

高等学校教学参考书

数学物理方法

(第二版)

郭敦仁 编

高等教育出版社



高等学校教学参考书

数学物理方法

第二版

郭敦仁 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是在第一版的基础上修改、补充而成的。全书内容分两部分：第一部分是复变函数论及其应用，侧重于应用方面；第二部分是数理方程，着重介绍了几种常用的解法。积分方程简介一章是新加的内容。书中各章配有相应的练习题。

本书可作为高等学校物理类专业数学物理方法课程的教学用书，亦可供其它有关专业的师生及科研人员参考。

(京)112号

高等学校教学参考书

数学物理方法

第 二 版

郭敦仁 编

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 420 000

1965年12月第1版 1991年5月第2版 1993年4月第2次印刷

印数 1 621—6 153

ISBN7-04-002697-X/O·1022

定价 7.30 元

第二版序

在这第二版中,除了改正一些错误之外,还在最后部分增加了“积分方程简介”一章。这原是同名课程1958年以前的大纲包含的内容。现补入备参考。

谨向多年来指出本书一些错误的读者和教师、以及在这次修订中多方协助并作了一些补充的吴崇试同志致谢。

编者

1990年5月

原 序

本书是以北京大学物理系数学物理方法课程的讲义为基础编写的,有些地方,为了便于读者参考,作了补充.内容分为两个部分:第一部分是复变函数论的基本知识和它的一些应用;第二部分是数理方程.后一部分是按照解法编写的,故把关于方程的分类放到较后的第二十一章.积分方程没有包括进去.

讲授本书大约需要 110 学时.对于讲授 90 学时的课程,可略去其中第十九、二十、二十二、二十三各章以及所有带 * 号的各节.

在本书初稿完成后,复变函数论部分和数理方程部分曾分别得到王竹溪先生和萧树铁先生的许多宝贵意见,谨在此致谢.

由于编者的水平所限,书中一定有错误和不妥的地方,希望使用本书的教师和同学在发现后提出批评和意见,以便在有机会再版时改正.

编 者

1965年2月

目 录

第二版序

原序

第一部分 复变函数论及其应用

第一章 复数的基本概念	(1)
1.1 复数及其运算规则	(1)
1.2 复数的几何表示	(2)
1.3 复数序列·极限的概念	(5)
1.4 无穷远点	(6)
第二章 解析函数	(8)
2.1 复变函数·区域的概念·极限·连续和一致连续	(8)
2.2 导数	(10)
2.3 解析函数·科希-里曼 (Cauchy-Riemann)条件	(12)
2.4 解析函数与调和函数的关系	(14)
第三章 初等函数	(17)
3.1 幂函数	(17)
3.2 指数函数	(17)
3.3 三角函数和双曲线函数	(18)
3.4 多值函数·根式 $\sqrt{z-a}$	(19)
3.5 对数函数	(25)
3.6* 多值函数 $w=\arcsin z$	(28)
3.7 函数 z^s (s 为任意复数)	(30)
第四章 复数积分·科希定理和科希积分公式	(32)
4.1 复数积分	(32)
4.2 复数积分的几个重要性质	(33)
4.3 科希(Cauchy)定理	(34)
4.4 不定积分·原函数	(39)

4.5	科希积分公式	(41)
4.6	科希积分公式的几个重要推论	(44)
4.7*	解析函数的实部和虚部的关系	(47)
4.8	科希型积分	(50)
第五章	无穷级数	(51)
5.1	复数级数	(51)
5.2	函数级数·外氏(Weierstrass)定理	(55)
5.3	幂级数·阿贝耳(Abel)第一定理	(59)
5.4	幂级数所代表的函数的解析性	(64)
5.5*	阿贝耳第二定理	(66)
第六章	泰勒展开和洛浪展开	(69)
6.1	解析函数的泰勒(Taylor)展开	(69)
6.2	多值函数的泰勒展开	(75)
6.3	在无穷远点邻域内的泰勒展开	(76)
6.4	洛浪(Laurent)展开	(77)
6.5	洛浪展开的例子	(82)
6.6*	伯努利(Bernoulli)数和欧勒(Euler)数	(84)
第七章	单值函数的孤立奇点	(88)
7.1	孤立奇点的分类	(88)
7.2	可去奇点	(89)
7.3	极点	(90)
7.4	本性奇点	(92)
7.5	无穷远点	(93)
第八章	残数理论及其应用	(94)
8.1	残数定理	(95)
8.2	计算残数的公式	(97)
8.3	应用残数理论计算定积分	(99)
8.4	无穷积分	(101)
8.5	含三角函数的无穷积分·约当(Jordan)引理	(104)
8.6	积分路线上有奇点的情形·积分主值	(107)
8.7*	多值函数的积分	(110)
8.8*	其他例子	(112)

