

高等学校适用

# 机械设计基础

董玉平 主编

机械工业出版社

本书是根据高等工业学校机械设计基础(机械原理及机械零件)课程教学基本要求编写的。

本书包括常用机构、机械设计概论、传动零部件、轴和轴承、弹簧等内容。为加强本书的系统性,有利于应用和基本技能的训练,专门编入了机械传动总论。另外在第一、二章中,叙述了物体受力分析与平衡和构件受力变形及其应力分析等内容,以适应当前模块式教学改革的需要。每章后还附有适量的例题和习题。

本书主要作为高等工科院校非机械类机械设计基础课程的教材,也可供有关工程技术人员参考使用。

#### 图书在版编目(CIP)数据

机械设计基础/董玉平主编. —北京:机械工业出版社, 1999. 8  
高等学校适用  
ISBN 7-111-07257-X

I. 机… II. 董… III. 机械设计-高等学校-教材 N. TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 14787 号

出版人: 马九荣 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)  
责任编辑: 常燕宾 版式设计: 冉晓华 责任校对: 程俊巧  
封面设计: 姚毅 责任印制: 何全君  
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行  
1999 年 8 月第 1 版第 1 次印刷  
787mm×1092mm<sup>1/16</sup>·16.5 印张·402 千字  
0 001—6 000 册  
定价: 22.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换  
本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677-2527

# 前 言

本书根据1987年国家教委颁发的《高等工业学校机械设计基础(原机械原理及机械零件)课程教学基本要求》,结合多年的教学经验和非机类各专业发展的要求,并吸收近年来国内外同类教材的优点编写的。

本书在内容上,贯彻少而精的原则,注重基本理论、基本知识、基本技能的训练和创新思维设计能力的培养。在编写中,力求深入浅出,主次分明,语言精炼。

本书在体系上,从机械的总体设计出发,在阐述各种常用机构和通用零部件的设计以后,专设机械传动总论一章,以强化课程的整体性和系统性。

为满足当前教学改革的需要,在精减内容、压缩学时的前提下,使非机类各专业有关专业有一个完整、系统的机械知识结构,本书给出了物体受力分析与平衡和构件受力变形及其应力分析等内容。

本书采用了最新国家标准。

参加本书编写的有董玉平(绪论、第十五、十六章)、刘鸣(第九、十一、十三章)、王树英(第八、十二、十四章)、孟剑峰(第五、六章)、侯明亮(第十八、十九、二十章)、李沛刚(第三、四章)、程建辉(第十七章)、吴琼(第十章)、徐宁(第七章)、李文娟(第一章)、王卫东(第二章),全书由董玉平担任主编。

本书由于宏晋教授、刘国栋教授担任主审。王梦珠老师在本书编写中给予了很大帮助,在此谨致以衷心的感谢。

由于编者水平所限,本书难免有错误和不妥之处,殷切希望同行和广大读者批评指正。

编者

1999年3月

# 目 录

|                           |     |  |
|---------------------------|-----|--|
| 前言                        |     |  |
| 绪论                        | 1   |  |
| 第一节 机械的组成                 | 1   |  |
| 第二节 本课程研究的对象和容            | 1   |  |
| 第一章 物体受力分析与平衡             | 3   |  |
| 第一节 基本概念和物体的受力分析          | 3   |  |
| 第二节 平面汇交力系                | 6   |  |
| 第三节 力对点之矩、力偶              | 9   |  |
| 第四节 平面任意力系                | 11  |  |
| 第五节 摩擦                    | 14  |  |
| 第六节 空间力系                  | 17  |  |
| 习 题                       | 23  |  |
| 第二章 构件受力变形及其应力分析          | 27  |  |
| 第一节 概述                    | 27  |  |
| 第二节 轴向拉伸和压缩               | 28  |  |
| 第三节 剪切和挤压                 | 32  |  |
| 第四节 扭转                    | 33  |  |
| 第五节 梁的对称弯曲                | 37  |  |
| 第六节 组合变形时的强度计算            | 41  |  |
| 第七节 交变应力                  | 47  |  |
| 习 题                       | 47  |  |
| 第三章 平面机构的自由度和速度分析         | 51  |  |
| 第一节 运动副及其分类               | 51  |  |
| 第二节 平面机构的运动简图             | 52  |  |
| 第三节 平面机构的自由度              | 54  |  |
| 第四节 速度瞬心及其在机构速度分析中的应用     | 57  |  |
| 习 题                       | 59  |  |
| 第四章 平面连杆机构                | 62  |  |
| 第一节 铰链四杆机构及其演化            | 62  |  |
| 第二节 平面四杆机构的基本运动特性         | 66  |  |
| 第三节 平面四杆机构的设计             | 68  |  |
| 习 题                       | 71  |  |
| 第五章 凸轮机构                  | 73  |  |
| 第一节 凸轮机构的应用和分类            | 73  |  |
| 第二节 从动件常用运动规律             | 74  |  |
| 第三节 按给定运动规律设计凸轮轮廓         | 77  |  |
| 第四节 凸轮设计中应注意的问题           | 80  |  |
| 习 题                       | 81  |  |
| 第六章 齿轮机构                  | 82  |  |
| 第一节 齿轮机构的应用和分类            | 82  |  |
| 第二节 齿廓啮合基本定律              | 83  |  |
| 第三节 渐开线及渐开线齿轮             | 84  |  |
| 第四节 渐开线标准直齿圆柱齿轮的基本参数和几何尺寸 | 85  |  |
| 第五节 渐开线直齿圆柱齿轮的啮合传动        | 87  |  |
| 第六节 渐开线直齿轮的切削加工方法         | 88  |  |
| 第七节 根切现象、最少齿数及变位齿轮的概念     | 90  |  |
| 第八节 斜齿圆柱齿轮机构              | 91  |  |
| 第九节 圆锥齿轮机构                | 94  |  |
| 习 题                       | 96  |  |
| 第七章 间歇运动机构                | 97  |  |
| 第一节 槽轮机构                  | 97  |  |
| 第二节 棘轮机构                  | 98  |  |
| 第三节 不完全齿轮机构               | 100 |  |
| 习 题                       | 101 |  |
| 第八章 轮系                    | 102 |  |
| 第一节 轮系的分类                 | 102 |  |
| 第二节 定轴轮系的传动比              | 102 |  |
| 第三节 周转轮系及其传动比             | 104 |  |
| 第四节 混合轮系及其传动比             | 106 |  |
| 第五节 其他类型的行星传动简介           | 107 |  |

