高等代数教程

下

王萼芳 编著

多项式
λ-矩阵
线性空间
线性变换
欧氏空间

清华大学出版社

高等代数教程

下 册

王萼芳 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内容简介

本套书——《高等代数教程(上、下册)》和《高等代数教程习题集》,是北京大学王萼芳教授在其深受读者欢迎的教材的基础上改编而成的。已被北京市高等教育自学考试委员会选用。

《高等代数教程》(下册)包括 6～10 章:多项式、λ-矩阵、线性空间、线性变换、欧氏空间。

本书每节和每章都配有类型和深浅不同的例题和习题,并给出了答案或提示。每章的核心内容在章末的内容提要中加以归纳和概括。

本书内容更详细的总结和题解与证明,可参考《高等代数教程习题集》。

读者对象:大专院校、高等教育自学考试和电大的师生、研究生。

书　名:高等代数教程
作　者:王萼芳
出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)
印刷者:北京清华园胶印厂
发行者:新华书店总店北京科技发行所
开　本:850×1168 1/32　印张:10.875　字数:280 千字
版　次:1997 年 5 月第 1 版　1997 年 5 月第 1 次印刷
书　号:ISBN 7-302-02478-2/O・180
印　数:0001—5000
定　价:14.00 元

目　　录

第 6 章　多项式 …… 1
6.1　多项式及其运算 …… 1
6.2　整除性理论 …… 11
6.3　最大公因式 …… 29
6.4　因式分解定理 …… 48
6.5　重因式 …… 60
6.6　复系数与实系数多项式的因式分解 …… 66
6.7　有理系数多项式 …… 72
内容提要 …… 79
复习题 6 …… 82

***第 7 章　λ-矩阵** …… 85
7.1　λ-矩阵 …… 85
7.2　最小多项式 …… 90
7.3　λ-矩阵的等价标准形 …… 97
7.4　不变因子 …… 106
7.5　初等因子 …… 110
7.6　矩阵相似的条件 …… 115
7.7　约当标准形 …… 119
内容提要 …… 125
复习题 7 …… 128

第 8 章　线性空间 …… 130

8.1　线性空间的定义与简单性质 …… 130
8.2　向量组的线性关系 …… 136
8.3　维数、基与坐标 …… 150
8.4　基变换与坐标变换 …… 155
8.5　线性子空间 …… 166
8.6　子空间的交与和 …… 172
8.7　线性空间的同构 …… 188
内容提要 …… 197
复习题 8 …… 200

第 9 章　线性变换 …… 204
9.1　线性变换的定义与简单性质 …… 204
9.2　线性变换的运算 …… 212
9.3　线性变换的矩阵 …… 223
9.4　线性变换的特征值与特征向量 …… 233
9.5　不变子空间 …… 243
内容提要 …… 259
复习题 9 …… 259

第 10 章　欧氏空间 …… 262
10.1　欧氏空间的定义与简单性质 …… 262
10.2　度量矩阵 …… 273
10.3　标准正交基 …… 280
10.4　子空间 …… 288
10.5　欧氏空间的同构 …… 293
10.6　正交变换与对称变换 …… 296
*10.7　最小二乘法 …… 305
内容提要 …… 309

复习题10 …………………………………………………… 312

习题答案与提示………………………………………………… 316

第6章　多　项　式

多项式是一类最常见、最简单的函数，它的应用非常广泛. 关于多项式的一些重要定理和方法，不仅在解决实际问题时常常用到，而且在进一步学习代数以及其他学科时也经常会碰到. 在中学代数里，我们曾经学习过多项式的运算. 这一章将在复习这些内容的基础上，进一步讨论关于一元多项式的一些理论，例如最大公因式的性质、求法，以及多项式的因式分解等问题.

6.1　多项式及其运算

这一节讨论一元多项式的基本概念以及一元多项式的运算.

定义 1　设 x 是一个变量(或称文字)，n 是一个非负整数，表示式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 全属于数域 P，称为**系数在数域 P 中的一元多项式**，简称**数域 P 上的一元多项式**. 例如：

$$\frac{1}{2}x^3 + 5x - 5, \quad \sqrt{2}x^4 + 2ix^2 + 1, 4$$

都是 x 的多项式，而

$$2x^{1/2} - 1, \quad x^2 - 3x + x^{-1} + 2$$

都不是 x 的多项式.

这里定义的多项式只含有一个变量，所以也称一元多项式. 我们讨论的都是一元多项式，以后不再声明，就简单地称作多项式. 我们以后常常用 $f(x)$，$g(x)$ 等表示多项式. 有时候为了方便起

见，在不致引起误解的情况下，简单地用 f,g 等表示多项式.

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是数域 **P** 上一个多项式. $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 称为 $f(x)$ 的**系数**；a_kx^k $(k=n,n-1,\cdots,1,0)$ 称为 $f(x)$ 的 ***k* 次项**；a_k 称为 $f(x)$ 的 ***k* 次项系数**. $f(x)$ 的零次项也称作 $f(x)$ 的**常数项**.

如果 c 是数域 **P** 中一个数，用 $f(c)$ 表示当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值，即

$$f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\cdots+a_1c+a_0$$

容易看出，$f(c)$ 也是数域 **P** 中的数.