8.9*	应用残数定理计算无穷级数的和	(119)
8.10*	关于零点和极点的个数的定理	(124)
第九章	含参数的积分·Γ函数和B函数	(126)
9.1	解析延拓的一个例子	(126)
9.2	解析延拓	(127)
9.3	含参数的定积分所表示的函数的解析性	(128)
9.4	Γ 函数(第二类欧勒积分)	(131)
9.5*	Γ 函数的围道积分表示	(132)
9.6*	Γ 函数的渐近表示·斯特令(Stirling)公式	(140)
9.7*	B函数(第一类欧勒积分)	(143)
第十章	拉普拉斯变换	(146)
10.1	拉氏(Laplace)变换	(146)
10.2	拉氏变换的基本性质	(148)
10.3	拉氏换式的运算性质及其在解线性常微分方程 初值问题中的应用	(149)
10.4*	像函数的导数和积分的反演	(153)
10.5	折积定理	(156)
10.6*	傅里叶(Fourier)积分	(158)
10.7*	拉氏变换的普遍反演公式	(160)
10.8*	应用残数理论求反演	(161)
10.9*	δ 函数	(165)
10.10*	δ 函数的傅氏换式和拉氏换式	(169)
第十一章	线性常微分方程的级数解法和积分解法	(171)
11.1	二阶线性常微分方程的奇点	(171)
11.2	方程常点邻域内的解	(171)
11.3	方程奇点邻域内的解·正则解和正则奇点	(174)
11.4	求正则解的例子·贝塞耳(Bessel)方程	(181)
11.5*	非正则奇点邻域内的正则解	(189)
11.6*	常规解和次常规解	(191)
11.7*	积分解法·拉普拉斯(Laplace)型方程	(196)
11.8*	勒让德方程的积分解·欧勒变换	(200)

第二部分 数学物理方程

第十二章 方程的导出和定解问题	(203)
12.1 方程的来源	(203)
12.2 杆的纵振动和弦的横振动	(204)
12.3 热传导方程	(208)
12.4* 电报方程(传输线方程)	(211)
12.5 边界条件和初值条件	(212)
12.6 定解问题	(217)
第十三章 分离变数法	(220)
13.1 弦的自由振动	(220)
13.2 解的诠释	(226)
13.3 两端固定的弦的强迫振动	(228)
13.4* 非齐次边界条件·第一边值问题	(230)
13.5 关于不含时间的问题的补充讨论	(233)
第十四章 正交曲面坐标系中方程的变数分离	(237)
14.1 坐标系的选择	(237)
14.2* 正交曲面坐标系中的梯度、散度、旋度和拉氏算符	(237)
14.3 球坐标系和柱坐标系中方程 $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ 的变数分离	(243)
14.4 圆内的狄里希累(Dirichlet)问题	(246)
第十五章 常微分方程的本征值问题	(251)
15.1 二阶线性常微分方程的本征值问题	(251)
15.2 斯特姆-刘维(Sturm-Liouville)型方程的本征值问题	(257)
15.3* 用正交函数组展开	(260)
第十六章 特殊函数及其应用(一)·勒让德函数	(264)
16.1 勒让德方程的本征值问题·有界条件·勒让德多项式	(264)
16.2 勒让德多项式的微分表示——罗巨格(Rodrigues)公式	(268)
16.3 $P_l(x)$ 的正交性和归一因子	(270)
16.4* $P_l(x)$ 的完备性	(273)
16.5* 应用举例——均匀电场中的导体球	(274)
16.6 $P_l(x)$ 的生成函数	(278)
16.7* 应用举例	(280)

16.8	$P_l(x)$ 的递推关系	(286)
16.9	连带勒让德函数	(288)
16.10	$P_l^m(x)$ 的正交归一关系	(290)
16.11*	$P_l^{-m}(x)$ ($m > 0$)	(292)
16.12*	$P_l^m(x)$ 的递推关系	(293)
16.13*	加法公式	(294)
16.14	公式表	(296)

第十七章 特殊函数及其应用(二) · 贝塞耳函数 (300)

