实变函数与泛函分析

薛昌兴　编

上册

高等教育出版社

实变函数与泛函分析

上　　册

薛昌兴　编

高等教育出版社

(京)112号

本书是作者参照高等师范院校和中学教师进修高等师范本科数学专业《实变函数与泛函分析教学大纲》编写的，超出要求部分用＊表示，以供选择.

全书分上、下两册出版. 上册是实变函数，内容为集合与映射、点集、测度论、可测函数、积分论共五章. 其中后三章主要论述 Lebesgue 测度和积分，并且对抽象测度和积分作了扼要介绍. 书中列举了较多的例、反例和注，每节后均配有一定数量的习题，有助于读者加深对概念的理解.

本书结构紧凑，叙述详尽，论证严谨，语言通俗，重点突出，由浅入深，思路清晰，便于自学.

本书适用于师范院校、教育学院的数学系，理工类学校也可采用.

责任编辑　丁鹤龄

实变函数与泛函分析

上　册

薛昌兴　编

＊

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

＊

开本 850×1168 1/32　印张 7　字数 170 000
1993 年5月第1版　1993 年5月第1次印刷
印数 0001-7 566
ISBN 7-04-004150-2/O·1193
定价 2.80 元

序 言

本书是根据高等学校理科数学、力学教材编审委员会于1980年5月审定的高等师范院校数学专业《实变函数与泛函分析教学大纲》和原教育部于1984年4月颁发的中学教师进修高等师范本科《实变函数论与泛函分析教学大纲》编写的. 书的初稿是1982年写成的，当时上述第二个大纲还未颁布，所以编写初稿时主要的依据是上述第一个大纲，后来在修改过程中注意且兼顾了上述第二个大纲的内容. 初稿写成后作为甘肃教育学院数学系《实变函数》和《泛函分析》两门课程的教材并已使用了十届，几年来在教学实践的基础上，又进行了多次修改. 这次出版前又根据1990年11月在南京大学召开的“实变函数论”与“泛函分析”教材编写大纲讨论会的精神以及有关专家、学者对书稿审阅时所提出的意见，再次作了修改. 为了使本书的适用范围能够稍广一些，在教学中有可供选择的余地，我们适当增加了一些内容，用星号“*”标出，以供教师教学时选用或学生课外阅读. 这些带星号“*”的内容在书中基本上是独立的，在教学中即便不讲，也不影响教材内容的衔接和系统性.

全书共九章分上、下两册出版. 上册是实变函数部分，内容包括集合与映射、点集、测度论、可测函数、积分论共五章；下册是泛函分析部分，内容包括度量空间、线性算子与线性泛函、内积空间和Hilbert空间、线性算子的谱共四章. 全书内容的安排注意了前后照应，自成体系.

考虑到实变函数与泛函分析这两门课的内容比较抽象，初学者往往有一定的困难. 为了减少教材的坡度，便于教与学，特别是便于自学，我们在内容的安排上注意贯彻由浅入深、循序渐进的原

则，对基本概念和定理都作了详细的叙述和严格的论证，在一些证明有难度的定理之前，编写了若干个引理或过渡性的定理，以使难度尽可能地分散．为了加深学生对概念的理解和掌握，书中列举了大量的正、反两个方面的例题．每节后还附有一定数量的可供选择的习题，其中有一部分习题是正文内容的补充，也有少数习题具有一定的难度，初学者可以不做．

根据我们的实践，授完上、下册各需72学时，共需144学时．如果泛函分析的课时较少，可只讲授下列章节中不带星号“*”的部分：第六章的1至8节，第七章的1至4节，第八章的1、2两节．这些章节仍自成一个体系．若尚有时间，还可讲授第七章5、6两节的部分或全部内容．

在本书的编写过程中，始终得到兰州大学陈文嫄教授和西北师范大学丁传松教授的热情关怀和指导，西北师范大学徐登洲教授和兰州大学范先令副教授、钟承奎博士都详细审阅了书稿，并提出了许多宝贵的修改意见，这些意见作者都采纳了，从而使本书增色不少．在出版过程中，承蒙北京师范大学钱佩玲先生仔细审查了书稿，并提出许多详尽的修改意见，对本书的最后定稿起了很重要的作用．在此我对上述各位先生和学者表示诚挚的感谢．我还要感谢我们学校、系的领导以及用此书稿试教过的同志，他们对本书的编写给予了许多方便和支持．

