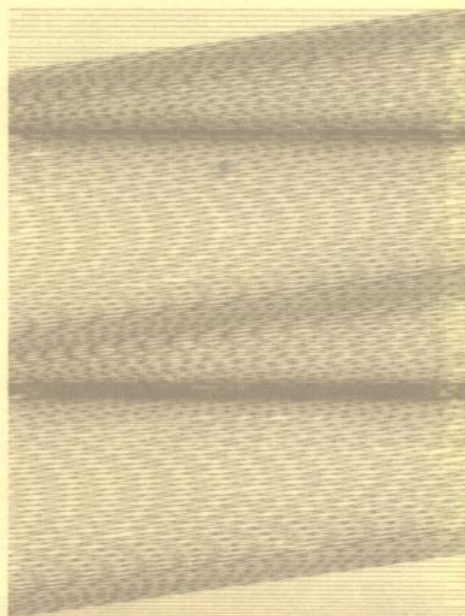


岩波講座 基礎工学 15

固体力学Ⅱ

山本善之 著
堀 幸 夫



岩波書店

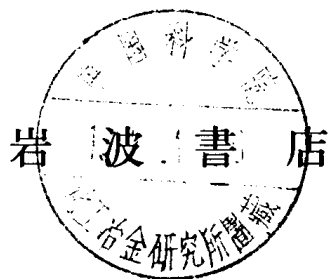
71.3
004
= 100

岩波講座 基礎工学 15

固 体 力 学

Ⅱ

山 本 善 之
堀 幸 夫



岩波講座 基礎工学 15 固体力学 II (全 19 巻／第 11 回配本)

1969 年 2 月 17 日 第 1 刷発行 ©

東京都千代田区神田一ツ橋 2-3 株式会社 岩波書店／精興社印刷・松岳社製本

目 次

第 I 編 構造設計の固体力学(承前)

第 6 章 構造要素の力学的性質(2)

6.1 2次元弾性論	151
6.2 応力集中	168
6.3 接触の問題☆	173
6.4 円筒	179
6.5 平板の曲げと座屈	186
6.6 薄肉殻	199
演習問題	204

第 7 章 構造物の静的応答と設計

7.1 エネルギーと平衡状態	207
7.2 骨組構造	215
7.3 平面トラス	218
7.4 カスチリアノの最小仕事の原理の応用	223
7.5 最小仕事の原理の応用	227
7.6 骨組の塑性解析☆	241
7.7 構造設計の諸因子	249
演習問題	255

第 8 章 構造物の振動と動的応答

8.1 棒の縦振動	257
8.2 棒の振り振動	264
8.3 棒のたわみ振動	271
8.4 弾性振動の一般的性質	279
8.5 減衰力	289
8.6 ランダム振動☆	294

演習問題	297
さらに勉強するために	299

固体力学Ⅰ 目次

第Ⅰ編 構造設計の固体力学

- 第1章 固体力学と構造物
- 第2章 構造物のうける荷重
- 第3章 応力とひずみ
- 第4章 構造物の強さと機能
- 第5章 構造要素の力学的性質(1)

固体力学Ⅲ 目次

第Ⅱ編 固体材料の力学的性質

- 第1章 固体材料の構造
- 第2章 転位論概説
- 第3章 金属の塑性変形
- 第4章 固体材料の破壊

付録 材料試験

表紙カット製作：渡辺茂・槌屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

第 6 章

構造要素の力学的性質 (2)

荷重に対する応答を定めるために、構造物を模型化しなければならないが、このとき無視された構造部分に大きい応力が生ずることがある。本章では、このような応答の典型的な例として、開孔などによる応力集中の問題と、ピンとピン穴というような 2 物体の接触による力の伝達の問題について考える。また複雑な要素、平板・殻などについて、各種の荷重に対する応答について説明する。さらに、複合要素の補剛板について考察し、これが曲げられた場合に、板がスチフナー（補剛材、骨）に対して必ずしも十分には協力しない現象、すなわちセン断おくれの現象などについても述べる。