17.1	贝塞耳(Bessel)函数 $J_n(x)$	(300)
17.2	$J_n(x)$ 的振荡特性 · $J_n(x)$ 的零点	(301)
17.3	贝塞耳函数的递推关系	(304)
17.4	$J_n(x)$ 的生成函数和积分表达式	(305)
17.5*	加法公式	(307)
17.6	贝塞耳方程的本征值问题	(308)
17.7	应用举例——圆柱体的冷却	(312)
17.8*	第二类贝塞耳函数 $Y_n(x)$	(314)
17.9*	应用举例——空心圆柱体的径向振动	(318)
17.10*	最陡下降法	(320)
17.11*	贝塞耳函数的渐近表达式	(323)
17.12*	第三类贝塞耳函数 $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ · 柱函数	(325)
17.13*	应用举例——电磁波在金属圆柱表面上的散射	(326)
17.14	半奇数阶贝塞耳函数	(329)
17.15*	球贝塞耳函数 $j_n(x)$, $n_n(x)$, $h_n^{(1)}(x)$, $h_n^{(2)}(x)$	(330)
17.16*	$e^{i k r \cos \theta}$ 用勒让德多项式展开	(331)
17.17*	变型(或虚宗量)贝塞耳函数	(333)
17.18*	应用举例——有限长圆柱体内的稳定温度场	(336)
17.19	可化为贝塞耳方程的微分方程	(339)
17.20	含贝塞耳函数的积分	(339)
17.21	公式表	(341)

第十八章 格临函数 (348)

18.1	引言	(348)
18.2	拉氏算符的格临函数	(348)
18.3	格临函数的对称性	(354)

18.4*	广义格临函数	(355)
18.5	无界区域的格临函数·基本解	(358)
18.6*	用正交函数组展开求格临函数	(362)
18.7*	用电像法求格临函数	(367)
18.8*	初值问题的格临函数·波动方程的推迟解·无初值问题	(370)
第十九章 积分变换的应用		(378)
19.1	应用拉氏变换于热传导问题	(378)
19.2*	应用积分变换解边值(初值)问题的普遍原理	(383)
19.3*	汉克耳(Hankel)变换	(385)
第二十章 保角变换原理及其应用		(389)
20.1	拉氏算符的变换	(389)
20.2	解析函数的几何性质	(392)
20.3	几种最简单的保角变换·线性变换	(394)
20.4	分式线性变换	(396)
20.5	分式线性变换下圆的特性·反演点对	(397)
20.6	应用举例	(400)
20.7	变换 $\zeta = z^n$	(403)
20.8	变换 $\xi = \ln z$	(405)
20.9*	多边形的变换(席伐尔兹(Schwartz)变换)	(406)
20.10*	特殊情形下求 A 和 ζ_i 的公式	(410)
20.11*	应用举例——平行板边缘的电场	(413)
20.12*	把多边形外部变为上半平面的变换	(416)
20.13*	应用举例——儒可夫斯基(Жуковский)变换	(418)
第二十一章 二阶线性偏微分方程分类		(420)
21.1	二阶线性偏微分方程分类·两个自变量的情形	(420)
21.2*	多个自变量的情形	(424)
21.3	定解问题·一维波动方程的达朗伯(D'Alembert)解	(426)
21.4*	热传导方程和泊松(Poisson)方程的解的唯一性	(430)
第二十二章 波动方程的几个特殊解法		(433)
22.1	平均值方法·泊松公式	(433)
22.2	柱面波·降维法	(436)
22.3*	里曼方法	(438)

22.4* 例	(443)
第二十三章 变分法及其应用	(445)
23.1 泛函和泛函的极值问题	(445)
23.2 泛函极值的必要条件·欧勒方程	(447)
23.3 几个自变量的情形·重积分所表示的泛函的极值问题	(450)
23.4 泛函的条件极值问题	(452)
23.5* 测地线问题	(455)
23.6 泛函的变分·泛函的导数	(457)
23.7* 变端点问题·自然边界条件	(459)
23.8 应用于本征值问题	(460)
23.9* 高阶本征值和本征函数	(462)
23.10* 应用于边值问题	(465)
23.11 里兹(Ritz)方法	(467)
23.12 应用举例——圆形薄膜横振动的本征频率	(469)
第二十四章 积分方程简介	(473)
24.1 导致积分方程的问题举例	(473)
24.2 积分方程的特点·与微分方程的比较	(477)
24.3 线性积分方程的分类	(477)
24.4 第二类 F-型积分方程的逐次逼近解法	(479)
24.5 预解式的概念	(483)
24.6* 应用逐次逼近法于第二类 V-型方程	(487)
24.7 退化核积分方程	(489)
24.8 退化核逼近	(494)
24.9* 弗雷德霍姆(Fredholm)关于预解式的理论和公式	(497)
24.10 逼近问题·正交函数组的应用·核的本征值问题	(504)
24.11 傅氏级数逼近·希伯特(Hilbert)变换	(507)
24.12* 双正交函数组的应用	(509)
24.13 积分变换的应用	(512)
24.14* 阿贝尔(Abel)方程·欧勒变换的应用	(516)
24.15 席洛米许(Schlömilch)积分方程	(518)
索引	(520)
外国人名对照索引	(526)
符号索引	(527)

