工程数学

积分变换

包革军　盖云英　冉启文　编
罗声政　审

GONG CHENG SHU XUE
JI FEN BIAN HUAN

哈尔滨工业大学出版社

TB112
3?

工程数学

积 分 变 换

包革军 盖云英 冉启文 编
罗声政 审

中国科学技术大学
图书馆藏

TB112
B30

版社

内 容 提 要

本书内容包括：傅里叶变换、拉普拉斯变换的基本内容，为了使广大读者了解和学习日益得到广泛应用的小波变换理论，增加了小波变换一章。本书每节后都配备一定数量的习题，初学者应该独立完成。

本书可作为高等工科院校有关专业教材，也可供有关工程技术人员参考。

工 程 数 学

积 分 变 换

Jifen Bianhuan

包革军　盖云英　冉启文　编

罗声政　审

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑 龙 江 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 9.875 字数 255 千字

1998 年 11 第 1 版　1998 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—4 000

ISBN 7-5603-1358-2/O·95 定价 12.50 元

前　言

这本《积分变换》是我校几位多年从事同名称课程教学工作的教师，参照原国家教委 1993 年批准印发的“工程数学积分变换课程教学基本要求”编写的。可供普通高等工科院校有关专业使用，也可作为工程技术人员自学积分变换的参考书。

在编写过程中，我们力求作到深入浅出，通俗易懂，在内容上突出基本概念和方法，在理论上尽可能地做到数学推导适合工科专业的特点。每节后面都配备了一定数量的习题，独立完成这些习题是读者应该做到的。

本书由包革军、盖云英、冉启文等合作编写，陈明浩、邢宇明老师也参加了部分编写工作，由罗声政教授审阅。我们谨在此致以衷心的感谢。我们也非常感谢哈尔滨工业大学出版社领导和有关同志，是他们的细致工作和对教材建设的一贯大力支持，才使这本《积分变换》能与读者见面。

由于编者水平所限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1998 年 10 月于哈尔滨工业大学

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

引　言

在自然科学和工程技术中为了把较复杂的运算转化为较简单的运算，人们常常采用所谓变换的方法来达到目的。例如在初等数学中，数量的乘积和商可以通过对数变换化为较简单的加法和减法运算。在工程数学里积分变换能够将分析运算（如微分、积分）转化为代数运算，正是积分变换的这一特性，使得它在微分方程和其它方程的求解中成为重要方法之一。积分变换的理论和方法不仅在数学的诸多分支中得到广泛应用，而且在许多科学技术领域中，例如在物理学、力学、无线电技术以及信号处理等方面，作为一种研究工具无论是过去还是现在都在发挥着极为重要的作用。

所谓积分变换起源于 19 世纪的运算微积，英国著名的无线电工程师海维赛（Heaviside）在用它求解电工学、物理学等领域中的线性微分方程的过程中逐步形成一种所谓的符号法，后来符号法又演变成今天的积分变换法。所谓积分变换，就是通过积分运算把属于某函数类 A 的函数 $f(x)$，通过含参变量 τ 的积分

$$F(\tau)=\int_a^b f(x)K(x,\tau)\mathrm{d}x$$

变为另一函数类 B 中的函数 $F(\tau)$，这里 $K(x,\tau)$ 是一个确定的二元函数，通常称为该积分变换的核，$f(x)$ 称为像原函数，$F(\tau)$ 称为 $f(x)$ 的像函数。当选取不同的积分域和核函数时，就得到不同名称的积分变换。特别当核函数 $K(x,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}$，$a=-\infty$，$b=+\infty$ 时，即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$$

称为$f(x)$的傅里叶(Fourier)变换。当核函数$K(x,\omega) = e^{-sx}$,$a = 0$,$b = +\infty$时,即

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

称为$f(x)$的拉普拉斯(Laplace)变换。

本书着重介绍上述两类最常用的积分变换并讨论它们的定义、性质及其某些应用。为了扩大学生的知识面,我们把有关小波变换基本知识作为本书的一章介绍给大家。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　傅里叶(Fourier)变换

傅里叶变换给我们提供了一种解决线性系统问题的方法，其特点在于将傅里叶变换作为工具，把科技或工程上的问题变为容易解决的问题。正因为如此，傅里叶变换在很多门学科的理论中起着重要作用。本章首先就一维情形介绍傅里叶变换的定义、存在条件及其简单性质，然后讨论二维傅里叶变换的相应问题。在此基础上，读者不难把这些概念推广到更高维的情形。