甘肃省教育委员会、甘肃省高等学校教材建设指导委员会和高等教育出版社，对此书的出版给予了极大的关怀和支持，在此作者表示深切的谢意．

由于作者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请教学同仁和读者批评指正．

作　　者

1990年12月

上 册 目 录

附：下 册 目 录

第一章　集合与映射

我们知道，数学分析研究的对象基本上是连续函数，由于它过多地依赖函数的连续性，而使得其理论应用起来不够灵便，在 Riemann 积分理论中，这个问题表现得很严重．对于一个函数项级数，要逐项积分，除了要求每一项都连续外，一般还要求一致收敛性，否则，一列可积函数的极限可能根本是不可积的，当然更谈不上逐项积分．可是在实际问题中，这个一致收敛的要求，常常或者是得不到满足，或者是招致繁复的论证，带来许多麻烦．另外，如重积分化成累次积分，或者交换两个无穷积分的次序，也发生类似的情况．所以，为了摆脱苛刻的限制，扩大研究的范围，力求更灵活的运算，就必须改进 Riemann 积分．

实变函数论的中心内容是 Lebesgue 积分，它正是为了克服 Riemann 积分的上述缺陷而提出来的，它不仅适用于连续函数，而且适用于比连续函数类更广泛的可测函数类，可测函数的定义域是 n 维 Euclid 空间中的可测点集，不必是区间或区域，积分的定义和运算依赖于对 Euclid 空间中的点集所建立的测度．为了把有关 Lebesgue 积分的各个环节逐个弄清楚，进而掌握积分的完整概念，我们将按照集合、点集、测度论、可测函数、积分论的次序来讨论，本章先介绍一些有关集合论的基本知识．

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念及其表示

集合也称作集，它是数学中的一个基本概念，要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情．正象几何学中的“点”、“直

线”、“平面”一样，“集合”这个概念必须用若干公理组成的公理系统来规定. 我们不准备在这里纠缠“集合”这个概念的严格规定，而是把集合看成是在一定场合所要考察和研究的某些对象的全体. 构成集合的每一个对象称为这个集合的元素或元. 例如，一个圆周上的点的全体构成一集合，这些点是此集合的元. 以实数为系数的多项式全体成一集合，这些多项式是此集合的元. 以集合作为成员(元素)的集合，也常称为集族或集类. 例如，以闭区间$[0,1]$上的点为中心，以$\frac{1}{2}$为半径的开区间全体成一集族，这些开区间是此集族的元.

以后常用大写字母$A,B,C,X,Y,Z,\cdots$表示集合，用小写字母$a,b,c,x,y,z,\cdots$表示集合中的元素.

如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作$a\in A$；或者说A含有a，记作$A\ni a$.

如果a不是集A的元素，就说a不属于A，记作$a\overline{\in}A$(或$a\notin A$)；或者说A不含有a，记作$A\overline{\ni}a$(或$A\not\ni a$).

有些集合可用列举其元素的办法来具体表示. 如：

只含有一个元素a的集合称为单元素集或独点集，可表示为$\{a\}$.

由有限个元素a_1，a_2，$\cdots$，a_n所组成的集合，可表示为$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

由全体自然数所组成的集合称为自然数集，可表示为$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

当集A是具有某性质p的元素之全体时，我们往往用下面的形式表示A：

$$A=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如方程$x^2-1=0$的解x的全体组成的数集是

$\{x|x^2-1=0\}$，实际上就是$\{1,-1\}$.

有时我们也把集$\{x|x\in E,\ x$具有性质$p\}$改写成$E[x$具有性质$p]$.

例如，设$f(x)$是定义在集合E上的一个实函数，a是一个实数，我们把集$\{x|x\in E,\ f(x)>a\}$可写成$E[f(x)>a]$或$E[f>a]$.

不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 空集或只含有有限个元素的集合称为有限集. 不是有限集的集合称为无限集.

