高等代数教程

上

王萼芳 编著

行列式

线性方程组

矩阵

矩阵的对角化问题

二次型

清华大学出版社

高等代数教程

上册

王萼芳 编著

清华大学出版社

（京）新登字 158 号

内 容 简 介

本套书——《高等代数教程（上、下册）》和《高等代数教程习题集》，是北京大学王萼芳教授在其深受读者欢迎的教材的基础上改编而成的，已被北京市高等教育自学考试委员会选用。

《高等代数教程》（上册）包括第 1 至第 5 章：行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的对角化问题和二次型。由于覆盖了完整的线性代数基础部分，本书可以单独作为一些专业的线性代数的教材。

本书每节和每章都配有深浅不同的例题和习题，并给出了答案或提示。每章的核心内容在章末的内容提要中加以归纳和概括。

本书内容更详细的总结和题解与证明，可参考《高等代数教程习题集》。

读者对象：大专院校、高等教育自学考试和电大的师生、研究生。

书　名：高等代数教程（上册）
作　者：王萼芳　编著
出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内·邮编 100084）
印刷者：北京清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：11.375　字数：293 千字
版　次：1997 年 4 月第 1 版　1997 年 4 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02452-9/O·179
印　数：0001—5000
定　价：14.50 元

前　言

本书可以作为大专院校高等代数和线性代数课程的教材或参考书.

编者曾于1981年编写了一本《高等代数》(大学基础数学自学丛书,上海科学技术出版社出版).此书除了多数读者作为自学材料外,曾被一些大专院校用作高等代数或线性代数课程的教材或参考书,还曾被指定为北京市高等教育自学考试高等代数课程的学习书.经过多年的使用经验以及读者反映的意见,根据教材更新的需要,作者在其基础上,重新编写了本书.它除了保持叙述通顺,问题明确,难点分散,便于自学等特点外,更加突出了对读者学习能力和逻辑推理能力的培养.为了使读者能正确理解概念,掌握运算技巧和解题方法.在书中安排了较多例题,每小节都有习题,每章附有内容提要和复习题,以帮助读者加深理解并及时巩固所学内容.

除了内容的更新与增补外,本书在章节的安排上也作了调整,使得每章较集中地解决一类问题.为了适应不同院校对高等代数和线性代数的要求,本书分为上、下两册.上册包括完整的线性代数基础部分,可以单独作为一些专业的线性代数课程的教材或参考书.

限于编者的水平,错误和疏漏在所难免,希望读者随时提出意见,以便今后进一步修改.

作　者

1996年9月于北京

目　录

第 1 章　行 列 式

行列式是线性代数中一个最基本的概念，它是研究线性代数的一个重要工具，在线性方程组、矩阵、二次型、线性变换等的讨论中都要用到行列式，在数学的其他分支以及一些实际问题中也常常用到行列式.

这一章的主要内容就是介绍行列式的定义、性质以及计算方法.

1.1　2 阶和 3 阶行列式

行列式是一种特定的算式，是根据线性方程组求解的需要而引进的. 首先介绍 2 阶和 3 阶行列式.

由两个方程式组成的二元线性方程组经过变形以后，可以化成一般形式：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

用消元法来解这个方程组，以 b_2 乘第 1 个方程，以 b_1 乘第 2 个方程，然后两式相减，便消去了 y，得到：

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

用同样的方法，可消去 y，得：

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$，那么可得到：

$$
\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases} \tag{2}
$$

把这一组 x,y 的值代入方程组(1),可以验证它确是原方程组的解,而且方程组(1)只有这一组解.

这样,就可以用公式(2)来解二元线性方程组(1).为了便于记忆这个公式,我们引进 2 阶行列式的概念,令:

$$
D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.
$$

这样规定的 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 称为 2 阶行列式.根据这个规定,公式(2)中 x,y 的分子也可用 2 阶行列式表示:

$$
D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1;
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.
$$

我们把方程组(1)的系数组成的行列式称为(1)的系数行列式,于是上面的结论就可叙述为:**二元线性方程组(1)当它的系数行列式 $D\neq0$ 时有唯一解.这个解可以用公式表示:**

$$
x = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{D_2}{D}.
$$

例 1 解方程组

$$
\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 7y = 6. \end{cases}
$$

解:这个方程组的系数行列式为:

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 9 = 5 \neq 0.
$$

所以这个方程组有唯一解. 又由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 49 - 18 = 31,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 21 = -9,$$

得到解:

$$x = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}, \qquad y = \frac{-9}{5} = -1\frac{4}{5}.$$

下面讨论三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{3}$$

还用消元法来解这个方程组. 分别用$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$乘第 1 个方程,用$(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})$乘第 2 个方程,用$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$乘第 3 个方程,再把所得的 3 个式子相加,就消去了 x_2,x_3,得:

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned} \tag{4}$$

用同样的方法消去 x_1,x_3,得:

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_2 \\ &= a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 \\ &\quad - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}. \end{aligned} \tag{5}$$

消去 x_1,x_2 得:

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_3 \end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{33} + b_1a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}. \qquad (6)$$

因此，当

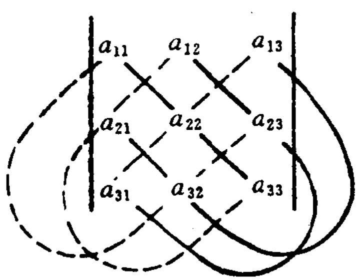
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$$

时，即可解出 x_1, x_2, x_3. 为了简单地表出这个方程组的解，我们引进 3 阶行列式的概念.