§1.1　一维傅里叶积分与傅里叶积分定理

在高等数学的学习中，我们曾经讨论函数的傅里叶展开问题，如果一个以 T 为周期的函数 $f_T(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克莱(Dirichlet)条件，即

1 除去有限个第一类间断点外，处处连续；

2 分段单调，单调区间的个数有限；

则 $f_T(x)$ 的傅里叶级数

$$f_T(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right] \tag{1}$$

在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上处处收敛，且在 $f_T(x)$ 的连续点处级数(1)收敛于 $f_T(x)$，其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T},\quad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

在电子技术中为了方便起见，常利用欧拉(Euler)公式

$$\cos x = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})/2 \qquad \sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})/2\mathrm{j} \tag{2}$$

把函数 $f_T(x)$ 的傅里叶级数改写成复数形式，将(2)代入(1)，则在 $f_T(x)$ 的连续点处

$$f_T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)] =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega x}) - \frac{\mathrm{j}b_n}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega x})\right] =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - \mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega x} + \frac{a_n + \mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega x}\right)$$

若记

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, C_n = \frac{(a_n - \mathrm{j}b_n)}{2}, C_{-n} = \frac{(a_n + \mathrm{j}b_n)}{2}$$

$$(n = 1,2,3\cdots)$$

则得到 $f_T(x)$ 的傅里叶级数的指数形式

$$f_T(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega x} + C_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega x} \tag{3}$$

这里

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{d}x$$

$$C_n = \frac{(a_n - \mathrm{j}b_n)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\cos(n\omega x)\mathrm{d}x - \mathrm{j}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\sin(n\omega x)\mathrm{d}x\right] =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)[\cos(n\omega x) - \mathrm{j}\sin(n\omega x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega x}\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,3\cdots)$$

同理

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega x}\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,3\cdots)$$

上面三式可以统一写成一个式子

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega x}\mathrm{d}x$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\cdots)$$

若记

$$\omega_n = n\omega \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\cdots)$$

则(3) 也可写

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n x}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n x} \tag{4}$$

下面我们讨论定义在整个实轴上，但是非周期函数的展开问题。在这里我们只是做形式上推导，当然是不严格的。希望对后面引入的傅里叶积分能有个直观认识。

设函数 $f(x)$在实轴上处处有定义，我们把这个函数在 $-\frac{T}{2}$与 $\frac{T}{2}$之间的一部分独立出来，而在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$之外，将不是 $f(x)$，而是把独立出来的 $f(x)$在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$内的一部分按照周期 T 向右向左延拓而获得的函数，其图形见图 1-1。如果我们记这个由 $f(x)$所产生的函数为$f_T(x)$，则显然 $f_T(x)$是一个以 T 为周期的周期函数。当 T 越大，则 $f_T(x)$与 $f(x)$相等的范围也越大。当 T 趋向于 $+\infty$时，则以 T 为周期的函数$f_T(x)$的极限转化为 $f(x)$，即

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x) \tag{5}$$

综上所述，任何一个非周期函数 $f(x)$都可以看成是由某个以 T 为周的函数$f_T(x)$当 T 趋向于 $+\infty$时转化而来的。这个结论为

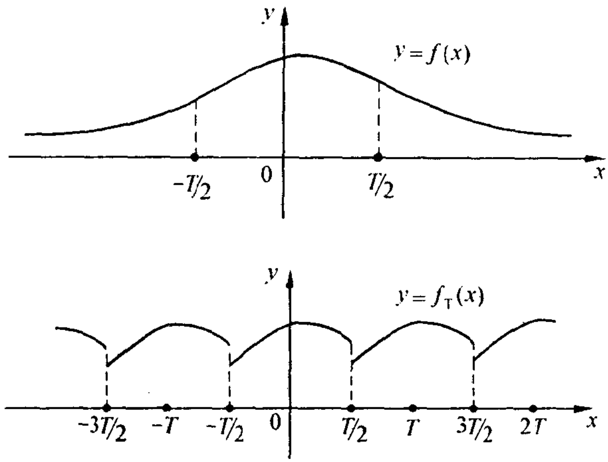

图 1-1

我们将非周期函数展开为无穷多个周期函数的叠加提供了途径。即利用(4)和(5)式,得

$$f(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x) e^{-j\omega_n t} dt \right] e^{j\omega_n x} \tag{6}$$