下面我们讨论集合的关系：

设A，B是两个集，若A和B的元素完全相同，就称A和B相等，记作$A=B$(或$B=A$). 例如，

$$\{x|x^2-1=0\}=\{1,-1\}.$$

若集合A的元素都是集合B的元素，就称A是B的子集，记作$A\subset B$(或$B\supset A$)，读作A包含于B(或B包含A).

若$A\subset B$，而B中确有元素b不属于A，就称A是B的真子集. 例如，整数集是有理数集的真子集. 我们规定空集是任何集的子集.

为了今后叙述问题方便起见，我们先介绍几个常用的记号.

$\Leftrightarrow$　表示当且仅当，等价或充分必要条件.

“$\Rightarrow$”　表示必要性.

“$\Leftarrow$”　表示充分性.

$\Rightarrow$　表示蕴含，如$A\Rightarrow B$表示若A成立，则B一定成立.

$\forall$　表示对任意的，对每一个.

$\exists$　表示存在.

$\forall$和$\exists$分别称为全称量词和存在量词. 存在量词不能省略，但全称量词往往省略.

由集的“相等”与“包含”的定义可立得如下两个定理：

定理 1.1.1　设A，B是两个集合，则$A=B\Leftrightarrow A\subset B$且$B\subset A$.

定理 1.1.2 对任意集合 A,B,C,均有

1) $A\subset A$;

2) 若 $A\subset B, B\subset C$,则 $A\subset C$.

1.1.2 集合的运算

设 A,B 是两个集合. 集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

称为 A 与 B 的并集或并,记作 $A\cup B$. 集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

称为 A 与 B 的交集或交,记作 $A\cap B$. 特别地,若 $A\cap B=\varnothing$, 称 A 与 B 不相交;反之,即若 $A\cap B\neq\varnothing$,则称 A 与 B 相交. 集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\}$$

称为集 A 减集 B 的差集或差, 记作 $A-B$(或 $A\backslash B$). 当 $B\subset A$ 时,称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集,记作 $\mathscr{C}_A B$(图 1.1.1).

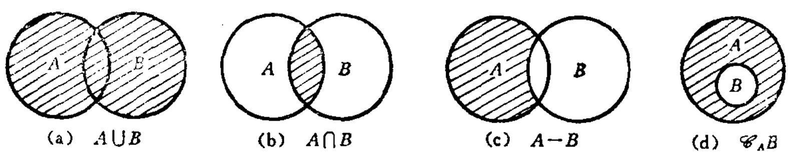

图 1.1.1

当我们研究一个问题时, 如果所讨论的集合都是某个固定集 A 的子集时,就称 A 为基本集或全集,并把 A 的子集 B 关于 A 的余集 $\mathscr{C}_A B$ 简称为 B 的余集,记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$.

并集与交集的概念可以推广到任意个集的情形. 设 Γ 为一非空集合,并且对每一个 $\alpha\in\Gamma$,指定了一个集合 A_α,此时我们称 $\{A_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$ 是以 Γ 为指标集的集族. 集族 $\{A_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$ 的并与交分别定义为:

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x \mid \exists\alpha\in\Gamma, \text{使} x\in A_\alpha\}.$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x\mid\forall\alpha\in\Gamma, \text{有} x\in A_\alpha\}.$$

特别地，当$\Gamma=\{1,2,\cdots,n\}$为有限集时，

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha=\{x\mid \text{有某个自然数 } \alpha\leqslant n, \text{使 } x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha=\{x\mid \text{对每个自然数 } \alpha\leqslant n, \text{有 } x\in A_\alpha\};$$

当$\Gamma=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$为自然数集时，称$\{A_n\mid n=1,2,\cdots\}$为集列，简记为$\{A_n\}$. 此时，

$$\bigcup_{n\in\Gamma} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid \text{有某个自然数 } n, \text{使 } x\in A_n\},$$

$$\bigcap_{n\in\Gamma} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x\mid \text{对一切自然数 } n, \text{有 } x\in A_n\}.$$

例 1 设$\Gamma=[0,1]$为指标集，$\forall\alpha\in[0,1]$，令$A_\alpha=\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)=\varnothing.$$

并，交运算具有以下性质：

定理 1.1.3 对任何集合A,B,C，恒有

1) $A\cup A=A, A\cap A=A$ （并、交的幂等性）；

2) $A\cup\varnothing=A$ （空集是加法的零元）；

3) $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$ （并、交的交换律）；

4) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ （并的结合律）；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ （交的结合律）；

5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （交对并的分配律）；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （并对交的分配律）.

