报考硕士研究生

高等数学与线性代数解题指南

张永曙 主编

西北工业大学出版社

· 报考硕士研究生

高等数学与线性代数解题指南

张永曙　主编

张永曙　张　剑　符丽珍　合编

西北工业大学出版社
1992年8月　西安

(陕)新登字第 009 号

【内容简介】 为了帮助报考硕士研究生的考生全面系统地掌握高等数学与线性代数的解题方法和技巧，提高解题能力，编者根据多年来从事考前指导同学复习高等数学与线性代数积累的资料和经验及统考阅卷中的启示，编写了此书．本书按照 1992 年全国工学硕士研究生入学考试大纲的要求，全面系统地归纳总结了高等数学与线性代数中的各种解题方法和技巧．全书按考试大纲分章设节，每节按内容或题型分项，每一项介绍解题方法和技巧，并通过例题阐述解题思路和方法的运用．对每个例题，都先进行分析，从分析中找出解答方法，并随时指出解题过程中容易发生的错误．各节均配有适量的练习题，并附有答案或解题提示．

报考硕士研究生
高等数学与线性代数解题指南
主　　编　张永曙
责任编辑　刘彦信
责任校对　樊　力
*
西北工业大学出版社出版发行
(西安市友谊西路 127 号　邮政编码 710072)
各地 新华书店 经销
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN7-5612-0412-4／G・63
*
开本 787×1092 毫米　1／16　21 印张　503 千字
1992 年 8 月第 1 版　　1992 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—10 000 册　　定价：8.65 元

前　言

全国每年都有数以 10 万计的应届大学本科毕业生和在职青年报考硕士研究生，对于这些考生来说，都希望能拥有对考试有帮助的复习指导和参考书。为此，我们按照国家教委制定的 1992 年全国工学硕士研究生入学考试高等数学与线性代数考试大纲，并根据多年来考前指导积累的资料和经验及统考阅卷中的启示，编写了这本《解题指南》。本书共 14 章，主要是系统地归纳、总结了高等数学和线性代数两门课程中的各种解题方法和技巧。全书按考试大纲分章设节；每节按内容或题型分项；每一项介绍解题方法和技巧，并通过例题阐述解题思路和方法的运用，且随时指出解题过程中容易发生的错误。各节还配备了多种题型（填空题、选择题、解答题、证明题等）的练习题，并附有练习题的答案或提示。1987 年至 1992 年的研究生入学考试高等数学和线性代数的部分试题也收入到例题或练习题中。

本书第一、二、三、七、九、十、十一章由西北工业大学张永曙编写，第四、五、六、八章由西安交通大学张剑编写，第十二、十三、十四章由西北工业大学符丽珍编写，由张永曙任主编。

本书除作为报考硕士研究生的高等数学和线性代数的复习指导书外，还可供各类高等学校的教师和同学参考。

限于水平，书中缺点和错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1992 年 5 月

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第一部分　高 等 数 学

第一章　函数、极限、连续

考试大纲：函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；反函数、复合函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；简单应用问题的函数关系的建立；数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义、函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义和函数的左右极限；无穷小；无穷大；无穷小的比较；极限四则运算；极限存在的两个准则——单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）。

§1-1　一元函数

函数是高等数学的主要研究对象。这一部分内容，除了要熟悉考试大纲中有关函数的概念、表示法、特性，知道基本初等函数的性质和图形外，主要要掌握以下几个方面的解题方法和技巧。

一、求函数的表示式和定义域的方法

这里说的求函数的表示式，主要是指求复合函数的表示式，或者已知函数满足某一关系式求它的表示式，等等。求函数的表示式，主要涉及函数记号的运用，所以一定要了解函数记号的意义，并能灵活地运用。求函数的定义域重点是掌握求复合函数的定义域的方法。具体地有以下几种情形：

（一）已知 $f(x)$，$\varphi(x)$ 的表示式求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 的表示式

方法：用 $\varphi(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 或用 $f(x)$ 替换 $\varphi(x)$ 中的 x，便得 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 的表示式。

【例 1.1】　已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f[f\{f(x)\}]$ 及其定义域。

【解】　由于 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq -1$，所以

$$f\{f(x)\}=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=x,\ x\neq -1,\ f(x)\neq -1$$

但$f(x)$不可能等于-1，所以$f\{f(x)\}$的定义域为$(-\infty,\ -1)\bigcup(-1,\ +\infty)$。

$$f[f\{f(x)\}]=\frac{1-x}{1+x}=f(x),\ \text{定义域为}(-\infty,\ -1)\bigcup(-1,\ +\infty)$$

【例 1.2】 已知$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求$f(x-2)$，$f[f(x)]$。

【解】 $f(x-2)=\begin{cases}1+x-2, & x-2<0\\ 1, & x-2\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x-1, & x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0\\ 1, & f(x)\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & x\geqslant -1\end{cases}$$