如果记

$$F_T(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

则(6) 式变为

$$f(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{j\omega_n x} \tag{7}$$

在(7)式中,当 n 取一切整数时,ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个频率轴 ω 上,如图 1-2 所示。

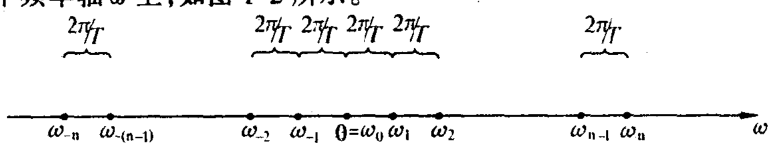

图 1-2

若相邻两个点之间的距离以 $\Delta\omega_n$ 表示,即

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = n\omega - (n-1)\omega = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad 或 \quad T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n}$$

则

$$f(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_T(\omega_n) e^{j\omega_n x}] \Delta\omega_n \tag{8}$$

由图 1-2 可见, T 越大,相邻两点间的距离 $\Delta\omega_n$ 就越小,当 $T\to+\infty$ 时, $\Delta\omega_n\to0$, 此时离散分布在频率轴上的点 $\cdots\omega_{-n},\omega_{-(n-1)},\cdots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots$ 可认为连续分布在整个频率轴上,所以当 $T\to+\infty$ 时,我们用连续变量 ω 来代替离散变量 $\Delta\omega_n$ 就是自然的了。于是记

$$F(\omega) = \lim_{T\to+\infty} F_T(\omega_n) = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt \tag{9}$$

将(9)式再代入(8)式,有

$$f(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_T(\omega_n) e^{j\omega_n x}] \Delta\omega_n =$$

$$\lim_{\Delta\omega_n\to0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_T(\omega_n) e^{j\omega_n x}] \Delta\omega_n$$

比照定积分的定义,函数 $f(x)$ 可以看作是函数 $F(\omega)e^{j\omega x}$ 在整个频率轴 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分,即

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega x} d\omega \tag{10}$$

这样我们就得到了 $f(x)$ 的一个积分形式的展开式,上述公式通常称为函数 $f(x)$ 的傅里叶积分公式(简称为傅氏积分公式)。应该指出,在推导公式(10)的过程中,每一步都是有条件的,在这里我们只是做了形式上的推导,其目的在于让读者对傅氏级数与傅氏积分之间的渊源有个直观的认识,究竟一个非周期函数 $f(x)$ 在什么样的条件下,可以用傅氏积分公式表示,请看下面的定理。

傅氏积分定理 如果定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(x)$满足下列条件:

(1) $f(x)$在任一有限区间上满足狄利克莱条件;

(2) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$$

则$f(x)$的傅里叶积分公式收敛,且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}\omega\right]^{*}=$$

$$\begin{cases}f(x) & \text{当 } x \text{ 是} f(x) \text{ 的连续点时}\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{当 } x \text{ 是} f(x) \text{ 的第一类间断点时}\end{cases}\tag{11}$$

这个定理给出一个傅氏积分公式成立的充分条件。关于这个定理的证明要用到较多的基础理论知识,超出工科大学数学所涉猎的内容,所以这里从略。感兴趣的同学可参考有关文献。

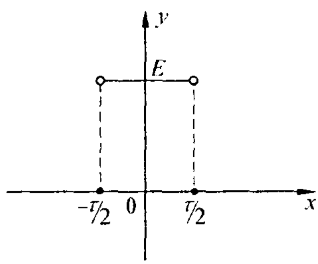

图 1-3

例 1 设单个方脉冲函数(见图 1-3)

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x\leqslant-\tau/2\\ E & -\tau/2<x<\tau/2\\ 0 & \tau/2\leqslant x<+\infty\end{cases}\quad(\tau,E>0)$$

求$f(x)$的傅氏积分。

解 函数$f(x)$满足傅氏积分定理的条件,所以

---

* (11)式中的广义积分是柯西(Cauchy)主值意义下的积分,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{P\to+\infty}\int_{-P}^{P}f(x)\mathrm{d}x$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com