数
理
逻
辑
基
础
上
册

现代数学基础丛书

# 数理逻辑基础

上册

胡世华　陆钟万　著



科学出版社

现代数学基础丛书

# 数 理 逻 辑 基 础

## 上 册

胡世华　陆钟万　著



科 学 出 版 社

1 9 8 1

# 内 容 简 介

本书介绍数理逻辑的基础知识，包括逻辑演算的基本内容．这些内容构成数理逻辑各个分支(模型论、证明论和构造性数学、递归论、集合论)的共同的基础．

本书共六部分，分上、下两册．上册包括绪论、第一章和第二章．绪论对数理逻辑的性质，逻辑演算的大概内容，以及阅读以后各章所需要的预备知识作了简要的说明．第一章构造命题逻辑和一阶逻辑的形式系统，介绍演绎逻辑的基本规则．第二章研究逻辑演算的重要系统特征．

本书可以用作数学专业和其他专业数理逻辑课程的教材或教学参考书，或供有关工作人员参考．当用作其他专业的教材时，内容可删减．使用本书时一般要求读者具有相当于大学高年级程度的数学训练．

现代数学基础丛书
数理逻辑基础
上 册
胡世华 陆钟万 著
*
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1981年1月第一版 开本：850×1168 1/32
1981年1月第一次印刷 印张：7 1/2
印数：0001—11,120 字数：192,000
统一书号：13031·1320
本社书号：1838·13—1
定价： 1.15 元

# 序

数理逻辑是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学．本书陈述数理逻辑的基础性知识，包括逻辑演算（这里是指命题逻辑和一阶谓词逻辑）的基本内容，这些内容构成数理逻辑各个分支（模型论、证明论和构造性数学、递归论、集合论）的共同的基础．

数理逻辑的思想可以溯源到莱布尼兹[1]，而命题逻辑和一阶谓词逻辑的研究则从弗雷格[2]开始．以后，经过皮尔斯[3]，施罗德[4]，皮亚诺[5]，怀德海[6]与罗素[7]，勒文海姆[8]，斯柯伦[9]等的研究，特别是经过了希尔伯特[10]与阿克曼[11]、贝尔奈斯[12]的研究和整理，谓词逻辑的体系得以形成；而在哥德尔[13]证明了一阶逻辑的完全性定理之后，这个逻辑演算的体系可以说是最后得到完成．

逻辑演算是反映前提和结论之间的推理关系的形式系统．在数理逻辑的历史发展中，构造了逻辑演算的重言式系统．在重言式系统中，以某些形式公理和形式推理规则刻划重言式的全体，以重言式反映推理关系．

然而，重言式系统中的形式公理（它们本身都是重言式）并不

---

1) G. W. v. Leibniz.
2) G. Frege.
3) C. S. Peirce.
4) E. Schröder.
5) G. Peano.
6) A. N. Whitehead.
7) B. Russell.
8) L. Löwenheim.
9) T. Skolem.
10) D. Hilbert.
11) W. Ackermann.
12) P. Bernays.
13) K. Gödel.

揭示出推理的性质．形式公理的涵义是并不直观、并不明显的．用重言式系统中的形式推理来反映演绎推理是不直接、不自然的．于是出现了一些较为直接地反映推理关系的逻辑演算．由厄尔勃朗[1]证明的演绎定理就是比较直接地反映推理关系的．以后，在雅思柯夫斯基[2]，根岑[3]等的著作中，也表明了这种趋势．又如在克利尼[4]的《元数学导引》一书中所构造的逻辑演算，虽然仍然是重言式系统，但在其中定义了有前提的形式推理，并且利用演绎定理得出直接反映推理关系的形式推理关系，这也表明了上面所说的趋势．

本书按照直接而自然地反映推理关系的要求来构造逻辑演算，这是逻辑演算的自然推理系统．本书中构造的自然推理系统既是一种严格的形式的数学语言，又与通常的数学语言很接近．王宪钧同志在 1940 年前后曾告诉作者之一，沈有鼎同志在三十年代初就有了关于构造逻辑演算的自然推理系统的思想．本书所构造的自然推理系统是受到这种思想的启发的．