6.1 2次元弾性論

単位の板厚 ($t=1$) の薄い平板を考える。厚みの中央は一平面内にあり、**中央面 (mid-plane)** といわれる。座標軸としては、中央面内に x, y 軸を、板厚方向に z 軸をとる。板の両面 $z=\pm t/2$ には何ら外力が加わらないとする。このとき、板厚方向の応力成分については

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (6.1)$$

と仮定できる。したがって、**平面応力**の状態にあり、

$$\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0 \quad (6.2)$$

となる。外力あるいは強制された変位は板の縁のみに加わり、(6.1), (6.2) を満たすようなものであり、かつ x - y 面に対して対称であると**仮定**する。中央面は変形後も x - y 面内にあり、初め中央面に垂直だった直線は、変形後も中央面に垂直であることが、(6.2)によってわかる。したがって、中央面に垂直な線上の点の x, y 軸方向の変位は、 z には無関係に定まり、 $u(x, y)$, $v(x, y)$ のようにかける。 x, y 軸方向のひずみは (3.26), (3.27) によって、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.3)$$

と与えられ、これらも x, y だけの関数である。平面応力の状態におけるひずみ成分は、(3.50 a)によって応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ と関係づけられる。(3.50 a)を逆に解いた式(3.51)に(3.46)を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

となる。ひずみ成分 ε_x は(3.50 b)によって σ_x, σ_y で表わされる。また、(6.4)によって、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ も x, y のみの関数であることがわかる。

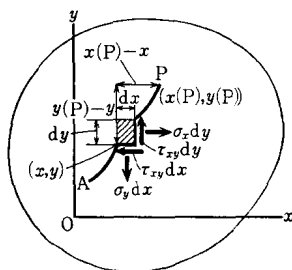


図 6.1 平 板

図 6.1 に示す板の微小部分 $dx dy$ の平衡を考えると、(5.30 a), (5.30 b) と全く同様にして平衡条件

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (6.5)$$

が得られる。(6.3)~(6.5), (3.50 a)にもとづいて、平板の縁に加わる面方向の外力に対する応答を解析できる。このような弾性理論は2次元弾性論(two-dimensional theory of elasticity)といわれる。

この問題を3.3節(57ページ)に述べた手続きにしたがって考える。まず(6.3)を(6.4)に代入し、得られた応力の表式を(6.5)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

が得られる。第1式に $-\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を、第2式に $-\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ を作用させ、得られた式を加え合わせると v が消去される。その式を整理すると、

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (6.7)$$

あるいは

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = 0 \quad (6.7a)$$

が得られる。 v に対しても全く同じ形の式が得られる。この式を満たす u を **重調和関数** (biharmonic function) という。

さて、このような方法では、 u, v を対称的に扱うことができにくいので、必ずしも便利ではない。それゆえ、2次元弾性論においても、捩りの場合と同様に、応力関数を用いることが多い。(6.5)を満たす応力成分は、適当な Π_x, Π_y を用いて

$$\sigma_x = \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} \quad (6.8a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial \Pi_y}{\partial x} \quad (6.8b)$$

のように表わされる。 Π_x, Π_y に関する微分方程式の積分条件が(6.5)で与えられ、図6.1のAとPを x - y 面内の固定点と一般の点とすると、その解は積分定数を除いて、

$$\left. \begin{aligned} \Pi_x(P) &= \int_A^P (-\tau_{xy}dx + \sigma_x dy) \\ \Pi_y(P) &= \int_A^P (-\sigma_y dx + \tau_{xy} dy) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

となる。図 6.1 より知られるように、 $\Pi_x(P)$, $\Pi_y(P)$ は、“A, P を結ぶ線にそって、平板の切り口に作用する応力”の合力の x, y 成分になっている。(6.8a), (6.8b) の τ_{xy} の表式を等置すると、

$$-\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} \quad (b)$$

となる。この式を満たす Π_x, Π_y は適当な F を用いて

$$\Pi_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \Pi_y = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (6.9)$$