|                         |     |                          |     |
|-------------------------|-----|--------------------------|-----|
| 习 题 .....               | 110 | 计算 .....                 | 172 |
| <b>第九章 机械设计概论</b> ..... | 112 | 第六节 直齿圆锥齿轮传动的强度          |     |
| 第一节 机械零件设计的基本要求         |     | 计算 .....                 | 175 |
| 和过程 .....               | 112 | 第七节 齿轮结构与润滑 .....        | 176 |
| 第二节 机械零件的常用材料           |     | 习 题 .....                | 179 |
| 及选择 .....               | 113 | <b>第十四章 蜗杆传动</b> .....   | 181 |
| 第三节 机械零件的工作能力和          |     | 第一节 概述 .....             | 181 |
| 计算准则 .....              | 117 | 第二节 蜗杆传动的主要参数和几          |     |
| 第四节 现代机械设计方法简介 .....    | 120 | 何尺寸 .....                | 182 |
| 习 题 .....               | 121 | 第三节 蜗杆传动的效率、润滑及热平衡       |     |
| <b>第十章 联接</b> .....     | 122 | 计算 .....                 | 184 |
| 第一节 螺纹联接的基础知识 .....     | 122 | 第四节 蜗杆、蜗轮的材料及结构 .....    | 186 |
| 第二节 机械制造中的常用螺纹 .....    | 125 | 第五节 蜗杆传动的强度计算 .....      | 187 |
| 第三节 螺纹联接的基本类型和紧         |     | 习 题 .....                | 190 |
| 固件 .....                | 126 | <b>第十五章 机械传动总论</b> ..... | 191 |
| 第四节 螺纹联接的预紧与防松 .....    | 127 | 第一节 机械传动的功用 .....        | 191 |
| 第五节 螺纹联接的强度计算 .....     | 129 | 第二节 机械传动的选择 .....        | 193 |
| 第六节 键联接和花键联接 .....      | 135 | 第三节 机械传动的运动和动力           |     |
| 习 题 .....               | 138 | 计算 .....                 | 194 |
| <b>第十一章 带传动</b> .....   | 139 | 第四节 机械传动方案设计示例 .....     | 196 |
| 第一节 概述 .....            | 139 | 习 题 .....                | 199 |
| 第二节 V带和V带轮 .....        | 140 | <b>第十六章 弹性元件</b> .....   | 200 |
| 第三节 带传动的工作情况分析 .....    | 143 | 第一节 概述 .....             | 200 |
| 第四节 V带传动的设计计算 .....     | 146 | 第二节 螺旋弹簧 .....           | 201 |
| 第五节 V带传动的张紧装置 .....     | 152 | 第三节 片簧 .....             | 208 |
| 习 题 .....               | 153 | 第四节 其他类型弹性元件简介 .....     | 210 |
| <b>第十二章 链传动</b> .....   | 154 | 习 题 .....                | 213 |
| 第一节 概述 .....            | 154 | <b>第十七章 轴</b> .....      | 214 |
| 第二节 传动链和链轮 .....        | 154 | 第一节 概述 .....             | 214 |
| 第三节 链传动的运动特性和参数         |     | 第二节 轴的结构设计 .....         | 215 |
| 选择 .....                | 157 | 第三节 轴的强度计算 .....         | 218 |
| 第四节 链传动的设计计算 .....      | 159 | 习 题 .....                | 222 |
| 习 题 .....               | 161 | <b>第十八章 滑动轴承</b> .....   | 224 |
| <b>第十三章 齿轮传动</b> .....  | 162 | 第一节 概述 .....             | 224 |
| 第一节 齿轮传动的失效型式和          |     | 第二节 滑动轴承的结构型式 .....      | 224 |
| 材料 .....                | 162 | 第三节 滑动轴承的材料 .....        | 226 |
| 第二节 齿轮传动的精度 .....       | 163 | 第四节 滑动轴承的润滑 .....        | 228 |
| 第三节 圆柱齿轮传动的受力及计算        |     | 第五节 非液体摩擦滑动轴承的           |     |
| 载荷 .....                | 164 | 计算 .....                 | 231 |
| 第四节 直齿圆柱齿轮传动的强度         |     | 第六节 液体摩擦滑动轴承简介 .....     | 232 |
| 计算 .....                | 165 | 习 题 .....                | 233 |
| 第五节 斜齿圆柱齿轮传动的强度         |     | <b>第十九章 滚动轴承</b> .....   | 234 |

|     |                          |     |      |                 |     |
|-----|--------------------------|-----|------|-----------------|-----|
| 第一节 | 概述 .....                 | 234 | 第二十章 | 联轴器、离合器 .....   | 249 |
| 第二节 | 滚动轴承类型的选择 .....          | 237 | 第一节  | 概述 .....        | 249 |
| 第三节 | 滚动轴承的失效形式及选择<br>计算 ..... | 237 | 第二节  | 联轴器的种类及特点 ..... | 249 |
| 第四节 | 滚动轴承组合设计 .....           | 242 | 第三节  | 联轴器的选择 .....    | 253 |
| 第五节 | 非标准散装滚动轴承 .....          | 246 | 第四节  | 离合器 .....       | 254 |
| 习 题 | .....                    | 247 | 习 题  | .....           | 257 |
|     |                          |     | 参考文献 | .....           | 258 |

# 绪 论

机械是机器和机构的总称，是人类在生产中用以减轻或代替体力劳动和提高生产率的主要工具。随着科学技术的发展，使用机械进行生产的水平已经成为衡量一个国家技术水平和现代化程度的重要标志之一。