文献中已有的带函数词的谓词逻辑往往是其中的函数词只表示全函数，即在论域中处处有定义的函数．本书中构造了两个带函数词的谓词逻辑，一个里面的函数词表示全函数，另一个里面的函数词表示全函数或者偏函数，即在论域中并非处处有定义的函数．

本书包括六个部分．绪论部分对数理逻辑的性质，逻辑演算的大概内容，以及阅读以后各章所需要的预备知识作了简要的说明．第一章构造了命题逻辑和谓词逻辑的自然推理系统，通过其中的形式推理研究演绎推理．第二章研究逻辑演算形式系统的某些重要的系统特征，例如等值公式的可替换性、命题连接词的完全性和独立性、代入定理、范式和对偶性等．由于这些特征往往是本书中几个有关的逻辑演算所共有的，甚至是所有的逻辑演算所共

---

1) J. Herbrand.
2) S. Jaśkowski.
3) G. Gentzen.
4) S. C. Kleene.

有的，所以在本书中并没有在构造了一个逻辑演算之后就研究它的系统特征，而是将这些系统特征集中在一章之中结合有关的逻辑演算一起加以研究．第三章陈述逻辑演算的重言式系统，并研究自然推理系统和重言式系统之间的关系．第四章研究逻辑演算的可靠性(形式推理是否与所反映的演绎推理一致)、完全性(形式推理是否完全地反映了演绎推理)和独立性(逻辑演算中的形式推理规则是否都不是多余的)问题．第五章讨论了逻辑演算如何应用于陈述具体的数学理论，构造了初等代数、自然数、集和实数理论的形式系统，并且研究了在形式系统中引进形式符号定义的问题．

本书可以用作数学专业和其他专业数理逻辑课程的教材或教学参考书，或者供有关工作人员参考．当用作其他专业的教材时，内容可以删减．本书内容是自足的，可用于自学．使用本书时一般要求读者具有相当于大学高年级程度的数学训练．正是由于考虑到自学的需要，所以有些章节，特别是绪论和第一章的开始两节，写得比较详细．

本书的写作开始于 1957 年，曾先后在北京大学数学力学系和中国科学技术大学应用数学系用作教材． 1965 年完成初稿，以后又于 1975 年开始修订．由于作者水平有限，将本书用于教学的机会也还不多，本书的缺点和错误是难免的，恳切希望数理逻辑和其他专业的工作者以及广大的读者批评指正．

胡世华　陆钟万
1978 年 3 月于北京
中国科学院计算技术研究所

# 使 用 说 明

（一）本书绪论和各章中的节用两位数字表示，第一位数字表明这一节所属的章，第二位数字是一章中各节的编号．例如，第一章中各节依次是 §10，§11 等；第二章中各节依次是 §20，§21 等．绪论作为第零章，绪论中各节依次是 §00，§01 等．

（二）定义和定理（包括引理和推论）的标号中，点号前面的两位数字表明这个定义或定理所属的节，点号后面的数字是一节中的定义或定理的编号．例如，§10 中的定义依次是定义 10.1，定义 10.2 等；§10 中的定理依次是定理 10.1，引理 10.2 等．定理，引理和推论统一编号．

（三）当同时用到某一节中的几个定义或几个定理时，有时采用简单的写法，例如定义 10.1.2 就是定义 10.1 和定义 10.2，定理 11.1.2.3 就是定理 11.1，定理 11.2 和定理 11.3．

（四）各节后面习题的标号方法与定义、定理的相同．

（五）凡在后面要引用的公式或论证，往往另起一行写，并在行的左端用 1)，2)，3) 等或 (1)，(2)，(3) 等标明． 在某一定理的证明或在某一例子的陈述中依次用双括弧 (1)，(2) 等，在一节的叙述中依次用单括弧 1)，2) 等．

（六）各页的脚注用较小号的 1)，2)，3) 等标明．

（七）用乐谱中的终止符 ‖ 表示定理证明的结束． 对于省略证明的定理，就在陈述定理之后加上这个符号．

# 目　　录

# 绪　论

数理逻辑研究推理，即研究推理中前提和结论之间的形式关系．这种形式关系是由作为前提和结论的命题的逻辑形式决定的．

在数理逻辑的研究中要构造逻辑演算，逻辑演算是为了研究前提和结论之间的形式关系而构造的形式系统．逻辑演算反映自然语言的某些特征，其中的合式公式反映命题的逻辑形式，其中的形式推理反映演绎推理．