（二）已知$f[\varphi(x)]$的表示式，求$f(x)$的表示式

方法：这是情形（一）的反问题。求解的一般方法是作代换，即令$\varphi(x)=t$，解出$x=\varphi^{-1}(t)$，求出$f(t)$再将t换成x即得$f(x)$的表示式。由于要从$\varphi(x)=t$反解x，有时很复杂，如果采用某种特殊技巧，往往可使原问题的求解变得简单。

【例 1.3】 已知$f(\ln x)=x^2(1+\ln x)$，求$f(x)$。

【解】 令$\ln x=t$，解得$x=e^t$，于是原式成为$f(t)=e^{2t}(1+t)$，即$f(x)=e^{2x}(1+x)$。

【例 1.4】 设$f\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}+3$，求$f(x)$。

【解】 若令$\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=t$，反解$x$较为复杂，注意到所给关系式的特点，可将其变形为

$$f\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^2+1$$

由函数记号的意义，即得$f(x)=x^2+1$。

（三）已知$f[\varphi(x)]$的表示式求$f[\psi(x)]$的表示式

方法：这种情形实际上是前两种情形的综合。方法是按情形（二）由$f[\varphi(x)]$求出$f(x)$，再按情形（一）由$f(x)$求出$f[\psi(x)]$。

【例 1.5】 设$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2(1+\sqrt{x^2+1})$，求$f(\sqrt{x})$。

【解】 这里$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，$\psi(x)=\sqrt{x}$。先由$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的表示式求$f(x)$。为此，采用特殊技巧，把$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的表示式表为$\dfrac{1}{x}$的函数：

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2(1+\sqrt{x^2+1}\quad)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}+1}\right)$$

故 $\quad f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$，即有 $f(\sqrt{x})=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)$

（四）已知 $f(x)$，$f[\varphi(x)]$ 的表示式求 $\varphi(x)$ 的表示式及其定义域

方法：一方面已知 $f[\varphi(x)]$ 的表示式，另一方面又可由 $f(x)$ 求出 $f[\varphi(x)]$ 的表示式，令二者相等，即可解得 $\varphi(x)$ 的表示式。

【例 1.6】 已知 $f(x)=2\ln x$，$f[\varphi(x)]=\ln(1-\ln x)$，求 $\varphi(x)$ 的表示式及其定义域。

【解】 由 $f(x)=2\ln x(x>0)$ 有 $f[\varphi(x)]=2\ln\varphi(x)(\varphi(x)>0)$，又 $f[\varphi(x)]=\ln(1-\ln x)$，令二者相等得

$$2\ln\varphi(x)=\ln(1-\ln x)$$

即有 $\varphi^2(x)=1-\ln x$，由于 $\varphi(x)>0$，故得 $\varphi(x)=\sqrt{1-\ln x}$，其定义域为 $(0, e)$。

（五）已知 $f(x)$ 满足某关系式求 $f(x)$ 的表示式

由于函数 $f(x)$ 满足的关系式可以是各种各样的，所以这种情形的求解方法也是多种的，需视具体情况而定。

【例 1.7】 设对一切实数，$f(x)$ 满足关系式

$$2f(x)+f(1-x)=x^2$$

求 $f(x)$ 的表示式。

【解】 所给关系式的左端含有 $f(x)$ 与 $f(1-x)$，若二者互换，即令 $x=1-t$ 代入所给关系式，得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2 \text{即} 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$$

从所给关系式与上式消去 $f(1-x)$，即前者乘 2 减去后者，便得

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2=x^2+2x-1$$

故得 $$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x+1)$$

此题的解法可称为代换法。

上面总结了五种求函数的表示式的方法。它们都不涉及函数的导数、积分及级数、微分方程等知识。后面这种情形将在以后有关的章节中讨论。

二、求函数的值的方法

如果已给出函数 $f(x)$ 的具体分析表示式，要求 $f(x)$ 在其定义域内某点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，这是比较简单的。这里主要考虑函数的分析式子未具体给出时求函数值的方法。

【例 1.8】 设 $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}(a>1)$，且 $f(\lg a)=\sqrt{10}$，求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$。

【解】 这里已给出了 $f(x)$ 的具体表示式。由 $f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$ 得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=a$。另

由条件 $f(\lg a)=a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ 得方程 $2\lg^2 a-\lg a-1=0$。由于 $a>1$，$\lg a>0$，解前方程得 $\lg a=1$，故 $a=10$ 即 $f\left(\frac{3}{2}\right)=10$。

【例 1.9】 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{2t}$，求 $f(\ln 2)$。

【解】 这里函数 $f(x)$ 是由极限定义的。为求 $f(\ln 2)$，先求出 $f(x)$ 的具体表达式.

