数学物理方程及特殊函数

王载舆

清华大学出版社

数学物理方程及特殊函数

王 载 舆

清 华 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书主要讨论二阶常系数线性偏微分方程的一些典型定解问题，并以定解问题的解法为线索组织全书内容. 讲述了分离变量法、积分变换法、变分方法等，并介绍了求解过程中提出来的一些重要特殊函数，如贝塞尔函数，勒让特函数，δ 函数与格林函数等. 全书注意概念与方法的讲解，深入浅出，前呼后应. 书中典型例题较多，各章均附有习题和答案.

本书可作为高等院校工科各专业的数学物理方法课教材或参考书.

（京）新登字 158 号

数学物理方程及特殊函数

王 载 舆

☆

清华大学出版社出版
北京 清华园
中国科学院印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：15.75 字数：410 千字
1991 年 11 月第 1 版 1991 年 11 月第 1 次印刷
印数：0001—5000
ISBN 7-302-00887-6/O·121
定价：4.85 元

前　　言

数学物理方程的研究对象来源于描述各种物理现象的微分方程和积分方程。这是一个相当广泛的领域。研究这些方程时，一般说来难度比较大，即使在讨论一些比较简单的基本问题时，也要综合运用古典数学中的许多基础知识；稍许深入一点，就要涉及现代分析的知识以及各种数值方法。因为在这个领域内不断有许多尚待解决的新问题，所以它是近代数学许多分支发展的动力。

列出方程并附加解所必须满足的条件，构成了定解问题。作为一门基础课程，本书主要讨论古典物理、力学中的二阶常系数线性偏微分方程的一些典型的定解问题。一些重要的特殊函数，例如贝塞尔函数、勒让特函数，以及广义函数中的 δ 函数，是在求解定解问题的过程中提出来讨论的，它们是数学物理方法中常用到的重要函数。

以二元函数 $u=u(x,y)$ 的方程为例，方程的一般形式是

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y)$$

其中系数都是常数。$f(x,y)$ 则为某个已知函数，称为自由项。

即使以这种方程为对象，由于 $u(x,y)$ 的定义区域及边界条件的多样性，在求解 $u(x,y)$ 时仍会出现一些复杂的问题，所以仍只能局限在一些简单的典型区域及典型的定解条件下来讨论解法。

学习本课程的目的，在于建立关于数学物理(微分)方程定解问题的一些基本概念，学会求解的几种基本方法，为学习后续课程，如电动力学、量子力学、流体力学等奠定必要的基础。

在学习方法上，希望注意以下两点：

1 本书以定解问题的解法为线索组织内容。所介绍的几种解法，在概念上和方法上都各自有共同的思路贯彻始终。希望学习时能对各种不同的解法就其总的思路给予注意。

2. 本书的名称不仅明确地反映了数学问题有其物理来源，还必须注意到研究和处理实际问题时，“数学”和“物理”的概念与方法是互相渗透着的，希望读者能注意这种相互关联。

此外，为了适应不同学时的要求，本书内容分两个层次：不带标号的；标以“*”号的；在第一层次中，概念和方法已得到完整的叙述，自成系统，可供一般工科院校采用。标以“*”的内容，可供要求内容较多的专业选用，或作为参考材料. 又，本书末尾未附列各种函数数值表，它是属于《数学手册》的内容。除国内已出版的各种手册外，我们再指出下列手册：

《Hand Book of Mathematical Functions》,

Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun (1972) [*]

这本手册内容丰富，表格详尽。为了避免后文多次重复写此书名，凡提到“手册[*]”时，即专指这一手册。

本书曾先后请多位同志审阅。他们是，应纯同，丁海曙，朱嘉麟，薛伟民，萧树铁。其中朱嘉麟同志帮助核定了内容要求，薛伟民同志对内容的写法在多处提出了宝贵的意见并增写了第八章“变分方法”；特别提出的是，萧树铁同志不仅仔细地审阅了原稿，并且在多处重要疑难概念的写法上给予了指导性的帮助。在此一并表示感谢。

数理方法对同学历来是难课，教材也很难写，本人水平有限，书中如有失当之处，盼望读者和教师同志们批评指正。

编者

目　　录

第一章　方程的建立和定解问题

§1　方程的建立和定解问题

1.1　弦的横振动

设有两端绷紧，平衡时处于水平位置的一条弦，在某种外力作用后，引起弦上各点在同一平面内作垂直于弦的横振动。

取坐标系如图 1.1。$u(x, t)$ 是在点 x 处，t 时刻质点的位移，它表示弦运动状态的函数。

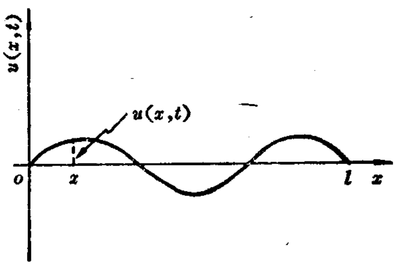

图　1.1

和常微分方程类似，在数理方程中，首先要建立 $u(x, t)$ 所满足的(偏)微分方程，并给定适当的定解条件，然后再通过适当的数学方法把满足方程及定解条件的 $u(x, t)$ 求出来。