第一部分 复变函数论及其应用

第一章 复数的基本概念

复变函数的理论在物理学中有广泛的应用。本书的第一部分将讨论复变函数的基本概念和理论, 以及一些应用, 如计算定积分, 解常微分方程等; 在第二部分还要用它来讨论一些特殊函数的性质和解某一类边值问题。

1.1 复数及其运算规则

复数是遵从一定运算规则(见下)的一对有序实数, 通常用 (a, b) 或者 $a + bi$ 表示, 其中 a 和 b 是实数, $i^2 = -1$; i 称为虚单位。

实部和虚部 a 称为复数 $\alpha = a + bi$ 的实部, 常用符号 $\text{Re}(\alpha)$ [或 $R(\alpha)$]表示; b 称为 α 的虚部, 用 $\text{Im}(\alpha)$ [或 $I(\alpha)$]表示。

共轭复数 复数 $a - bi$ 称为 $\alpha = a + bi$ 的共轭复数, 通常用 $\bar{\alpha}$ (或 α^*)表示。显然, $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ 。

两个复数, 当而且只有当它们的实部和虚部分别相等时, 才是相等的。如果一个复数的实部和虚部同时为零, 则称这复数等于零。

复数的基本运算规则如下:

加法和减法: 两个复数 $\alpha_1 = a_1 + b_1i$, $\alpha_2 = a_2 + b_2i$ 之和与差是

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i. \quad (1)$$

乘法: α_1 和 α_2 的乘积是

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \quad (2)$$

除法: α_1 被 $\alpha_2 \neq 0$ 除的商是

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 \cdot \bar{\alpha}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

从上面的运算规则看到, 复数满足下列规律: 设 α, β, γ 是复数, 则

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \quad (\text{交换律}), \quad (4)$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad (\text{结合律}), \quad (5)$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad (\text{分配律}). \quad (6)$$

1.2 复数的几何表示

复数的几何表示对于了解复变函数理论中的一些概念, 例如多值函数, 解析延拓等, 很有帮助, 而在复变函数论的一个重要应用方面——保角映像, 复数的几何表示更是必需的。

一个复数 $\alpha = a + bi$ 可以用平面上的一点表示(参看图1)。

在平面上作一直角坐标系, 原点为 O , 并取横轴 Ox 为实轴, 纵轴 Oy 为虚轴, 则复数 α 就可以用横坐标等于 a 、纵坐标等于 b 的点表示。显然, 对于每一复数, 平面上有唯一的一个点与之相应; 反过来, 对于平面上的每一点有唯一的一个复数与之相应。这也就是说, 复数的全体与平面上的点有一一对应的关系。这样的平面称为复数平面。

模与辐角 除了直角坐标, 一个复数 α 还可以用极坐标 (r, θ) 表示[参看图1],

$$\alpha = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta, \quad (1)$$

其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2} (\geq 0)$ 称为 α 的模, θ 称为 α 的辐角; 前者又常用 $|\alpha|$ 表示, 后者常用 $\arg \alpha$ 表示, 即

$$r = |\alpha|, \quad \theta = \arg \alpha. \quad (2)$$

θ 以逆时针方向为正向, 即 θ 增加的方向.

与直角坐标表示不同, 用极坐标表示一个复数时, 辐角 $\arg\alpha$ 之值不是唯一的, 可以加上 2π 的任意整数倍^①. 通常称满足

$$-\pi < \arg\alpha \leq \pi \quad (3)$$

的 $\arg\alpha$ 之值为辐角的主值.

根据(1)式, 可以写

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (4)$$

这是复数 α 的三角函数表示.