规定 3 阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可见，一个 3 阶行列式是由不同行不同列的 3 个数相乘而得到的 6 个项的代数和. 这些项前面所带的正负号可以从下图看出.



凡是实线上 3 个元素相乘所得到的项的前面带正号；虚线上 3 个元素相乘所得到的项的前面带负号.

例 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times (-1) \times 2 + 2 \times 3 \times 3 + 5 \times 2 \times 0$$

$$-1\times3\times0-2\times2\times2-5\times(-1)\times3$$

$$=-2+18+0-0-8-(-15)=23.$$

例 3

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\3 & a & 0\\b & -1 & c\end{vmatrix}$$

$$=2\times a\times c+1\times0\times b+(-1)\times3\times(-1)$$

$$-(-1)\times a\times b-0\times(-1)\times2-c\times1\times3$$

$$=2ac+ab-3c+3.$$

根据 3 阶行列式的定义,可以把消元后所得到的 3 个式子的右边用 3 阶行列式来表示:

$$\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}$$
$$-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}b_2a_{32}.$$

同样地,可看出,(5)式及(6)式的右边分别等于 3 阶行列式:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\a_{21} & b_2 & a_{23}\\a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}\quad 和 \quad\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{21} & a_{22} & b_2\\a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

于是得到三元一次方程组解的公式:

如果方程组(1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq0,$$

那么方程组(1)有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_i(j=1,2,3)$ 是把行列式 D 的第 j 列换成常数项 b_1,b_2,b_3 所得的行列式.

例 4 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

解：这个方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 - 6 + 2 + 1 + 3 - 4 = -5 \neq 0.$$

因此有唯一解. 又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$$

所以解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 2$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = -1$.

从上面的例子看到：应用 2 阶、3 阶行列式来解系数行列式不等于零的二元、三元线性方程组是很方便的. 为了把这个结论推广到未知量更多的线性方程组，即一般线性方程组，我们需要把阶 2、3 阶行列式的概念推广，引进 n 阶行列式的概念. 为此，在下一节中先介绍 n 阶排列的概念.

习 题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a+b & a \\ a-b & 2a-b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-5y=6, \\ x-y=5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2+3x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=10, \\ x_1+4x_2-2x_3=-8, \\ 3x_1+2x_2-x_3=1. \end{cases}$

1.2　n 阶排列

本节介绍 n 阶排列的概念和一些基本性质. 这一方面是为以后定义行列式作准备；另一方面，也因为排列本身就是一个重要的概念，在以后学习数学的其他分支，如概率论等都要用到.

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**.

这里的排列就是以前所说的 n 个不同元素的全排列. 所以 n 阶排列一共有 $n!$ 个.

例 1　写出所有的 3 阶排列.

解：自然数 1,2,3 组成的有序数组共有下列 6 个：

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

这就是全部 3 阶排列.

例 2　写出全部 4 阶排列.

解:4 阶排列一共有 4! =24 个. 它们是:

1234,1243,1324,1342,
1423,1432,2134,2143,
2314,2341,2413,2431,
3124,3142,3214,3241,
3412,3421,4123,4132,
4213,4231,4312,4321.

4 阶排列 1234,它的各个数是按照由小到大的自然顺序排列的,称为 4 阶**自然序排列**. 一般地,1234…n 称为 n 阶自然序排列. 在其他的排列中,都可找到一个大数排在一个小数的前面. 例如在 4 阶排列 2143 中,2 排在 1 之前,4 排在 3 之前. 这样的排列顺序是与自然顺序相反的. 我们称它为逆序. 这就是下述定义:

定义 2 在一个 n 阶排列中,如果一个大数排在一个小数之前,就称这两个数组成一个**逆序**. 一个 n 阶排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 反之,在一个排列中,如果一个小数排在一个大数之前,就称这两个数组成一个**顺序**.

例 3 求 4213 的逆序数.

解: 在排列 4213 中共有 42,41,43,21 等 4 个逆序. 所以 4213 的逆序数等于 4.

例 4 排列 21534,54321,23154,21354 和 45132 的逆序和逆序数如下:

排列	逆序	逆序数
21534	21,53,54	3
54321	54,53,52,51,43,42,41,32,31,21	10
23154	21,31,54	3
21354	21,54	2
45132	41,43,42,51,53,52,32	7

为了方便起见，我们引进一个符号：如果 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个 n 阶排列，我们用 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 来表示 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数. 例如 $\tau(21\ 5\ 34)=3$，$\tau(45\ 1\ 32)=7$.

例 5 求 $\tau(n,n-1,\cdots,2,1)$.