一　方程的建立

在本问题中，容许作以下简化假定：

(1)　弦的密度(单位长度质量) ρ = 常量

(2)　完全柔软，即弦只承受张力，不产生抗弯曲力。在这一假定下，弦在各点处所受的张力矢量，总位于该点处的瞬时切线上。

(3)　弦只作微小振动。振动时的位移 $u(x, t)$ 和切线的倾角 θ (从而 $\operatorname{tg}\theta = \partial u/\partial x$) 都是微小的量。在这一假定下，$(\partial u/\partial x)^2 (= u_x^2 \ll 1)$ 可以忽略不计。

(一) 自由振动

弦在振动过程中不受外力作用，并假定弦所受的重力(也是外力)相对于张力来说，可以忽略不计。

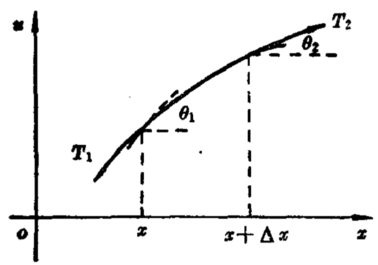

图 1.2

现在分析在 $(0, l)$ 内，在 t 时刻，$[x, x+\Delta x]$ 上小段弦的受力情况。

如图 1.2 所示，因无外力，故在振动过程中，根据牛顿定律，在 t 时刻，小段弦受力的平衡方程为：

$$\Sigma F_x = T_2 \cos\theta_2 + T_1 \cos(\pi + \theta_1) = 0$$

即

$$T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 \qquad (1.1.1)^*$$

$$\Sigma F_y = T_2 \sin\theta_2 + T_1 \sin(\pi + \theta_1) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \qquad (1.1.2)$$

在以上的式子中，$T_2 = T(x+\Delta x, t)$，$T_1 = T(x, t)$ 表示端点所受的张力，$u(\bar{x}, t)$ 表示小段弦在重心 $\bar{x}$ 处的位移。

我们先证明，在前面的假定下，弦在各点处所受的张力 T 可以视为与 x 和 t 都无关的常量。

因为

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + [u_x(x, t)]^2}} \approx 1$$

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + [u_x(x+\Delta x, t)]^2}} \approx 1$$

故从 (1) 式，可以认为

* 式子标号 (1.1.1)，前面的“1.1”是分节号，最后的“1”是式子的号数，在内容的叙述过程中，在不致发生误会时，只写出式子的号数。

$$T(x+\Delta x, t) = T(x, t) = T(t) \qquad (1.1.3)_1$$

这样，在假定的精确度内，可以认为弦上每一点处的张力不随 x 而变。

再考虑在 t 时刻，$[x, x+\Delta x]$ 上振动弦的弦长，

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+[u_x(x, t)]^2}\, dx \approx \int_x^{x+\Delta x} 1 \cdot dx = \Delta x \quad (1.1.4)$$

这表明，在假定的精确度内，可以认为这段弦在振动过程中并未伸长，因此，由虎克定律推知，弦上每一点处的张力 T 也不随时间 t 而变。

结合 $(3)_1$ 式，便得出

$$T(x+\Delta x, t) = T(x, t) = T \ （常量） \qquad (1.1.3)_2$$

下面，从 (2) 式来推导 $u(x, t)$ 满足的方程。

$$\begin{aligned}\rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} &= T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \approx T(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)\\ &= T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]\\ &= T\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=\xi} \Delta x\end{aligned}$$

即得到

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \approx T\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial x^2}\Delta x \quad \xi \in (x, x+\Delta x) \quad (1.1.5)$$

上式约去 Δx，并令 $\Delta x \to 0$，就得 $u(x, t)$ 满足的方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

通常写作

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.1.6)$$

式中

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad (1.1.7)$$

各量单位为

$$[T]=\mathrm{N},\ [\rho]=\mathrm{kg/m},\ [a]=\mathrm{m/s}。$$

结论：(6) 式是给定弦的**自由振动方程**。它是常系数齐次方程。

(二) 强迫振动

如果弦在振动过程中，在各点 x 处还受有垂直外力。力密度为 $F(x,t)[\mathrm{N/m}]$，并设 $F(x,t)$ 对 x 连续，则 (2) 式应改写为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}=T_2\sin\theta_2-T_1\sin\theta_1+\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)dx \quad (1.1.8)$$