## 第一节 机械的组成

机械的种类繁多，形式各不相同。但就其组成来说，一部完整的机械主要有以下四个部分，如图 0-1。

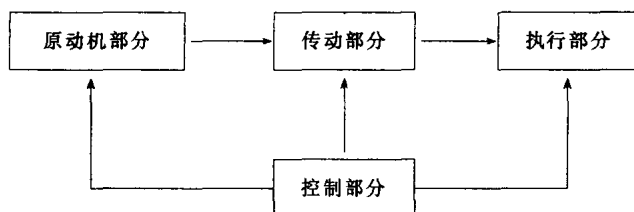


图0-1 机械的组成

**原动机** 是机械的动力来源，除最常用的电动机外，尚有热力机（内燃机、汽轮机、燃气机）。原动机的作用是把他形式能转变为机械能以驱动机械运动和作功。

**执行部分** 或称工作部分，是直接完成机器预定功能的部分，如起重机的吊钩、车床的刀架、仪表的指针等。

**传动部分** 它是将原动机的运动和动力传递给工作部分的中间环节，在传递运动方面，它可以改变运动速度、转换运动形式等，从而满足执行部分的各种要求。如将高转速变为低转速，小转矩变为大转矩，回转运动变为直线运动等。

**控制部分** 或称操纵部分，它是用来控制机器的其他基本部分，使操作者能随时实现或终止各自预定的功能。如机器的开停、运动速度和方向的改变等。一般来说，现代机械的控制部分包括机械控制和电子控制系统。随着科学技术和生产的发展，对机械的功能和高度自动化的要求日益增长，因此对控制系统的要求也越来越高。

上述前三部分可以组成简单的机器，有的甚至只有原动机和执行部分，如水泵、砂轮机。但是对于较复杂的机器，除有上述四个基本组成部分外，还有润滑装置、照明装置等。

## 第二节 本课程研究的对象和内容

在现代机械中，常用的传动系统有机械的、电力的、液压和气压的，其中机械传动应用最广。机械传动通常是由各种机构和各种零件组成。

如图 0-2 所示单缸四冲程内燃机，它是由气缸体 1、活塞 2、进气阀 3、排气阀 4、连杆 5、曲柄 6、凸轮 7、顶杆 8、齿轮 9 和 10 等组成。燃气推动活塞作往复移动，经连杆转变为曲轴

的连续转动。凸轮和顶杆是用来启闭进、排气阀的。在曲轴和凸轮轴之间安装了齿数比为1:2的齿轮曲轴,是保证曲轴每转两周进、排气阀各启闭一次。这样,当燃气推动活塞运动时,进排气阀有规律地启闭,就把燃气的热能转换为曲轴转动的机械能。该机主要包括由气缸体(机架)、活塞(视作滑块)、连杆和曲柄组成的曲柄滑块机构,由凸轮、顶杆和机架组成的凸轮机构以及齿轮和机架组成的齿轮机构。

由以上实例可以看出,机构的特征是:人为的实物组合,其各部分之间具有确定的相对运动。机器是由机构组成的,一部机器可以包含几个机构,也可以只包含一个机构,如电动机、鼓风机。机器具备机构的两个特征,而且还能够实现能量的转换(如内燃机、发电机)或完成有效的机械功(如起重机、机床)。仅从结构和运动的观点看,机器与机构并无区别,因此,通常把机器与机构统称为机械。

组成机构的各个相对运动的实体称为构件。构件可以是单一的整体(如活塞),也可以是多个零件的刚性联接如图0-2所示内燃机中,凸轮轴7与齿轮9以及曲轴6与齿轮10都是作为一个整体作回转运动,各构成一个构件。连杆也是由许多零件构成的。这些零件形成一个整体而进行运动,所以称为一个构件。由此可知,构件是运动的单元,而零件是制造的单元。

机械中的零件分为两类,一类是通用零件,在各类机械中都经常遇到,如齿轮、螺钉、轴、弹簧等;另一类是专用零件,只用于某些类型的机械中,如内燃机的活塞、电动机的转子等。

机械设计基础主要研究常用机构(如连杆机构、凸轮机构、间歇机构、齿轮机构等)和通用零件的工作原理、结构特点、基本设计理论和计算方法。

机械设计基础是一门综合性、实践性很强的技术基础课,在学习本课程以前,应具备机械制图、工程力学、工程材料等先修课程的基础理论和金工实习生产劳动的实践知识。通过本课程的学习,可以培养学生初步具备运用手册设计机械传动装置和简单机械的能力,并为学习有关专业机械设备课程和从事技术革新奠定理论基础。

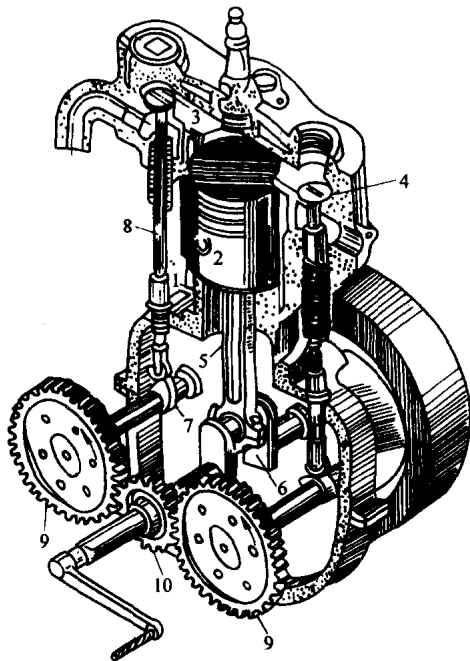


图 0-2 单缸四冲程内燃机



# 第一章 物体受力分析与平衡

## 第一节 基本概念和物体的受力分析

### 一、基本概念

#### 1. 力

力是物体间的相互作用，力对物件的作用效应使物体的机械运动发生了变化，同时也发生变形。前者称为力的外效应（又称运动效应）；后者称为力的内效应（又称变形效应）。在理论力学中，把物体看作不变形的刚体，也就是只研究力的运动效应，在材料力学里才研究力的变形效应，即把物体的变形看成主要因素，这时就必须以另一种模型——变形固体来代替。在静力学中研究的对象主要是刚体，所以也称刚体静力学。

实践表明，力对物体的作用效应取决于以下三个要素：①力的大小；②力的方向（包括方位和指向）；③力的作用点。

在国际单位制中，以牛顿（N）或千牛顿（kN）为力的单位。

力是矢量。力的图像表示是一有向线段，线段的长度按选定的比例表示力的大小，线段的方位和箭头指向表示力的方向，线段的始端和末端表示力的作用点（图 1-1）。当用符号表示力矢量时，应用黑体字母  $F$ 。一般只代表力的大小。

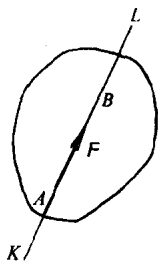


图 1-1 力的图像表示

#### 2. 力系

力系是指作用于同一物体的一群力。各力的作用线在同一平面内的力系称为平面力系，不在同一平面内的力系称为空间力系。各力的作用线相交于同一点的力系称为汇交力系（或共点力系）；各力作用线相互平行的力系称为平行力系；各力作用线既不相交于一点又不相互平行的力系称为任意力系。

