $\varphi(x)$ 中的 x ，便得 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 的表示式。

【例 1.1】 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，求 $f[f\{f(x)\}]$ 及其定义域。

【解】 由于 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ， $x \neq -1$ ，所以

$$f\{f(x)\} = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x, \quad x \neq -1, \quad f(x) \neq -1$$

但 $f(x)$ 不可能等于 -1 , 所以 $f\{f(x)\}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

$$f[f\{f(x)\}] = \frac{1-x}{1+x} = f(x), \quad \text{定义域为 } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

【例 1.2】 已知 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f(x-2)$, $f[f(x)]$.

$$\text{【解】} \quad f(x-2) = \begin{cases} 1+x-2, & x-2 < 0 \\ 1, & x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1+f(x), & f(x) < 0 \\ 1, & f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x < -1 \\ 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

(二) 已知 $f[\varphi(x)]$ 的表示式, 求 $f(x)$ 的表示式

方法: 这是情形 (一) 的反问题. 求解的一般方法是作代换, 即令 $\varphi(x) = t$, 解出 $x = \varphi^{-1}(t)$, 求出 $f(t)$ 再将 t 换成 x 即得 $f(x)$ 的表示式. 由于要从 $\varphi(x) = t$ 反解 x , 有时很复杂, 如果采用某种特殊技巧, 往往可使原问题的求解变得简单.

【例 1.3】 已知 $f(\ln x) = x^2(1 + \ln x)$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $\ln x = t$, 解得 $x = e^t$, 于是原式成为 $f(t) = e^{2t}(1+t)$, 即 $f(x) = e^{2x}(1+x)$.

【例 1.4】 设 $f\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + 3$, 求 $f(x)$.

【解】 若令 $\sin x + \frac{1}{\sin x} = t$, 反解 x 较为复杂, 注意到所给关系式的特点, 可将其变形为

$$f\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + 1$$

由函数记号的意义, 即得 $f(x) = x^2 + 1$.

(三) 已知 $f[\varphi(x)]$ 的表示式求 $f[\psi(x)]$ 的表示式

方法: 这种情形实际上是前两种情形的综合. 方法是按情形 (二) 由 $f[\varphi(x)]$ 求出 $f(x)$, 再按情形 (一) 由 $f(x)$ 求出 $f[\psi(x)]$.

【例 1.5】 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(1 + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 $f(\sqrt{x})$.

【解】 这里 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $\psi(x) = \sqrt{x}$. 先由 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的表示式求 $f(x)$. 为此, 采用特殊技巧, 把 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的表示式表为 $\frac{1}{x}$ 的函数:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2(1 + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + 1}\right)$$

故 $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$, 即有 $f(\sqrt{x}) = \frac{1}{x} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{x} + 1}\right)$

(四) 已知 $f(x)$, $f[\varphi(x)]$ 的表示式求 $\varphi(x)$ 的表示式及其定义域

方法: 一方面已知 $f[\varphi(x)]$ 的表示式, 另一方面又可由 $f(x)$ 求出 $f[\varphi(x)]$ 的表示式, 令二者相等, 即可解得 $\varphi(x)$ 的表示式.

【例 1.6】 已知 $f(x) = 2 \ln x$, $f[\varphi(x)] = \ln(1 - \ln x)$, 求 $\varphi(x)$ 的表示式及其定义域.

【解】 由 $f(x) = 2 \ln x (x > 0)$ 有 $f[\varphi(x)] = 2 \ln \varphi(x) (\varphi(x) > 0)$, 又 $f[\varphi(x)] = \ln(1 - \ln x)$, 令二者相等得

$$2 \ln \varphi(x) = \ln(1 - \ln x)$$

即有 $\varphi^2(x) = 1 - \ln x$, 由于 $\varphi(x) > 0$, 故得 $\varphi(x) = \sqrt{1 - \ln x}$, 其定义域为 $(0, e)$.

(五) 已知 $f(x)$ 满足某关系式求 $f(x)$ 的表示式

由于函数 $f(x)$ 满足的关系式可以是各种各样的, 所以这种情形的求解方法也是多种的, 需视具体情况而定.

【例 1.7】 设对一切实数, $f(x)$ 满足关系式

$$2f(x) + f(1-x) = x^2$$

求 $f(x)$ 的表示式.

【解】 所给关系式的左端含有 $f(x)$ 与 $f(1-x)$, 若二者互换, 即令 $x = 1-t$ 代入所给关系式, 得

$$2f(1-t) + f(t) = (1-t)^2 \text{ 即 } 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$$

从所给关系式与上式消去 $f(1-x)$, 即前者乘 2 减去后者, 便得

$$3f(x) = 2x^2 - (1-x)^2 = x^2 + 2x - 1$$

故得

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1).$$

此题的解法可称为代换法.

上面总结了五种求函数的表示式的方法. 它们都不涉及函数的导数、积分及级数、微分方程等知识. 后面这种情形将在以后有关的章节中讨论.

二、求函数的值的方法

如果已给出函数 $f(x)$ 的具体分析表示式, 要求 $f(x)$ 在其定义域内某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 这是比较简单的. 这里主要考虑函数的分析式子未具体给出时求函数值的方法.