解：在 $n,n-1,\cdots,2,1$ 中，n 与后面 $n-1$ 个数都组成逆序；$n-1$ 与它后面的 $n-2$ 个数组成逆序……一般地，$k(k>1)$ 与它后面 $k-1$ 个数组成逆序. 所以

$$\begin{aligned}\tau(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

例 5 中的方法也就是一般用来求排列的逆序数的方法.

习　题　1.2(1)

1. 写出第 1,2 个位置是 2,4 的全部 5 阶排列，并求它们的逆序数.
2. 求下列排列的逆序数：317428695；528497631；654321.

下面介绍排列的奇偶性.

定义 3 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个 n 阶排列. 如果 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个偶数. 则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个**偶排列**；如果 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个奇数，则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个**奇排列**.

也就是说，逆序数是偶数的排列称为偶排列，逆序数是奇数的排列称为奇排列.

例如：在例 4 中，54321 和 21354 是偶排列，其余的 3 个排列都是奇排列.

把一个排列中的某两个数互换位置，而其他的数保持不动，就得到另一个排列，这样的一种变换称为一个**对换**. 例如，在排列 21354 中将 1,3 两个数对换，得到排列 23154；在排列 32451 中将 3,5 对换，得到排列 52431.

下面讨论对换对于排列奇偶性的影响.先看一下上面的例子，我们已知排列 21354 有 2 个逆序:21,54;而排列 23154 有 3 个逆序:21,31,54.这说明偶排列 21354 经过一次对换后,成为奇排列 23154,而奇排列 32451 经过一次对换,成为偶排列 52431.我们来分析一下对换改变这两个排列奇偶性的原因.先来比较 21354 和 23154.因为这两个排列只是 1 与 3 的位置对换了一下,而且 1 与 3 处于相邻的位置,因此除了 1 与 3 在 21354 中是顺序,而在 23154 变为逆序以外,其他数字之间的次序关系都没有改变,因此 23154 比 21354 多了一个逆序,它们的奇偶相反.至于排列 32451 与 52431,它们对换的数字 3 与 5 不在相邻的位置,但是可以通过若干次相邻位置的对换而将 32451 变为 52431

$$32451 \xrightarrow{(2,3)} 23451 \xrightarrow{(3,4)} 24351 \xrightarrow{(3,5)} 24531$$
$$\xrightarrow{(4,5)} 25431 \xrightarrow{(2,5)} 52431.$$

从上面的式子看到,32451 经过 5 次相邻数字的变换变为 52431.每经过一次相邻位置的对换排列改变一次奇偶,所以排列 32451 与 52431 奇偶相反.

我们按照这个想法来证明下面的定理.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证明: 首先讨论对换的两个数 i 与 j 在排列中处于相邻位置的情形.即排列

$$\cdots i \quad j \cdots \tag{1}$$

经过 i,j 对换,变成排列

$$\cdots j \quad i \cdots \tag{2}$$

显然,i,j 以外的数彼此间的逆序状况在排列(1)和(2)中是一样的;i,j 以外的数与 i(或 j)的逆序状况在排列(1)和(2)中也是一

样的.如果 i 与 j 在排列(1)中构成逆序,则它们的排列(2)中是顺序,这时(2)的逆序数比(1)的逆序数少 1;如果 i 与 j 在排列(1)中是顺序,则它们在(2)中构成逆序,这时(2)的逆序数比(1)的逆序数多 1.总之,排列(1)与(2)的逆序数相差 1 个,所以排列(1)与(2)的奇偶性相反.这就证明了:相邻两数的对换改变排列的奇偶性.

下面讨论一般的情况,设对换的两个数 i 与 j 之间还有 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$.即排列:

$$\cdots\ i\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ j\ \cdots \tag{3}$$

经过 i 与 j 对换,变为排列

$$\cdots\ j\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ i\ \cdots \tag{4}$$

排列(3)变成排列(4)可以通过一系列相邻两数的对换来实现.先把排列(3)经过 $s+1$ 次相邻两数的对换变成排列(5):

$$\cdots\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ j\ i\ \cdots \tag{5}$$

再把排列(5)经过 s 次相邻两数的对换变成排列(4).于是总共经过 $2s+1$ 次相邻两数的对换,把排列(3)变成了排列(4).由于一次相邻两数的对换会改变排列的奇偶性,因此 $2s+1$ 次相邻两数的对换会改变排列的奇偶性.所以排列(3)与(4)奇偶相反.这就证明了对换改变排列的奇偶性.|

应用定理 1 可以证明以下重要的事实:

定理 2 在全部 $n!$ 个 n 阶排列中,奇、偶排列的个数相等,各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明:假设在 $n!$ 个 n 阶排列中有 s 个奇排列,t 个偶排列,下面来证明 $s=t$.

将这 s 个奇排列的头两个数字都对换一下,即将 $a_1a_2\cdots a_n$ 变为 $a_2a_1\cdots a_n$.就得到 s 个偶排列.而且这 s 个排列各不相同.但是偶排列一共有 t 个,所以 $s\leqslant t$.再将 t 个偶排列的头两个数字对换,得