如果作用于物体上的力系可以用另一力系来代替而效果相同，那么这两个力系互称为等效力系。如果物体在某一力系作用下，其运动状态不变，则称此力系为平衡力系。

#### 3. 力的性质

（1）二力平衡公理 一刚体在二力作用下处于平衡状态，其必要和充分条件是：此二力大小相等，方向相反，且作用在一直线上（图 1-2）。这两个力可能是拉力，也可能是压力。

工程中常见到只受二力作用而处于平衡的构件，称之为二力构件，或称二力杆。显然该两力沿作用点的连线具有等值、反向、共线的特性。

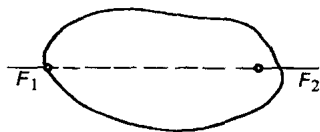


图 1-2 二力平衡条件

（2）力的可传性 作用于刚体上的力可以沿其作用线移动到刚体内的任意一点，而不改变该力对刚体的作用效应。

证明：设力  $F$  作用于某刚体上的点  $A$ （图 1-3a），在力  $F$  作用线上任取一点  $B$ ，加上等值、反向、共线的两个力  $F_1$ 、 $F_2$ ，使  $F_1 = -F_2 = F$ （图 1-3b）。显然， $F$ 、 $F_2$  组成一对平衡力系，

去掉该力系, 于是只剩下作用于  $B$  点的力  $F_1$  (图 1-3c), 这就相当于将力  $F$  自点  $A$  沿其作用线移至点  $B$ 。

由上述讨论可知, 作用于刚体上的力是滑移矢量, 其三要素可改变为: 力的大小、方向和作用线。

(3) 力的平衡四边形法则 作用在物体上同一点的两个力, 可以合成为作用于该点的一个合力, 合力的大小和方向由两力为邻边所构成的平行四边形的对角线确定, 如图 1-4a, 这称为力的平行四边形法则。用矢量式表示为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-1)$$

由作图求合力时, 通常只需画出半个平行四边形, 即三角形就足够了。从任一点  $a$  开始画矢量  $\mathbf{ab} = \mathbf{F}_1$ , 再从点  $b$  画矢量  $\mathbf{bc} = \mathbf{F}_2$ , 封闭边矢量  $\mathbf{ac}$  便代表合力  $\mathbf{R}$  的大小

和方向 (图 1-4b)。三角形  $abc$  称为力三角形, 这种求合力的方法称为力三角形法。

力的平行四边形法则是力系合成的主要依据, 同时, 它也是力分解的法则。在实际问题中, 常将两力沿互相垂直的方向分解, 所得的两个分力称为正交分力。

推论 (三力汇交定理) 刚体在受同平面内的三个不平行的力作用而平衡时, 此三力的作用线必相交于一点, 这一性质称为三力汇交定理。

(4) 作用与反作用定律 两物体间的作用力与反作用力总是大小相等, 方向相反, 沿同一直线, 分别作用在这两个物体上。这一性质称为作用与反作用定律或牛顿第三定律。

力总是成对出现, 有作用力必然有反作用力。它们同时出现, 同时消失。

## 二、约束和约束反力

限制物体运动的其他物体称为约束。约束对该物体的作用力, 称为约束反力。被约束的物体除受约束反力外, 同时还承受其他载荷, 如重力、气体压力、切削力等, 它们称之为主动动力。约束反力取决于约束本身的特征, 同时还与主动力有关, 它属于被动力。

下面介绍工程中常见的几种约束类型。

### 1. 柔性体约束

绳子、链条、皮带、钢丝等柔性物体, 只能阻止物体沿柔性体伸长方向的运动而不能阻止其他任何方向的运动, 因而这类约束的约束反力必沿柔性体的中心线且背离被约束的物体 (图 1-5)。

### 2. 光滑面约束

这类约束由表面为理想光滑的物体构成。它只能阻止物体沿接触面的公法线且趋向于约束内部的运动。因此, 其约束反力只能是沿接触面的公法线且指向被约束的物体 (图 1-6)。

### 3. 光滑铰链约束

这类约束包括圆柱形铰链约束和球形铰链约束。

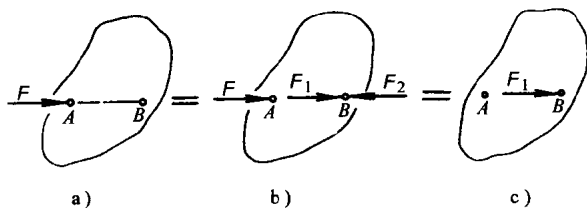


图 1-3 力的可传性

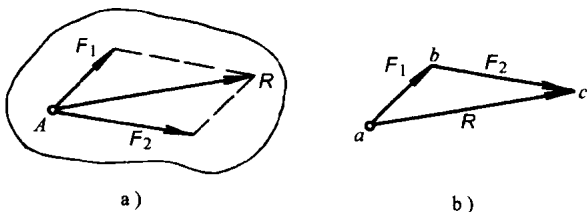


图 1-4 力的合成

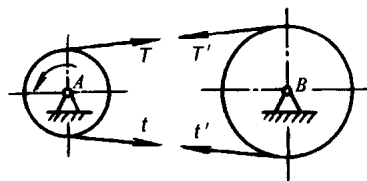


图 1-5 柔性体约束

(1) 光滑圆柱形铰链约束 这类约束是由销钉连接两带孔的构件组成。工程中常见的有中间铰链约束、固定铰链约束和活动铰链约束三种形式。销钉把具有相同孔径的两物体连接起来,便构成了中间铰链约束(图 1-7a)。当忽略摩擦时,销钉对两物体的约束相当于光滑面约束,因此其约束反力必沿接触面的公法线而指向物体。但物体与销钉的接触点的位置与其受力有关,预先不能确定,所以约束反力的方向亦不能确定,通常用两正交分量来代替。各分矢量的指向可任意假设。图 1-7b 为其力学模型。如果销钉连接的两物体中有一个固联于地面(图 1-8a),这类约束称为固定铰链约束,其约束反力的表示方法与中间铰链约束相同,图 1-8b 为其力学模型。根据工程需要,把固定铰链约束用几个辊轴支承在光滑面上,便构成了活动铰链约束(图 1-9a)。这种约束是由光滑面和铰链两种约束组合而成的一种复合约束型式,其约束反力的作用线必垂直于支承面且过铰链中心。图 1-9b 为其力学模型。