以上性质都可以从并与交的定义及定理1.1.1推导出来，其中有些性质还可以推广到任意个集的一般情形，如：

推论 1.1.4 对任意集 A 和集族 $\{B_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$，有

1) $A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}\left(A\cap B_\alpha\right)$；

2) $A\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\left(A\cup B_\alpha\right)$.

现在证明2）式，1）的证明留为习题. 记 $A\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$为$E$，$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$为$F$，这样，只要证明 $E=F$即可.

$\forall x\in E$，则$x\in A$ 或 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，从而，$\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in A\cup B_\alpha$，即 $x\in F$，所以 $E\subset F$.

反过来，$\forall x\in F$，则 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in A\cup B_\alpha$，因此，$x\in A$ 或 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，即 $x\in E$，这又说明 $F\subset E$. 据定理1.1.1，就得 $E=F$. 证毕.

定理 1.1.5 对于任意集族 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$，$\{B_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$及集 C，有

1) $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset A_{\alpha'}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha,\ \forall\alpha'\in\Gamma$；

2) 若 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $A_\alpha\subset C$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset C$；

3) 若 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $A_\alpha\supset C$，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\supset C$；

4) $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cup B_\alpha)=\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)\cup\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$；

5) $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cap B_\alpha)=\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)\cap\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$.

上述结果显然，证明从略.

"减法"和求余运算具有以下性质：

定理 1.1.6 设 X 为全集，A，B 及 $A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 均为 X 的子集，则有

1) $X^c=\varnothing, \varnothing^c=X$;

2) $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$;

3) $(A^c)^c=A$;

4) $A\subset B\Leftrightarrow A^c\supset B^c$;

5) $A-B=A\cap B^c$;

6) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

更一般地，有

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c; \tag{1.1.1}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c. \tag{1.1.2}$$

6) 常称为笛摩根(De Morgan) 法则，它提供一种对偶方法，能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的余集上去. 此法则也称为对偶原理.

证明 我们只证式(1.1.1)及(1.1.2).

设 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c$，则 $x\in X$，且 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，所以，$\forall\alpha\in\Gamma$，$x\in A_\alpha^c$，即 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$. 这说明

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c.$$

反之，设 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$，则 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in A_\alpha^c=X-A_\alpha$，所以，$x\in X-$

$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\Big)^c$. 这又说明

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c\subset\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\Big)^c.$$

据定理1.1.1,就得到式(1.1.1).

对(1.1.1)式两端取余集,得$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c\Big)^c$. 再把 A_α换成 A_α^c,即得(1.1.2)式. 证毕.

定理 1.1.7 对任意集合 A,B,C,有

1) $A\subset B\Leftrightarrow A-B=\varnothing$;

2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$ （“减法”分配律）;

3) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

4) $A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)$.

其中,$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为集 A 和集 B 的对称差.

证明 以 3) 为例. 设 A, B, C 都是全集 X 的子集,据定理1.1.6 的 5),

$$(A-B)-C=(A\cap B^c)\cap C^c=A\cap(B^c\cap C^c)$$
$$=A\cap(B\cup C)^c=A-(B\cup C).$$ 证毕.

1.1.3 集列极限

对任意集列$\{A_n\}$,其上限集和下限集分别定义为:

$\overline{\lim\limits_n} A_n=\limsup\limits_n A_n=\{x\,|\,x$ 属于无限多个集 $A_n\}$,

$\underline{\lim\limits_n} A_n=\liminf\limits_n A_n=\{x\,|\,\exists$ 自然数 $n_0=n_0(x)$,使 $x\in A_{n_0+k}$, $k=0,1,2,\cdots\}$.

即$\overline{\lim\limits_n} A_n$为属于集列$\{A_n\}$ 中无限多个集的那种元素全体所组成的集;

$\underline{\lim\limits_n} A_n$为属于集列$\{A_n\}$ 中从某个指标 $n_0(x)$(n_0 不是固定的，与元