引进纯虚数指数函数^②

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (5)$$

后, 复数 α 又可表示为

$$\alpha = re^{i\theta}. \quad (6)$$

由(5)式可以证明指数函数的下列性质:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (7)$$

证明如下:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ &\quad + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

在复数的乘、除、开方等运算中用(6)式的表示最方便. 例如两复数 $\alpha_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\alpha_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ 的乘积是

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (8)$$

即两复数的乘积之模等于两者的模的乘积, 乘积的辐角则等于两者的辐角之和. 类似地, 有

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (r_2 \neq 0). \quad (9)$$

① 复数0(即原点)的极坐标表示较为特殊, 其模为零, 辐角不确定.

② 关于复数指数函数的普遍定义见3.2节和5.4节.

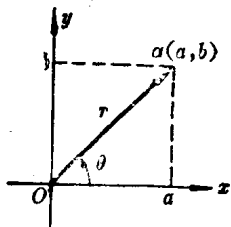


图 1

练习题 若 $z_1 = z_2$, 证明 $|z_1| = |z_2|$, 但 $\arg z_1$ 和 $\arg z_2$ 不一定相等.

加法的几何表示 从1.1节(1)式可以看出, 复数的加法与平面矢量的加法一样. 复数的实部和虚部分别与矢量在直角坐标系中的两个分量相应. 因此, 常用平面上的矢量 \overrightarrow{Oa} (图2) 表示复数 a . 当然, 用矢量表示一个复数 a 时, 矢量的起点不必一定在原点 O , 终点也不必一定在 a 点, 只要矢量在实轴 Ox 和虚轴 Oy 方向上的分量分别等于 a 的实部和虚部即可, 例如图2中的矢量 \overrightarrow{Oa} 和 $\overrightarrow{O'a'}$ 都代表同一复数 a .

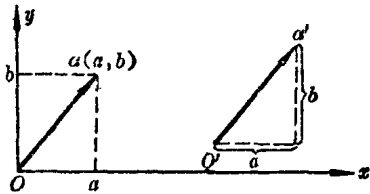


图 2

因此, 复数的加法可用平行四边形作图法表示如图3(a), 也可以用三角形作图法表示如图3(b). 在图3(b)中 $\overrightarrow{a_1 a'_2} = \overrightarrow{O a_2}$.

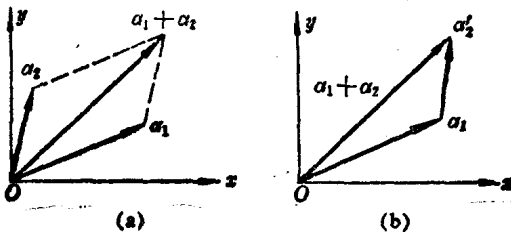


图 3

应当指出, 复数的加法虽然与平面矢量的加法一样, 复数的乘法与平面矢量的乘法(无论是标积或矢积)却是完全不同的.

由几何作图法易证下列重要不等式:

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2|, \quad (10)$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \geq \left| |\alpha_1| - |\alpha_2| \right|. \quad (11)$$

1.3 复数序列 · 极限的概念

复数 $z_n = x_n + iy_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 的全体称为一复数序列, 用 $\{z_n\}$ 表示.

聚点(或极限点) 给定序列 $\{z_n\}$, 如果存在复数 z , 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 恒有无穷个 z_n 满足 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则 z 称为 $\{z_n\}$ 的一个聚点(或极限点).

一个序列可以有不止一个聚点, 例如序列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots$ 就有两个聚点, 即 0 和 1.

极限 给定序列 $\{z_n\}$, 如果存在复数 z , 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 总能找到 $N(\varepsilon) > 0$, 使当 $n > N$ 时有 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则 z 称为序列 $\{z_n\}$ 的极限, 或者说序列 $\{z_n\}$ 收敛于 z , 而写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

一个序列的极限必定是这序列的聚点, 而且是唯一的聚点.

有界序列和无界序列 给定序列 $\{z_n\}$, 如果存在一个正数 M , 使对于所有的 n 都有 $|z_n| < M$, 则序列称为有界的; 如果对于任何正数 M , 总有一个 n 使 $|z_n| > M$, 则 $\{z_n\}$ 称为无界的.

玻-外(Bolzano-Weierstrass)定理 一个有界的(无穷)序列至少有一个聚点.

这定理的证明与实数情形类似, 也是用区间套的方法, 这里从略.

序列收敛的判据——科希(Cauchy)充要条件 一个序列 $\{z_n\}$ 收敛的充要条件是: 任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 使对于任