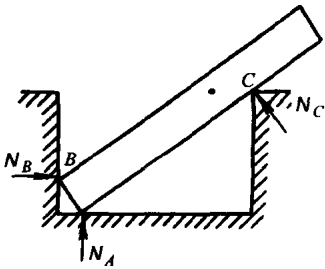


图 1-6 光滑面约束

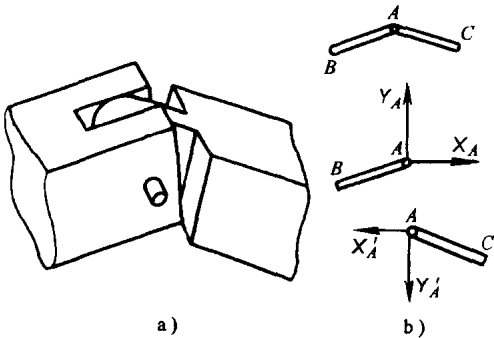


图 1-7 中间铰链约束

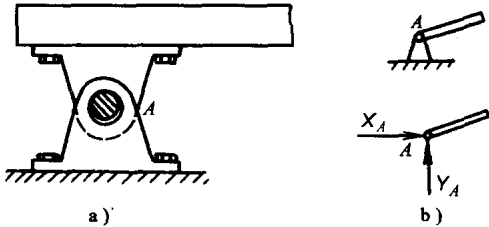


图 1-8 固定铰链约束

(2) 球形铰链约束 这是一种空间约束形式。杆端的球体放在球窝内便构成了球形铰链约束(图 1-10a)。球体可在球窝内任意转动,但不能沿径向移动,因此其约束反力作用于接触点且通过球心。但由于接触点的位置与其受力有关,不能预先确定,故约束反力亦不能预先确定,可用三个正交分量来代替。图 1-10b 为其力学模型。

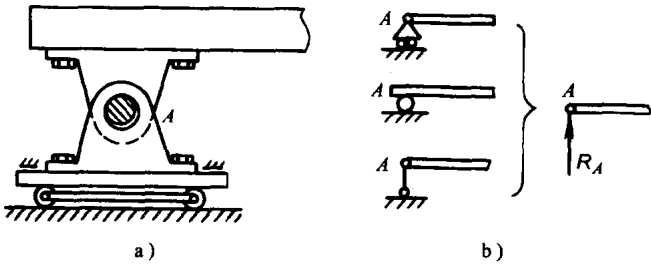


图 1-9 活动铰链约束

三、受力分析——画受力图

在工程实际中,为了求出未知的约束反力,需要根据已知力,应用平衡条件求解。为此,首先要确定研究对象,并分析其受力情况,这个过程称为受力分析。为了清晰地表示物体的受力情况,需要把它从其相联系的周围物体中分离出来,被分离出来的

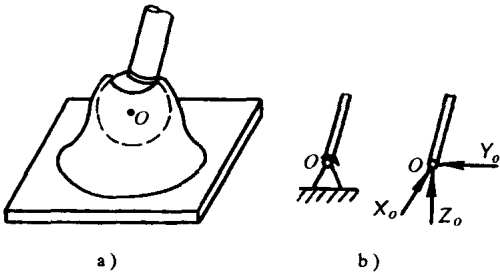


图 1-10 球形铰链约束

物体称为分离体，然后在分离体上画出作用于其上的所有力（包括主动力和约束反力），这种表示物体受力情况的简明图形称为受力图。

对研究对象进行受力分析并正确地画出其受力图，是解决静力学问题的一个重要步骤。下面通过例子说明受力图的画法。

**例 1-1** 如图 1-11a 所示的三铰拱结构，由左、右两拱铰接而成。设各拱自重不计，在拱 AC 上作用一铅垂载荷  $P$ 。试分别画出拱 AC 和 BC 的受力图。

**解：**1) 取拱 BC 为研究对象，画出其分离体图。由于自重不计，BC 只在 B、C 两处受到铰链约束，因此拱 BC 为二力杆。由二力平衡条件，可确定 B、C 处的约束反力  $F_B$ 、 $F_C$ （图 1-11b）。

2) 取拱 AC 为研究对象，画出其分离体图。由于自重不计，主动力只有载荷  $P$ 。在铰链 C 处拱受到 BC 给它的反作用力  $F'_C$ 。由作用和反作用定律， $F'_C = -F_C$ 。由于 A 处约束反力方位未定，可用两正交分量  $X_A$ 、 $Y_A$  代替（图 1-11c）。

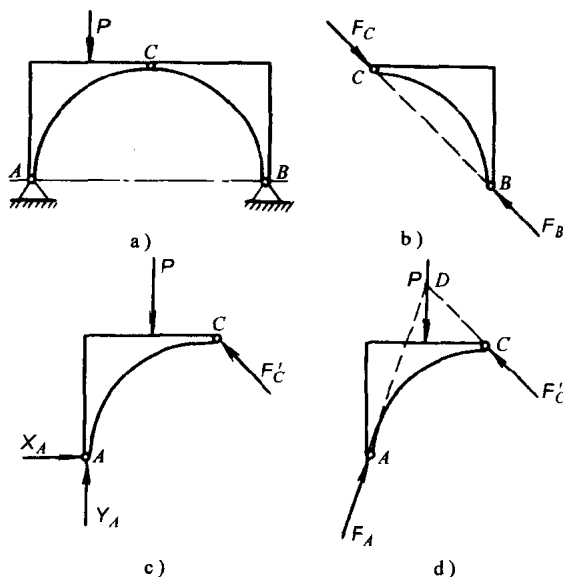


图 1-11 受力图的画法

另外，通过进一步分析可知，拱 AC 在三个共面力作用下处于平衡状态，由三力汇交定理，可确定铰链 A 处约束反力  $F_A$  的方位（图 1-11d）。

## 第二节 平面汇交力系

本节将用两种方法讨论平面汇交力系的合成与平衡问题。

### 一、平面汇交力系的合成与平衡——几何法

#### 1. 平面汇交力系的合成

设在刚体上作用一平面汇交力系  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$ ，各力作用线汇交于点 A。根据刚体内部力的可传性，将各力沿其作用线移至汇交点 A（图 1-12a）；然后连续应用力的三角形法将各力依次合成，最后得到一个通过汇交点 A 的合力  $R$ （图 1-12b）。多边形 abcde 称为此平面汇交力系的力多边形，其封闭边 ae 即表示此平面汇交力系的合力的大小和方向，这种利用几何作图求合力的方法称为几何法。