绪论中将对这些概念作直观的说明(§00—§02)，并且要介绍阅读以后各章所需要的某些预备知识，即关于集的基本概念(§03)和数学归纳法(§04)的一般知识．

## §00　数理逻辑

**数理逻辑**，又称为**符号逻辑**，是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学．本书中所要陈述的数理逻辑还限于通常称为演绎逻辑的内容．

推理是从前提推出结论．在各门科学的研究活动中，都要进行推理．推理中的前提和结论都是命题，都有具体的涵义．从怎样的前提出发，能推出怎样的结论，不能推出怎样的结论，这是各门科学自己要研究的问题．例如在数学分析中，由下面的前提 1)和2)：

1)　　　函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

2)　　　$f(a)$ 和 $f(b)$ 的符号不同

能推出结论 3)：

3)　　　在 $a, b$ 之间有 $c$，使得 $f(c)=0$

但是，如果在 1) 中把闭区间 $[a, b]$ 改为开区间 $(a, b)$，那么由 1) 和 2) 就不能推出 3)。这个例子陈述了一个具体的前提和结论之间的推理关系。数学分析在这个例子中研究了连续函数的性质，但并不是研究推理。数学中除数理逻辑之外的各个分支都并不研究它们所使用的推理。

推理是数理逻辑所研究的对象。数理逻辑研究推理时并不涉及前提和结论的内容，而是研究前提和结论之间的形式关系。

什么是前提和结论之间的形式关系呢？

前提和结论都是命题。命题有逻辑形式，或者说逻辑结构。例如下面的两个命题：

4) $$a = 0 \text{ 或 } a < 0$$

5) $$a \neq 0$$

命题 4) 有以下的逻辑形式：

$$A \text{ 或 } B$$

命题 5) 有以下的逻辑形式：

$$\text{非 } A$$

我们考虑下面 6) 中三个互相连系的逻辑形式：

6) $$\begin{cases} A \text{ 或 } B \\ \quad \text{非 } A \\ \qquad B \end{cases}$$

我们说这是三个互相连系的逻辑形式，意思是，第一个逻辑形式是由两个命题用"或"连接而构成，第二个逻辑形式就是在第一个逻辑形式中的第一个命题的前面加上"非"（就是加以否定）而构成，第三个逻辑形式就是由第一个逻辑形式中的第二个命题构成。显然，任何三个命题，如果它们分别具有 6) 中的逻辑形式（不论其中的 $A$ 和 $B$ 是怎样的命题[1]），那么，当其中的前两个命题是真命题时，后一个命题必然也是真命题。这样，我们也说由前两个命题能

1) 我们以英文斜体大写字母表示命题、性质（或关系）和集合，它们是互相连系的。例如，"是素数"是一个性质，"$a$ 是素数"是一个命题，而所有具有"是素数"性质的对象又构成一个集合，即全体素数的集合。

推出后一个命题．例如，当前面的 4）和 5）是真命题时，“$a<0$”必定是真命题．我们说，由 4）和 5）能推出“$a<0$”．

由“$a=0$ 或 $a<0$”和“$a\neq 0$”能推出“$a<0$”，这是前面说过的由具体的前提推出具体的结论，是一个具体的推理关系．6）中前两个逻辑形式与后一个逻辑形式所表示的则是推理中前提和结论之间的一种形式关系．

再举一个例子．下面的两个命题：

凡宽叶植物都是落叶植物

凡素数都是整数

都有以下的逻辑形式：

凡 $S$ 都是 $P$

我们考虑下面 7）中三个互相连系的逻辑形式：

7） $\begin{cases}\text{凡} M \text{都是} P\\ \text{凡} S \text{都是} M\\ \text{凡} S \text{都是} P\end{cases}$