と表わされる。前と同様にして、(6.9) の解 F は積分定数を除いて

$$\begin{aligned} F(P) &= \int_A^P (-\Pi_y dx + \Pi_x dy) \\ &= \int_A^P [-\{x(P) - x\} d\Pi_y + \{y(P) - y\} d\Pi_x] \\ &= \int_A^P [-\{x(P) - x\}(-\sigma_y dx + \tau_{xy} dy) \\ &\quad + \{y(P) - y\}(-\tau_{xy} dx + \sigma_x dy)] \end{aligned} \quad (6.10)$$

と書ける。右辺第 2 式を導くとき、部分積分を用いた。この F は、A と P とを結ぶ線にそって平板の切り口に作用する応力の、点 P のまわりのモーメントであり、エアリー(Airy)の応力関数といわれる。 Π_x, Π_y, F が単連結の面内では積分路に関係しないで定まり、点 P の座標の関数で表わせることは、振りの場合(128, 129 ページ)と同様である。平衡条件(6.5)を満たす応力成分は、 F によって

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (6.11)$$

と表わされる。これを(3.50a)に代入すると、ひずみ成分が F で表わされる。このひずみ成分は(6.3)によって、適当な u, v で表わされなければならない。

そのためには、(6.3)より u, v を消去した式

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad (6.12)$$

が成立しなければならない。逆に(6.12)が成立すると、単連結領域で u, v が1価関数として定まる[†]。このような関係式を**適合条件**(condition of compatibility)という。

(3.50 a)に(6.11)を代入し、(3.46)を用いて得られた

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

を、適合条件(6.12)に代入すると

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (6.13)$$

あるいは

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 F = 0 \quad (6.13 a)$$

が得られる。適当な境界条件のもとに F が定められると、平面内の応力分布が求まる。さらに、(3.50 a)によってひずみ成分が定まり、これを(6.3)に代入して積分すると、変位が求まる。

さて、微分方程式

$$\begin{aligned} \dagger \quad \omega(P) &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \omega(A) + \int_A^P \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx + \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy \right] \end{aligned}$$

を用いると、 u, v は

$$\begin{aligned} u(P) &= u(A) + \int_A^P \left[\varepsilon_x dx + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} - \omega \right) dy \right] \\ v(P) &= v(A) + \int_A^P \left[\left(\frac{\gamma_{xy}}{2} + \omega \right) dx + \varepsilon_y dy \right] \end{aligned}$$

と定まる。ここに ω は面の微小要素の**回転**(rotation)を表わす。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = 0 \quad (6.14)$$

の解を調和関数(harmonic function)という。一般に、(6.13)の解すなわち重調和関数 F は、二つずつの調和関数の組 Φ_1, Ψ_1 などを用いて、

$$F = x\Phi_1 + \Psi_1, \quad F = y\Phi_2 + \Psi_2, \quad F = r^2\Phi_3 + \Psi_3 \quad (6.15)$$

の形に表わすことができる[†]。ここに $r^2 = x^2 + y^2$ である。また、重調和関数の和は重調和関数である。

例1 (6.14)の解を

$$\Phi = Y_n(y) \cos \frac{2n\pi x}{l} \quad \text{あるいは} \quad \Phi = Y_n(y) \sin \frac{2n\pi x}{l} \quad (d)$$

とおくと、 Y_n は y だけの関数で

$$\frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{4n^2 \pi^2}{l^2} Y_n = 0 \quad (e)$$

を満たす。この式の解 Y_n は

$$Y_n = a_n \exp\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) + b_n \exp\left(-\frac{2n\pi y}{l}\right)$$

となる。よって、 x に関して周期 l の調和関数 Φ は、積分定数 a_n, b_n, c_n, d_n を用いて

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ a_n \exp\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) + b_n \exp\left(-\frac{2n\pi y}{l}\right) \right\} \cos \frac{2n\pi x}{l} \right. \\ \left. + \left\{ c_n \exp\left(\frac{2n\pi y}{l}\right) + d_n \exp\left(-\frac{2n\pi y}{l}\right) \right\} \sin \frac{2n\pi x}{l} \right] \quad (6.16) \end{aligned}$$