实际作图时，中间合力矢  $R_1$ 、 $R_2$  的虚线不必画出，只要将力系中各矢量依次首尾相接地

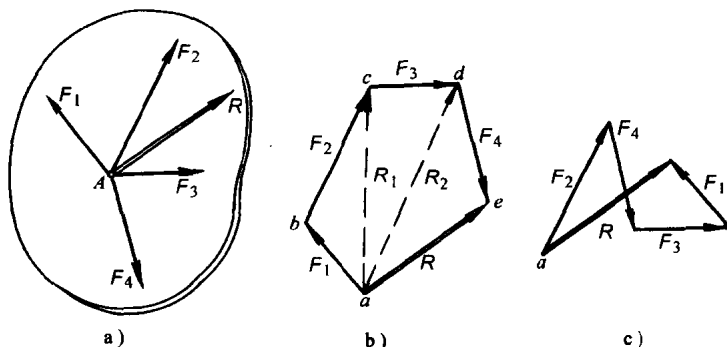


图 1-12 平面汇交力系的合成与平衡——几何法

连成折线,然后用一矢量连接折线的首末两点,即可得一封闭的力多边形,封闭边即为该力系的合力。并且,所得结果与各力矢合成的先后顺序无关。改变合成顺序所得合力矢不变,但力多边形的形状将会改变(图 1-12c)。合力  $R$  的矢量表示式为

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

上述方法可推广到任意个汇交力的情况。此时力系的合成可表示为:

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \Sigma F \quad (1-2)$$

即平面汇交力系的合成结果是一个合力,它等于该力系中各力的矢量和,其作用线通过原力系的汇交点。

## 2. 平面汇交力系平衡的几何条件

若用几何法求平面汇交力系的合力时,各力矢所构成的力多边形自行封闭(即第一个力的始端与最后一个力的终端相重合),则合力  $R$  等于零,该力系为平衡力系。所以平面汇交力系平衡的必要与充分的图解条件是:该力系的力多边形自行封闭。以矢量式表示,平面汇交力系的平衡条件为

$$R = \Sigma F = 0 \quad (1-3)$$

## 二、平面汇交力系的合成与平衡—解析法

解析法是通过力矢在坐标轴上的投影来分析力系的合成及其平衡条件。

### 1. 力在坐标轴上的投影与力的解析表达式

设有一力  $F$ ,它与  $x$  轴正向之间的夹角为  $\alpha$ ,与  $y$  轴正向之间的夹角为  $\beta$ (图 1-13)。从力  $F$  的两端  $A$  和  $B$  分别向  $x$  轴作垂线  $Aa$  及  $Bb$ ,则从垂足  $a$  到垂足  $b$  的线段  $ab$  的长度,冠以适当的正负号,称为力  $F$  在  $x$  轴上的投影,用  $X$  表示。力在轴上的投影是代数量。若投影线段  $ab$  与  $x$  轴正向一致,则  $X$  为正值;相反则为负值。

由直角三角形  $ABC$ ,可得

$$X = F \cos \alpha \quad (1-4)$$

应该注意,式中的  $F$  代表力矢  $F$  的模(或大小),一定是正值。因此可以看出,当角  $\alpha$  是锐角时,  $X > 0$ ,当角  $\alpha$  是钝角时,  $X < 0$ 。

同样,设用  $Y$  代表力  $F$  在  $y$  轴上的投影,则

$$Y = F \cos \beta \quad (1-4)'$$

若已知  $\alpha$ 、 $\beta$  与  $F$ ,可通过上式求出力在轴上的投影大小;反之,若已知  $X$  与  $Y$ ,则  $F$ 、 $\alpha$  与  $\beta$  可通过下式来求出

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}, \cos \alpha = X/F, \cos \beta = Y/F \quad (1-5)$$

由图 1-13 可知,力  $F$  可沿正交轴  $Ox$ 、 $Oy$  分解为两个分力  $F_x$  和  $F_y$ ,分力与力的投影之间有下列关系

$$F_x = Xi, F_y = Yj$$

由此可得到力的解析表达式为:

$$F = Xi + Yj \quad (1-6)$$

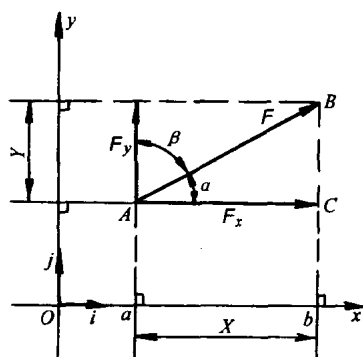


图 1-13 力的投影与力的分解

其中  $i$ 、 $j$  分别为沿  $x$  轴、 $y$  轴的单位矢量。

## 2. 平面汇交力系合成

平面汇交力系合成的解析法的理论基础是合力投影定理。

设有平面汇交力系  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$ ，该力系的力多边形为  $abcde$ ，则封闭边  $ae$  表示该力系的合力  $R$  (图 1-14)。取坐标系  $Oxy$ ，将所有力矢向  $x$  轴及  $y$  轴上投影。由图可以看出：

$$a_1e_1 = a_1b_1 + b_1c_1 - c_1d_1 + d_1e_1$$

$$a_2e_2 = a_2b_2 - b_2c_2 - c_2d_2 - d_2e_2$$

即

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4, Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

上面的结果可推广到任意个汇交力的情况。

设有一平面汇交力系  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $\dots$ 、 $F_n$ 。已知各力在  $x$  轴与  $y$  轴上的投影分别为  $X_1$ 、 $Y_1$ ， $X_2$ 、 $Y_2$ ， $\dots$ ， $X_n$ 、 $Y_n$ 。而合力  $R$  在  $x$  轴与  $y$  轴上的投影分别记为  $R_x$ 、 $R_y$ 。则

$$R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum X, R_y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum Y \quad (1-7)$$

即合力在任意轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。这一结论称为合力投影定理。知道了合力的投影  $R_x$  与  $R_y$ ，则合力的大小和方向可用下列公式求出

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}, \cos\alpha = \sum X/R, \cos\beta = \sum Y/R \quad (1-8)$$