显然，任何三个命题，如果它们分别具有 7）中的逻辑形式（不论其中的 $S$，$M$，$P$ 是怎样的概念或集合），那么，当前两个命题是真命题时，后一个命题必然也是真命题．因此也可以说，由前两个命题能推出后一个命题．7）中前两个逻辑形式与后一个逻辑形式表示前提和结论之间的另一种形式关系．

6）和 7）中的逻辑形式所表示的前提和结论之间的这种形式关系称为**演绎推理关系**．数理逻辑中的演绎逻辑就是研究前提和结论之间的演绎推理关系的[1]．

为了研究推理，研究推理中前提和结论之间的形式关系，为了确切地反映命题的逻辑形式，在数理逻辑的研究中要构造称为**逻辑演算**的形式系统．形式系统是一种形式语言，它反映自然语言

1）推理中前提和结论之间的关系并不都是演绎推理关系．例如也可以是，当前提是真命题时，结论并不必然是真命题，而或然是真命题．归纳逻辑和概率逻辑就是研究这种推理关系的，它们也属于数理逻辑的范围．

的某些特征．逻辑演算中有**合式公式**，在合式公式中可以确切地反映命题的逻辑形式．因此在逻辑演算中可以确切地反映前提和结论的逻辑形式之间的关系，也就是前提和结论之间的形式关系．

根据以上的讨论，我们可以简单地说：数理逻辑是研究推理，即研究推理中前提和结论之间的形式关系的科学，这种研究是通过反映语言的这一方面关系的逻辑演算进行的．

## §01 逻辑演算(一)

我们在上节中讲过，逻辑演算是为了研究推理中前提和结论之间的形式关系而构造的形式语言，逻辑演算反映自然语言的某些特征．在本节和下节中我们要进一步说明逻辑演算的构造和意义．

逻辑演算中首先要有**符号**，这相当于语言（特别是欧洲的语言)中要有字母．逻辑演算中的符号也称为**字母**．

由符号构成**公式**，公式是一串有穷长的符号．公式中符号的数目称为**公式的长度**．当把符号称为字母时，公式就称为**字**，公式的长度称为**字长**．例如，如果符号就是以下两个英文字母：

$$a, b$$

那么

$$a, b, aabb, ababab, bbbaaabbb$$

等都是公式，它们的长度分别是 1，1，4，6，9．

公式的长度可以是 0．长度是 0 的公式称为**空公式**，记作

$$\odot$$

它是一个特殊的没有符号的公式．逻辑演算中有 ⊙ 这样一个公式，正像数目中有 0 这样一个数．

把逻辑演算中的两个公式 X 和 Y 并列起来，结果仍是其中的公式，记作

$$XY$$

称为 X 和 Y 的**并列**. 对于任何公式 X，显然有

$$X\odot = \odot X = X$$[1]

并且，对于任何公式 X, Y, Z, 显然有

$$(XY)Z = X(YZ)\text{（结合律）}$$

$$\text{如果 } XY = XZ,\text{ 则 } Y = Z\text{（消去律）}$$

$$\text{如果 } XZ = YZ,\text{ 则 } X = Y\text{（消去律）}$$

如果公式 X 是公式 Y 的部分，就是说，有公式 $X_1$ 和 $X_2$（$X_1$, $X_2$ 可以是空公式⊙）使得，

$$X_1XX_2 = Y$$

那么我们说 X 是 Y 的**子公式**；否则 X 就不是 Y 的子公式. 例如，对于由符号 a 和 b 构成的公式

ababab

来说，a, ab, aba, bab, abab 等，以至于 ababab 本身，都是它的子公式；但是 aa 和 bb 都不是它的子公式.

显然，任何公式 X, Y, Z, 如果 X 是 Y 的子公式，Y 是 Z 的子公式，那么 X 是 Z 的子公式.

逻辑演算中的符号是我们的研究对象，又称为**形式符号**或**对象符号**.

形式符号是逻辑演算的原始构成材料. 一个逻辑演算在确定了它的形式符号，因此确定了它的公式之后，还要为它规定两组规则，形成规则和变形规则，由这些规则生成某些对象. 所生成的对象都是由形式符号构成的. 形式符号是没有涵义的；由形式符号根据形成规则和变形规则所生成的对象也都是没有涵义的，它们都是由形式符号构成的形式对象. 然而，对于逻辑演算形式系统中的这些形式对象，要给予一个具有逻辑学涵义的解释，使之成为具有逻辑学涵义的对象，从而我们可以通过它们研究逻辑问题.