式中

$$T_2\sin\theta_2-T_1\sin\theta_1\approx T\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial x^2}\Delta x$$

$$\int_x^{x+\Delta x}F(x,t)dx=F(x+\theta\Delta x,\bar{t})\Delta x$$

把以上两式代入 (8) 式，遍除以 $\rho\Delta x$，且令 $\Delta x\to 0$，便可推得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\quad(0<x<l,\ t>0)\qquad(1.1.9)$$

式中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}\quad[\mathrm{m/s^2}]$

这是弦的**强迫振动方程**，它是一个常系数非齐次方程。

二 定解条件

方程 (6) 或 (9) 是符合于前面简化假定 (1)、(2)、(3) 的任何一条弦的横振动方程，所以也叫做**泛定方程**。泛定方程总是选取物体内部 (不包含端点或边界) 的一小部分进行分析得到的。因此，它只是物体内部各部分运动相互之间的联系规律。仅有泛定方程不足以确定一个具体物体(或物理场)的运动变化情况，还必须有初始条件和边界条件。现分别讨论如下。

(一) 初始条件

这和常微分方程中的概念一致。例如，方程 (6) 或 (9) 是 t 的二阶方程，因此，初始条件的提法是：

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t)|_{t=0}=u(x,0)=\phi(x) \\ u_t(x,t)|_{t=0}=u_t(x,0)=\psi(x) \end{array} \quad (0\leqslant x\leqslant l)\right\} \tag{1.1.10}$$

也可以按 $t=t_0$ 时刻来给出初始条件。

（二） 边界条件

物体内部各点的运动一般还取决于边界状况，因为外部的作用常常要通过物体（或场）的边界“传”到内部去，影响内部各点的运动。例如，振动的弦两端固定，当弦振动按波动的形式传到两端时必然要引起波的反射，这是边界条件对内部各点运动的作用。

对两端固定的弦振动，边界条件的提法是

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t)|_{x=0}=u(0,t)=0 \\ u(x,t)|_{x=l}=u(l,t)=0 \end{array} \quad (t\geqslant 0)\right\} \tag{1.1.11}$$

(11) 式的形式叫**第一类齐次边界条件**。

第一类，是指给出了 $u(x,t)$ 在边界（端点）处的函数值；齐次，是指它是 u 的一次齐次式。

因此，两端固定弦振动定解问题的完整提法是

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (0<x<l,\ t>0) \tag{1.1.6}$$

$$(\text{或 } u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)) \tag{1.1.9}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=\phi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{array} \quad (0\leqslant x\leqslant l)\right\} \tag{1.1.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \end{array} \quad (t\geqslant 0)\right\} \tag{1.1.11}$$

(6) 或 (9) 是泛定方程；(10)，(11) 合起来构成了定解条件。

如果弦很长，而且只考虑远离两端中间部分的某一段弦在较短时间内的振动，这时可以不考虑边界的影响，把它抽象为无穷长的弦，其振动位移为

$$u(x,t) \quad (-\infty<x<+\infty,\ t\geqslant 0)$$

在这种情况下，不提边界条件。但必须指出，$x=+\infty$ 或 $-\infty$ 是"无穷型"端点，边界条件是存在的，而且在某些物理场的定解问题中，无穷型端点处的条件对确定物理场的解起着重要作用，关于这方面的情况，将在以后逐步说明。

同理，如果在一端附近讨论很长的弦在较短时间内的振动，就可以抽象为半无界的弦，例如：

$$u(x, t) \quad (0 \leqslant x < +\infty, \ t \geqslant 0)$$

这时也可以只给出 $x=0$ 处的条件，例如

$$u(0, t) = 0 \quad (t \geqslant 0)$$

附带说明的是，如果弦在持续性的周期外力（例如 $f(x, t) = M(x)\sin\omega t$）作用下作强迫振动，而振动又受有介质的阻尼力，则在振动开始并经历一段时间以后，初始条件的影响就会因阻尼力的持续作用而逐渐消失，成为完全由周期力作用下的周期振动——稳态振动。如果求解这种稳态振动，也可以不提初始条件。

1.2 杆的纵振动

设有一均匀细长的弹性杆(如图 1.3)。现在讨论杆沿纵向的微小振动问题。

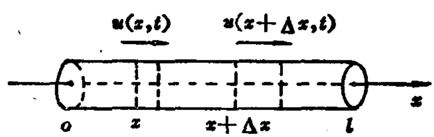

图 1.3

一 建立(泛定)方程

取坐标系如图 1.3 所示；分析杆段 $[x, x+\Delta x] \subset (0, l)$ 的受力情况。

设在 t 时刻，点 x 处的位移为 $u(x, t)$[m]；点 $x+\Delta x$ 处的位移为 $u(x+\Delta x, t) = u(x, t) + \Delta u$。