と表わすことができる。このような形に表わされた Φ_1, Ψ_1 などを用いると、(6.15)の第2の表式により、 x に関して周期 l の、エアリーの応力関数 F の一般的な表式が得られる。

複素応力関数 ☆

複素関数論より知られるように、

$$Z = x + iy \quad (6.17)$$

[†] (6.15)で表わされる F が重調和関数であることは容易にわかる。各自確かめよ。また次ページの脚注を見よ。

とおくと、 Z の任意の複素関数 $\varphi(Z), \psi(Z)$ は(6.14)の解である。その実数部分、虚数部分もまた(6.14)の解である。よって、 Z の共役複素数を $\bar{Z}$ とし、

$$\bar{Z} = x - iy \quad (6.17a)$$

とおくと、(6.15)により

$$F = ([\bar{Z}\varphi(Z) + \psi(Z)] \text{の実数部分}) \quad (6.18)$$

は重調和関数となる。実はエアリーの応力関数は、必ず(6.18)のように表わされる[†]ので、 F の代りに $\varphi(Z), \psi(Z)$ を応力関数として用いることができる。

このとき $\varphi(Z), \psi(Z)$ を複素応力関数という。

このような $\varphi(Z), \psi(Z)$ が定まると

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{4} = (\varphi'(Z) \text{の実数部分}) \quad (6.19a)$$

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + i\tau_{xy} = \bar{Z}\varphi''(Z) + \psi''(Z) \quad (6.19b)$$

$$u + iv = \frac{1+\nu}{2E} \left[\frac{3-\nu}{1+\nu} \varphi(Z) - Z\bar{\varphi}'(\bar{Z}) - \bar{\psi}'(\bar{Z}) \right] \quad (6.19c)$$

と表わされる^{††}。ここに、 $\bar{\varphi}'(\bar{Z})$ などは $\varphi'(Z)$ に共役な関数である。原点が有孔板の開孔部にあるとき、 $\varphi(Z), \psi'(Z)$ が $\log Z$ なる項を含んでいると、応力は一義的に定まるが、変位成分は必ずしも一義的に定まらない。このような変位の食い違い(dislocation)が生じないように、 $\varphi(Z), \psi(Z)$ を定めなければならない。同様な事情が、普通の形の応力関数を用いた場合にも生ずることはもちろんである。

例2 F と ψ の表式の1次以下の項と、 φ の定数項は応力に関係しないので、これらは除いて考えることができる。一様な応力

$$\sigma_x = \sigma_{x0}, \quad \sigma_y = \sigma_{y0}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy0} \quad (6.20)$$

は

[†] x, y を実数とは限らないとすると、 $Z, \bar{Z}$ は独立した変数と見なすことができる。 x, y を $Z, \bar{Z}$ で表わし、(6.13)を書き直すと、 $\frac{\partial^4 F}{\partial Z^2 \partial \bar{Z}^2} = 0$ となり、これより $F = \bar{Z}\varphi(Z) + \psi(Z)$ が得られる。 F が実関数であることにより(6.18)が得られる。これを用いると(6.15)は明らかである。

^{††} (6.19)についてはたとえば森口繁一：“2次元弾性論”(岩波講座現代応用数学2)(1957)；山本善之：“弾性・塑性”，§23，朝倉書店(1961)参照。 $\varphi'(Z) = \sum_n c_n Z^n$ とすると $\bar{\varphi}'(\bar{Z}) = \sum_n \bar{c}_n \bar{Z}^n$ である。ただし、 $\bar{c}_n$ は c_n の共役複素数である。

$$F = \frac{\sigma_{y0}}{2}x^2 - \tau_{xy0}xy + \frac{\sigma_{x0}}{2}y^2 \quad (6.21a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(Z) &= \frac{\sigma_{x0} + \sigma_{y0}}{4}Z \\ \psi(Z) &= \left(-\frac{\sigma_{x0} - \sigma_{y0}}{4} + i\frac{\tau_{xy0}}{2} \right) Z^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.21b)$$