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{t}{x}}\right)^{\frac{t}{x}}\right]^{2x}=e^{2x}$$

故
$$f(\ln 2)=e^{2\ln 2}=4$$

【例 1.10】 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{\ln x}f(t)dt=\ln(1+x^2)$；求 $f(0)$。

【解】 这里函数 $f(x)$ 为变上限积分的被积函数。为求 $f(0)$，先求出 $f(x)$ 的表示式。

将所给等式两边对 x 求导，得

$$f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2x}{1+x^2}\quad 即有 f(\ln x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$$

故
$$f(0)=f(\ln 1)=1$$

本节重点是掌握上面两类问题的求解方法，其他如判别两个函数是否相同（当两个函数各自的对应法则相同，定义域相同，则两个函数相同），确定函数的奇偶性（根据定义确定），求函数的最小周期等方法，为节省篇幅，这里就省略了。

练 习 题

填空题:

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x)=$______。(1989)①

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$______。(1990)

3. 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，则 $f[f\{f(x)\}]=$______。

4. 设 $f(x)=2x+1$，$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & 其他处,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=$______。

5. 设 $z=2x+y-1+f(x-y)$，且已知当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则 $f(x)=$______。

6. 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x-1$，则 $f(x)=$______。

解答题:

①本书中例题或练习题后括弧内的数，如1989，均指该年硕士研究生入学考试题。

7. 已知 $f(\sqrt{1-x^2})=\frac{1}{|x|}(x\neq 1)$，求 $f(x)$ 及其定义域。

8. 已知 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$，求 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)$。

9. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

10. 已知 $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=4x$，求 $f(x)$。

11. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，求 $f(7)$。(1988)

12. 设 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt(x>0)$，求 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$。

选择题: ①

13. 在下面四对函数中，相同的是

(A) $f(x)=|x+1|$，$g(x)=|x|+1$；

(B) $f(x)=2\ln(1-x)$，$g(x)=\ln(1-x)^2$；

(C) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}+x$，$g(x)=\begin{cases}1, & x<1\\ 2x-1, & x\geqslant 1\end{cases}$；

(D) $f(x)=x-2$，$g(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$。 答(　　)

14. 下列四个函数中为偶函数的是:

(A) $f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$； (B) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(C) $f(x)=\begin{cases}-x^2+\sin x, & x<0\\ x^2+\sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$； (D) $f(x)=\frac{x(e^x-1)}{e^x+1}$。 答(　　)

练习题答案或提示

1. $x-1$. 2. 1. 3. $f(x)$. 4. $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{b-a}+1, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & \text{其他处。}\end{cases}$ 5. $(x-1)^2$.

6. x^2-x-1. 7. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. 8. $1+\cos x$. 9. $\sqrt{\ln(1-x)}$ $(-\infty<x\leqslant 0)$. 10. $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{x}-2x\right)$. 11. $\frac{1}{12}$. 12. $\frac{1}{2}\ln^2 2$. 13. C. 14. D.

§1-2　函数的极限

函数的极限（包括数列的极限）理论是高等数学的理论基础，这一节，除了要熟悉考试

①本书练习题中的选择题都为单项选择题。

大纲中所列各项内容外，重点是掌握求函数极限的方法。由于数列的极限可看作是函数的极限的一种特殊情形，又从六年来全国工学硕士研究生入学考试数学试题内容看，没有关于数列极限方面的题，因此，在这里主要归纳总结求函数极限的方法。为了使内容集中，我们把属考试大纲第二部分内容的罗必塔法则也放在这一节。

函数的极限，按自变量的变化趋势的不同，可分为六种情形：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$；　(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$。

其中(1)，(4)两种情形是基本的。

如果从函数的变化情况看，则可分为两种类型：(1) 待定式的极限；(2) 非待定式的极限。下面我们按后一种分类法，归纳总结求函数极限的方法。

一、求待定式极限的方法

待定式极限有$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}等七种类型。其中前两种类型是基本的。

(一) 求$\frac{0}{0}$型待定式极限的基本方法

如果$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$，则称$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{0}{0}$型待定式极限。若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$为$\frac{0}{0}$型待定式极限，这表明函数$f(x)$与$g(x)$有成为零的公因式。所以，求这类极限的基本思想是设法化去$f(x)$与$g(x)$成为零的公因式。具体有以下一些基本方法：

1. 将分子分母分解因式，约去成为零的公因式再应用极限四则运算

【例 1.11】 求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-x-2}$。

【解】 这是$\frac{0}{0}$型待定式的极限.

$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-x+1)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x+1}=1$$

2. 将分子分母有理化（或部分有理化），约去成为零的公因式再应用极限四则运算

【例 1.12】 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$。

【解】 这是$\frac{0}{0}$型待定式的极限，这表明分子分母有成为零的公因式，但无法用分解因式的方法约去公因式，办法是将原分子分母有理化。

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$$