下面我们来逐步地说明这些问题. 我们在本节和下节中所作的说明是直观的，不严格和不详细的，也只要求读者有个大概的了

---

1) 两个公式相等，就是它们的长度相同，并且依次有相同的符号.

解．在以后各章中将对这些问题作严格和详细的说明．

我们先说明什么是形成规则和变形规则．

**形成规则**相当于语言中的语法规则．语法规则是确定词和语句怎样构成，确定语句的结构形式的．与之类似，形成规则由公式中确定一类特殊的公式，就是上节中所说的合式公式．合式公式相当于语言中的语句．

为了继续说明的方便，我们先要说明一些关于本书中使用符号的规定．我们要构造一系列的逻辑演算．我们规定，令英文正体大写字母(或加下添标)

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何逻辑演算中的公式；令英文正体大写字母（或加下添标）：

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i, \mathrm{C}_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何逻辑演算中的合式公式；令希腊文正体大写字母(或加下添标)：

$$\Gamma, \Delta, \Gamma_i, \Delta_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

表示任何逻辑演算中的合式公式有穷序列．

注意，X和Y等是任意的公式，因此它们可以是不相同的，也可以是相同的．同样，A和B等可以是不同的，也可以是相同的合式公式；Γ和Δ等可以是不同的，也可以是相同的合式公式有穷序列．

我们又令

$$\Gamma, \Delta$$

表示由Γ和Δ并列起来而得的合式公式有穷序列．如果 $\Gamma = \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_m$ 并且 $\Delta = \mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n$，那么 $\Gamma, \Delta = \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_m, \mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n$[1]．

合式公式的有穷序列可以是没有项的．没有项的有穷序列称为**空序列**．我们就以表示空集的符号

1）两个序列相等，就是它们的项数相同，并且依次有相同的项．

$$\phi$$

表示空序列．于是，对于任何 $\Gamma$，都有

$$\Gamma, \phi = \phi, \Gamma = \Gamma$$

成立[1]．

现在我们来说明什么是变形规则．**变形规则**相当于演绎推理的规则；可是，当还没有给以具有逻辑学涵义的解释时，我们还不能说变形规则具有怎样的逻辑学涵义，还不能说它们是一种推理规则．

变形规则确定一个合式公式有穷序列 $\Gamma$ 和一个合式公式 A 之间的一种特殊的形式关系，称为**变形关系**．当 $\Gamma$ 和 A 之间存在着变形关系时，我们说由 $\Gamma$ 可以变形到 A，并记作

$$\Gamma \vdash A$$

我们也说 $\Gamma \vdash A$ 是变形关系．

下面我们来说明怎样对形式符号以及由形式符号构成的形式对象给以具有逻辑学涵义的**解释**，使之成为具有逻辑学涵义的研究对象．

前面说过，逻辑演算反映语言的某些特征．逻辑演算中的合式公式相当于语言中的语句．语句是表示命题的，是可以赋予一定的涵义的．合式公式也要能够在给以解释之后表示命题，赋予一定的涵义．为了说明怎样给合式公式以解释，使得合式公式在给以解释之后成为命题，我们先要说明怎样给构成合式公式的形式符号以解释．在本书中要构造一系列的逻辑演算，其中有七类常用的形式符号．下面我们列举这些符号，并说明怎样给以解释，说明它们表示什么．

（一）**命题词**[2]　命题词是一个无穷序列的形式符号．我们规定以英文正体小写字母（或加下添标）：

---

1）在这里的“$\Gamma, \phi$”和“$\phi, \Gamma$”中，为了把 $\Gamma$ 和 $\phi$ 分开，我们写了逗号．如果把 $\Gamma$ 和 $\phi$ 中的合式公式写出，那么由于 $\phi$ 是空序列，这里的逗号实际上是不需要的．

2）这里“词”的意思就是符号，故命题词也可以称为“命题符号”．后面个体词等的情况相同．