によって表わされることが容易にわかる。

極座標

実際の問題を解くに当って、極座標 (r, θ)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を用いると便利ことが多い。極座標における応力成分 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ と、直交座標に関する応力成分の関係は、(3.11), (3.12)を用いると容易に求まる。 σ_r と $\tau_{r\theta}$ は(3.11)と(3.12)で α の代りに θ として求まる。(3.11)の α の代りに、 $\theta + \frac{\pi}{2}$ とすれば、 σ_θ の表式が求まる。よって、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau_{r\theta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

が得られる。これらの式で、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ と $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ とを交換し、 θ を $-\theta$ とおくと、(6.22)を σ_x などによって解いた表式が得られる(各自確かめよ)。エリーの応力関数 F は r, θ の関数として表わされるが、その物理的意味は前と変わらない。したがって、図6.3より、P点における F の値は

$$F = \int_A^P \left[\{r(P) \cos(\theta(P) - \theta) - r\} (\sigma_\theta dr - \tau_{r\theta} r d\theta) \right. \\ \left. + r(P) \sin(\theta(P) - \theta) (\sigma_r r d\theta - \tau_{r\theta} dr) \right] \quad (f)$$

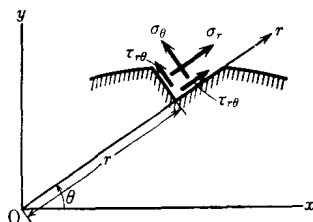


図6.2 極座標の応力成分

である。これを $r(P), \theta(P)$ について微分する†と、

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r} &= \int_A^P [\cos\{\theta(P) - \theta\}(\sigma_\theta dr - \tau_{r\theta} r d\theta) \\ &\quad + \sin\{\theta(P) - \theta\}(\sigma_r r d\theta - \tau_{r\theta} dr)] \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= r(P) \int_A^P [-\sin\{\theta(P) - \theta\}(\sigma_\theta dr - \tau_{r\theta} r d\theta) \\ &\quad + \cos\{\theta(P) - \theta\}(\sigma_r r d\theta - \tau_{r\theta} dr)]\end{aligned}$$

である。ここに積分の外の $r(P)$ は r と書くことができる。さらに微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= \sigma_\theta, & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} &= -\tau_{r\theta} r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= \sigma_r r^2 - r \frac{\partial F}{\partial r}\end{aligned}$$

である。これより、応力成分の表式

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}\end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

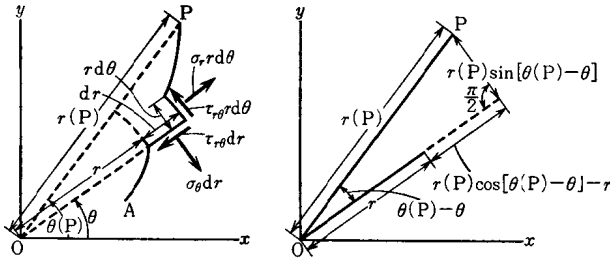


図 6.3 極座標の応力関数

† $F = \int_A^P (A dr + B d\theta)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial r(P)} = [A]_{r=r(P), \theta=\theta(P)} + \int_A^P \left[\frac{\partial A}{\partial r(P)} dr + \frac{\partial B}{\partial r(P)} d\theta \right] \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial F}{\partial \theta(P)} = [B]_{r=r(P), \theta=\theta(P)} + \int_A^P \left[\frac{\partial A}{\partial \theta(P)} dr + \frac{\partial B}{\partial \theta(P)} d\theta \right]\end{aligned}$$

である。

が得られる。

極座標 (r, θ) を用いると, (6.14) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi = 0 \quad (6.24)$$

と表わされる。この解を

$$\Phi = \begin{cases} R_0(r) & \text{あるいは } R_0(r)\theta \\ R_n(r)\cos n\theta & \text{あるいは } R_n(r)\sin n\theta, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

とおくと, r だけの関数 R_n ($n \geq 0$) は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0 \quad (g)$$

を満たすことになり, 積分定数 a_n, b_n を用いて

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= a_0 + b_0 \log r \\ R_n &= a_n r^n + b_n r^{-n}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