【例 1.8】 设 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}} (a > 1)$, 且 $f(\lg a) = \sqrt{10}$, 求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

【解】 这里已给出了 $f(x)$ 的具体表示式. 由 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}$ 得 $f\left(\frac{3}{2}\right) = a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = a$. 另

由条件 $f(\lg a) = a^{\lg a - \frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ 得方程 $2 \lg^2 a - \lg a - 1 = 0$. 由于 $a > 1$, $\lg a > 0$, 解前方程得 $\lg a = 1$, 故 $a = 10$ 即 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 10$.

【例 1.9】 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^{2t}$, 求 $f(\ln 2)$.

【解】 这里函数 $f(x)$ 是由极限定义的. 为求 $f(\ln 2)$, 先求出 $f(x)$ 的具体表达式.

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{t}{x}}\right)^{\frac{t}{x}}\right]^{2x} = e^{2x}$$

故
$$f(\ln 2) = e^{2 \ln 2} = 4$$

【例 1.10】 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{\ln x} f(t) dt = \ln(1+x^2)$; 求 $f(0)$.

【解】 这里函数 $f(x)$ 为变上限积分的被积函数. 为求 $f(0)$, 先求出 $f(x)$ 的表示式.

将所给等式两边对 x 求导, 得

$$f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{即有} \quad f(\ln x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

故
$$f(0) = f(\ln 1) = 1$$

本节重点是掌握上面两类问题的求解方法, 其他如判别两个函数是否相同 (当两个函数各自的对应法则相同, 定义域相同, 则两个函数相同), 确定函数的奇偶性 (根据定义确定), 求函数的最小周期等方法, 为节省篇幅, 这里就省略了.

练 习 题

填空题:

1. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (1989)①

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$. (1990)

3. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 则 $f[f\{f(x)\}] = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = 2x + 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{其他处,} \end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 $z = 2x + y - 1 + f(x - y)$, 且已知当 $y = 0$ 时, $z = x^2$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 $f(e^x + 1) = e^{2x} + e^x - 1$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答题:

①本书中例题或练习题后括弧内的数, 如1989, 均指该年硕士研究生入学考试题.

7. 已知 $f(\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{|x|}$ ($x \neq 1$), 求 $f(x)$ 及其定义域.

8. 已知 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$, 求 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)$.

9. 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

10. 已知 $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x$, 求 $f(x)$.

11. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 求 $f(7)$. (1988)

12. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ ($x > 0$), 求 $f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

选择题: ①

13. 在下面四对函数中, 相同的是

(A) $f(x) = |x+1|$, $g(x) = |x|+1$;

(B) $f(x) = 2\ln(1-x)$, $g(x) = \ln(1-x)^2$;

(C) $f(x) = \sqrt{(1-x)^2} + x$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1; \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$;

(D) $f(x) = x-2$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.

答()

14. 下列四个函数中为偶函数的是:

(A) $f(x) = x^3 + x^{-\frac{1}{3}}$;

(B) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(C) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \sin x, & x < 0; \\ x^2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$;

(D) $f(x) = \frac{x(e^x - 1)}{e^x + 1}$.

答()

练习题答案或提示

1. $x-1$. 2. 1. 3. $f(x)$. 4. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} + 1, & a \leq x \leq b \\ 1, & \text{其他处.} \end{cases}$ 5. $(x-1)^2$.

6. $x^2 - x - 1$. 7. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($0 < |x| < 1$). 8. $1 + \cos x$. 9. $\sqrt{\ln(1-x)}$

$(-\infty < x \leq 0)$. 10. $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{x} - 2x\right)$. 11. $\frac{1}{12}$. 12. $\frac{1}{2}\ln^2 2$. 13. C. 14. D.

§ 1-2 函数的极限

函数的极限 (包括数列的极限) 理论是高等数学的理论基础, 这一节, 除了要熟悉考试

① 本书练习题中的选择题都为单项选择题.

大纲中所列各项内容外,重点是掌握求函数极限的方法。由于数列的极限可看作是函数的极限的一种特殊情形,又从六年来全国工学硕士研究生入学考试数学试题内容看,没有关于数列极限方面的题,因此,在这里主要归纳总结求函数极限的方法。为了使内容集中,我们把属考试大纲第二部分内容的罗必塔法则也放在这一节。

函数的极限,按自变量的变化趋势的不同,可分为六种情形:

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); & (2) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x); & (3) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ (4) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x); & (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); & (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \end{array}$$

其中(1), (4)两种情形是基本的。

如果从函数的变化情况看,则可分为两种类型:(1) 待定式的极限;(2) 非待定式的极限。下面我们按后一种分类法,归纳总结求函数极限的方法。

一、求待定式极限的方法

待定式极限有 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 等七种类型。其中前两种类型是基本的。

(一) 求 $\frac{0}{0}$ 型待定式极限的基本方法

如果 $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = 0$, 则称 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型待定式极限。若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型待定式极限,这表明函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有成为零的公因式。所以,求这类极限的基本思想是设法化去 $f(x)$ 与 $g(x)$ 成为零的公因式。具体有以下一些基本方法:

1. 将分子分母分解因式,约去成为零的公因式再应用极限四则运算

【例 1.11】 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ 。

【解】 这是 $\frac{0}{0}$ 型待定式的极限。

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - x + 1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x+1} = 1$$

2. 将分子分母有理化(或部分有理化),约去成为零的公因式再应用极限四则运算

【例 1.12】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ 。

【解】 这是 $\frac{0}{0}$ 型待定式的极限,这表明分子分母有成为零的公因式,但无法用分解因式的方法约去公因式,办法是将原分子分母有理化。

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}$$