## 3. 平面汇交力系的平衡方程

平面汇交力系平衡的必要与充分条件是：该力系的合力  $R$  等于零。由式 (1-8)

$$R = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = 0$$

可得

$$\sum X = 0, \sum Y = 0 \quad (1-9)$$

上述方程称为平面汇交力系的平衡方程，即平面汇交力系平衡的解析条件是：各力在两坐标轴上的投影的代数和均等于零。应用这两个独立的方程，可以求解两个未知量。

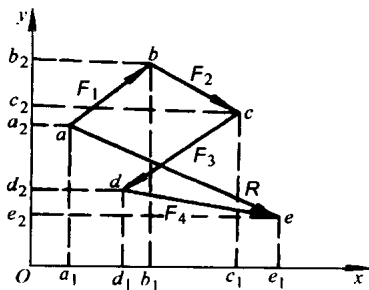


图 1-14 平面汇交力系合成——解析法

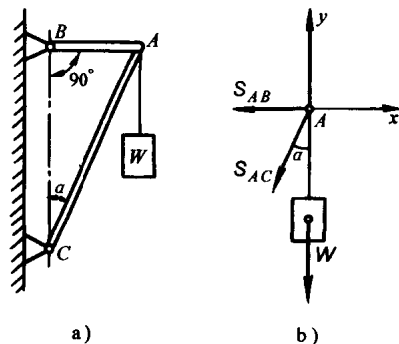


图 1-15 平面汇交力系的平衡问题举例

**例 1-2** 试求图 1-15a 所示的支架中杆  $AB$  和杆  $AC$  的受力。各杆自重不计， $AB=0.7\text{m}$ ， $AC=1.7\text{m}$ ，重物重  $W=9800\text{N}$ 。 $B$ 、 $C$  为固定铰支座， $A$  为中间铰，且  $B$ 、 $C$  两点位于同一铅垂线上。

**解：** 1) 取铰链  $A$  及重物为研究对象。

2) 分析受力，杆  $AB$ 、 $AC$  均为二力杆，其约束反力  $S_{AB}$  和  $S_{AC}$  的指向不能预先确定，在此假设两杆均受拉，它们与重力  $W$  组成一平面汇交力系，其受力图如图 1-15b 所示。

3) 建立坐标系  $Axy$  如图 1-15b 所示。

## 4) 列平衡方程并求解

$$\Sigma X=0, -S_{AC}\sin\alpha - S_{AB}=0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y=0, -S_{AC}\cos\alpha - W=0 \quad (2)$$

由式②得

$$S_{AC} = -W/\cos\alpha = -10.75\text{kN}$$

将  $S_{AC}$  代入①得

$$S_{AB} = -S_{AC}\sin\alpha = W\tg\alpha = 4.43\text{kN}$$

其中  $S_{AC}$  为负值, 说明杆  $AC$  实际受压;  $S_{AB}$  为正值, 说明杆  $AB$  确实受拉。

### 第三节 力对点之矩、力偶

#### 一、力对点之矩 (力矩)

如图 1-16 所示, 平面上作用一力  $F$ , 在同平面内任取一点  $O$ , 点  $O$  称为矩心, 矩心  $O$  至力  $F$  的作用线的垂直距离  $h$  称为力臂。力  $F$  的模与力臂  $h$  的乘积, 冠以适当的正负号, 称为力  $F$  对点  $O$  之矩, 用符号  $m_0(F)$  表示

$$m_0(F) = \pm Fh \quad (1-10)$$

式中的正负号规定如下: 力使物体绕矩心逆时针转向转动时, 取为正; 反之则取为负。在国际单位制中, 力矩的单位是牛顿·米 ( $\text{N}\cdot\text{m}$ )。

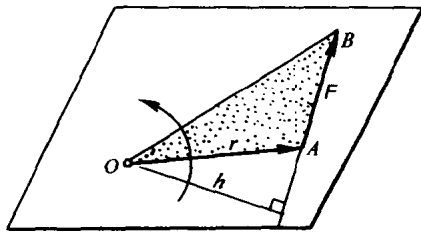


图 1-16 力对点之矩

由图 1-16 可知, 力矩的大小亦可以用以力  $F$  为底边, 矩心  $O$  为顶点所构成的三角形面积的两倍来表示。因此, 力矩又可表示为

$$m_0(F) = \pm 2S_{\triangle OAB}$$

力对点之矩有下述性质:

1) 同一个力  $F$  的力矩, 随矩心位置的改变而改变, 选取不同的点为矩心, 力矩  $m_0(F)$  可正可负, 可大可小。

2) 力矩  $m_0(F)$  并不因力  $F$  的作用点沿作用线的移动而改变。

3) 若力  $F=0$  或力  $F$  的作用线通过矩心  $O$ , 则  $m_0(F) = 0$ 。

4) 若力  $R$  为共点二力  $F_1$  及  $F_2$  的合力, 则合力对于同平面内任一点之矩等于各分力对同一点之矩的代数和, 即

$$m_0(R) = m_0(F_1) + m_0(F_2) \quad (1-11)$$

这一结论称为合力矩定理。这个定理也适用于有合力存在的其他各种关系, 这将在后面的有关章节论证。

在计算力矩时, 若力臂不易求出, 常将力分解为两个易定力臂的分力 (通常是正交分解), 然后应用合力矩定理求解。

#### 二、力偶及平面力偶系的合成与平衡

##### 1. 力偶和力偶矩

力学上把大小相等, 方向相反, 作用线平行且不共线的两个力称为力偶, 用符号  $(F, F')$  表示, 两力作用线所决定的平面称为力偶作用面, 两力作用线之间的垂直距离称为力偶臂 (图 1-17)。

力偶是两个具有特殊关系的力的组合,它既不能合成一个力,也不能用一个力来等效替换,并且也不能由一个力来平衡,力偶只能由力偶来平衡,因而力偶是一个基本力学量,它只能使物体产生转动效应。力偶对物体的转动效应是用力偶矩来度量的。力偶中力的大小与力偶臂长度的乘积,冠以适当的正负号,称为力偶矩,如以  $M(F, F')$  表示力偶  $(F, F')$  之矩,则

$$M(F, F') = \pm Fd \quad (1-12)$$

图 1-17 力偶

力偶的正负号规定与力矩相同,以逆时针转向为正,反之则为负。在国际单位制中,力偶矩的单位是  $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

## 2. 力偶的性质

作用于同一平面内的两个力偶,若其力偶矩相等,则该两力偶彼此等效,这就是力偶的等效定理。

由上述定理可以得到力偶的下面两个性质:

性质 1 力偶可以在其作用面内任意移动,而不改变它对刚体的作用效应。

性质 2 只要保持力偶矩不变,可以任意改变力偶中力的大小和相应地改变力偶臂的长短,而不影响它对刚体的作用效应。

力偶除可以用力与力偶臂表示外,还可直接用力偶矩  $M$  来表示。图 1-18 列出了力偶的几种常见的表示方法。

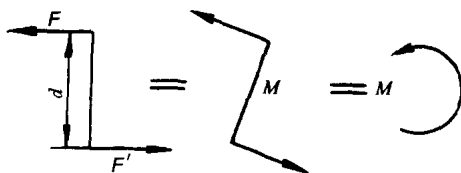


图 1-18 力偶的几种常见的表示方法

## 3. 平面力偶系的合成与平衡条件

作用于同一刚体上的一群力偶称为力偶系。若力偶系中各力偶均位于同一平面内,则称为平面力偶系。

刚体在平面力偶系的作用下的作用效应与一个力偶等效。换言之,平面力偶系可以合成一个力偶,合力偶矩等于原力偶系中各力偶矩的代数和,即

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M \quad (1-13)$$

若平面力偶系的合力偶矩等于零,则物体在该力偶系的作用下处于平衡状态。由此可以得出,平面力偶系平衡的必要与充分条件是:力偶系中各力偶矩的代数和等于零,即

$$\sum M = 0 \quad (1-14)$$

**例 1-3** 横梁  $AB$  长  $l$ ,  $A$  端为固定铰支座,  $B$  端用杆  $BC$  支撑 (图 1-19a)。梁上作用一力偶,其力偶矩为  $M$ 。梁和杆自重均不计。试求铰链  $A$  的约束反力和杆  $BC$  的受力。

**解:** 取梁  $AB$  为研究对象。梁  $AB$  上作用有矩为  $M$  的力偶及铰链  $A$  处的约束反力  $R_A$  与杆  $BC$  的约束反力  $S_B$  而处于平衡。由于力偶必须由力偶平衡,  $R_A$  与  $S_B$  必组成一力偶,其转向与

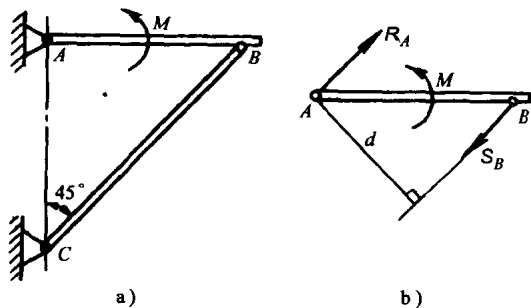


图 1-19 平面力偶系的平衡问题举例



$M$  相反, 由此可确定  $R_A$ 、 $S_B$  的指向 (图 1-19)。由力偶系平衡条件

$$\Sigma M = 0, M - S_B l \cos 45^\circ = 0$$

得

$$R_A = S_B = 2M/l$$

## 第四节 平面任意力系

本节将用解析法来研究平面任意力系的简化和平衡问题。在讨论这个问题之前, 必须先解决力向一点平移的问题。

### 一、力线平移定理

设在刚体上  $A$  点作用一力  $F$ , 如图 1-20a 所示。在刚体内任取一点  $O$ , 并在这一点加上一对平衡力  $F'$ 、 $F''$ , 且使  $F' = -F'' = F$  (图 1-20b), 显然, 力  $F$  与  $F''$  组成一力偶, 称为附加力偶, 其力偶臂为  $d$ 。这样, 原来作用于点  $A$  的力  $F$  可以由作用于点  $O$  的力  $F'$  与附加力偶 ( $F, F''$ ) 代替 (图 1-20c)。附加力偶矩为

$$M_0 = \pm Fd = m_0(F) \quad (1-15)$$

图 1-20 力线平移

由此可得如下结论: 作用于刚体上的力可以平移到刚体内的任一点, 但为了保持原力对刚体的作用效应不变, 必须附加一力偶, 该附加力偶的力偶矩等于原力  $F$  对新作用点  $O$  之矩。这一结论称为力线平移定理。

根据力线平移定理, 可将一个力化为一个力和一个力偶。反之, 也可将同平面内的一个力和一个力偶合成为一个力, 即由图 1-20c 化为图 1-20a, 这个力  $F$  与  $F'$  大小相等, 方向相反, 作用线平行, 作用线间垂直距离  $d = |M_0|/F' = |M_0|/F$ 。

### 二、平面任意力系向一点的简化及结果

设在刚体上作用一平面任意力系  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $\dots$ 、 $F_n$ , 各力的作用点分别为  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $\dots$ 、 $A_n$  (图 1-21a)。在力系所在的平面内任取一点  $O$ , 点  $O$  称为简化中心。根据力线平移定理, 把各力平行移至点  $O$ , 并加上相应的附加力偶。这样, 原力系就转换为作用于点  $O$  的平面汇交力系  $F'_1$ 、 $F'_2$ 、 $\dots$ 、 $F'_n$  和力偶矩为  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $\dots$ 、 $M_n$  的附加力偶系 (图 1-21b)。

平面汇交力系  $F'_1$ 、 $F'_2$ 、 $\dots$ 、 $F'_n$  可合成为作用线通过点  $O$  的一个力  $R'$  (图 1-21c)。因为  $F'_1$ 、 $F'_2$ 、 $\dots$ 、 $F'_n$  分别与  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $\dots$ 、 $F_n$  相等, 所以

$$R' = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \Sigma F \quad (1-16)$$

原力系中各力的矢量和  $R'$  称为平面任意力系的主矢。

力偶矩为  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $\dots$ 、 $M_n$  的平面力偶系可合成为一个力偶, 以  $M_0$  表示其力偶矩。由于

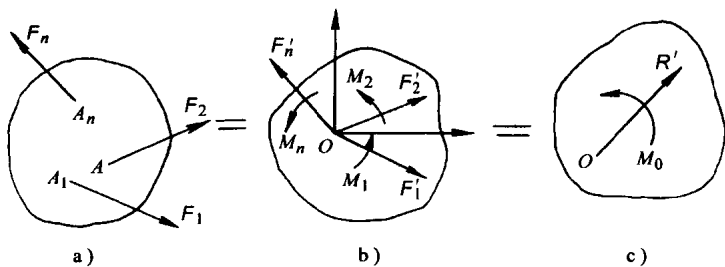


图 1-21 平面任意力系的简化