と表わされる。よって, 積分定数 a_n, b_n, c_n, d_n を用いて Φ は

$$\begin{aligned} \Phi &= (a_0 + b_0 \log r) + (c_0 + d_0 \log r) \theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta] \end{aligned} \quad (6.25)$$

と表わされる。このような形に表わされた Φ, Ψ などを用いると, (6.15) により F が得られる。この F は, 一般には $r=0$ が特異点になる。

例3 図6.4に示す頂角 2α のくさびの先端に, 集中力 P_x, P_y が加わるときの応力分布を定めよう。このとき

$$\sigma_{\theta} = \tau_{r\theta} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha \quad (i)$$

となるように応力分布を定めなければならない。この条件は(6.23)により,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$$

となるので, 境界 $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$ にそって, この条件を積分することにより, F の可能な形として, $F \propto r$ でなければならないことがわかる。このような F は(6.

15), (6.25)により,

$$x\theta, \quad y\theta, \quad r \cos \theta (=x), \quad r \sin \theta (=y)$$

の1次結合で表わされることがわかる. 例2から知られるように, F の表式の1次の項は応力を与えないから, これを除き,

$$F = c_1 x\theta + c_2 y\theta = c_1 r\theta \cos \theta + c_2 r\theta \sin \theta \quad (j)$$

と仮定する. (6.22)により,

$$\sigma_r = \frac{2}{r}(-c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta), \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

となり, これらの応力成分が(i)を満たすことは明らかである. 弧 $r=r_0$ 上に働く応力の合力の x, y 軸方向の成分は

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} [\sigma_r]_{r=r_0} \cos \theta \cdot r_0 d\theta &= c_2 (2\alpha - \sin 2\alpha) \\ \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} [\sigma_r]_{r=r_0} \sin \theta \cdot r_0 d\theta &= -c_1 (2\alpha + \sin 2\alpha) \end{aligned}$$

となり, r_0 に無関係に定まる. 扇形の部分の平衡条件によって, これらがそれぞれ $-P_x, -P_y$ に等しいことにより, c_1, c_2 が定まり,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{r} \left(\frac{P_x \cos \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} + \frac{P_y \sin \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} \right) \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

となる. したがって, くさびの先端に集中荷重の加わるときは, 1軸応力状態が生ずることになる.

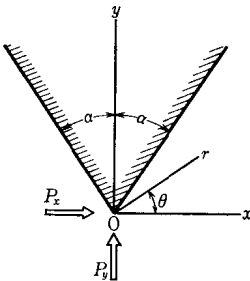


図 6.4 くさび

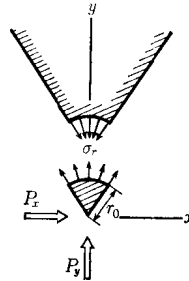


図 6.5 くさびの
平衡条件

特に $\alpha=\pi/2$ にとると, 半無限板の自由な辺の1点に集中荷重の加わったときの応力分布が求まる. この点を原点とすると,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{\pi r} (P_x \cos \theta + P_y \sin \theta) \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

となる. (6.22) を σ_x などについて解いた表式を用いると, 上式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

となり, x 軸上の縁では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P_x}{\pi x} \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.26 a)$$

となる.

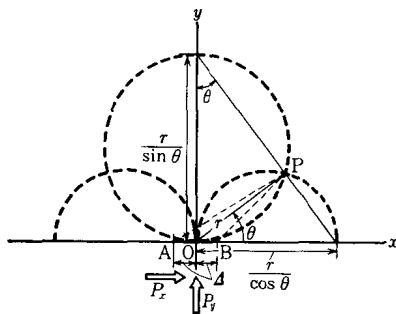


図 6.6 半無限板

$P_y=0$ のときは, (6.26) より

$$\sigma_r = -\frac{2P_x}{\pi(r/\cos \theta)}$$

となるので, x 軸上に中心をもち, 原点を通る半円弧上の点において, 応力成分 σ_r は一定値をとる. また $P_x=0$ のときは,

$$\sigma_r = -\frac{2P_y}{\pi(r/\sin \theta)}$$