定义 2 如果两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的同次项的系数全相等，就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$.

系数全等于零的多项式称为**零多项式**，记作 0.

定义 3 如果在(1)中，$a_n\neq0$，那么 a_nx^n 就称为多项式(1)的**首项**，a_n 称为多项式(1)的**首项系数**，n 称为多项式(1)的**次数**.

为了方便起见，我们用"$\deg f(x)$"(或者简单地，用"$\deg f$")来表示 $f(x)$ 的次数. 非零常数是零次多项式. 零多项式是唯一的无法确定次数的多项式，因此必须注意：只有在 $f(x)\neq0$ 时，符号"$\deg f(x)$"才有意义.

两个多项式相加(或相减)，就是把它们的同次项的系数相加(或相减)；两个多项式相乘，就是把第 1 个多项式的各个项与第 2 个多项式的各个项分别相乘，然后合并同类项. 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相加、相减与相乘的结果分别称为这两个多项式的**和**、**差**与**积**，记作 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$ 与 $f(x)\cdot g(x)$（或 $f(x)g(x)$）. 下面举例说明多项式的运算.

例 1 设 $f(x)=2x^2+3x-1$，$g(x)=x^3+2x^2-3x+2$.

求 $f(x)+g(x)$， $f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$.

解：$f(x)+g(x)=(2x^2+3x-1)+(x^3+2x^2-3x+2)$

$$=x^3+(2+2)x^2+(3-3)x+(-1+2)$$

$$=x^3+4x^2+1.$$

$$f(x)-g(x)=(2x^2+3x-1)-(x^3+2x^2-3x+2)$$

$$=(0-1)x^3+(2-2)x^2+[3-(-3)]x$$

$$+(-1-2)=-x^3+6x-3.$$

$$f(x)g(x)=(2x^2+3x-1)\cdot(x^3+2x^2-3x+2)$$

$$=2x^5+3x^4-x^3+4x^4+6x^3-2x^2$$

$$-6x^3-9x^2+3x+4x^2+6x-2$$

$$=2x^5+(3+4)x^4+(-1+6-6)x^3$$

$$+(-2-9+4)x^2+(3+6)x-2$$

$$=2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2.$$

多项式的乘法比较复杂，应用竖式就方便多了. 例如上面的例子可以这样来计算.

$$\begin{array}{rl}
 & f(x)=2x^2+3x-1 \\
\times) & g(x)=x^3+2x^2-3x+2 \\
\hline
 & 2x^5+3x^4\qquad -x^3 \\
 & 4x^4+6x^3-2x^2 \\
 & -6x^3-9x^2+3x \\
 & 4x^2+6x-2 \\
\hline
 & f(x)\cdot g(x)=2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2.
\end{array}$$

这样计算不仅简单明了，而且不容易出错. 有时候，为了更加方便，我们还可以应用分离系数法来作乘法，就是把 x 的方幂略去不写，只把系数按次序写出来进行运算. 仍用上面的例子来说明，上面的竖式可以应用分离系数法简化为：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2 & 3 & -1 & & & \\
\times) & 1 & 2 & -3 & 2 & & \\
\hline
 & 2 & 3 & -1 & & & \\
 & & 4 & 6 & -2 & & \\
 & & & -6 & -9 & 3 & \\
 & & & & 4 & 6 & -2 \\
\hline
 & 2 & 7 & -1 & -7 & 9 & -2
\end{array}
$$

最后所得的一列数就是 $f(x)\cdot g(x)$ 按降幂排列的系数.

应用这种方法进行运算的时候,一定要注意:必须把系数是“0”的项补上.我们再举一个例子.

例 2 $f(x)=x^3-1, g(x)=5x^2+x-1$.

求 $f(x)\cdot g(x)$.

解:应用分离系数法进行计算

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -1 & & \\
\times) & 5 & 1 & -1 & & & \\
\hline
 & 5 & 0 & 0 & -5 & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 5 & 1 & -1 & -5 & -1 & 1
\end{array}
$$

所以 $f(x)g(x)=5x^5+x^4-x^3-5x^2-x+1$.

在有些时候,$f(x)\cdot g(x)$ 可能是按升幂排列的,那么我们当然也可以按升幂排法写出各项系数来计算,得出 $f(x)g(x)$ 按升幂排法的系数.还有,从上面的例子可以看出,如果 $g(x)$ 中有一些系数为 0 的项,在计算时可以不必写出一整行 0,只要在那一行写上第一个 0,然后接着算下一行就可以了.

例 3 假设 $f(x)=2-x+3x^3, g(x)=3+x^2-2x^3$. 求 $f(x)g(x)$.

解：

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 2 & -1 & 0 & 3 & & & \\
\times) & 3 & 0 & 1 & -2 & & & \\
\hline
 & 6 & -3 & 0 & 9 & & & \\
 & & 0 & 2 & -1 & 0 & 3 & \\
 & & & & -4 & 2 & 0 & -6 \\
\hline
 & 6 & -3 & 2 & 4 & 2 & 3 & -6
\end{array}
$$

所以　$f(x)g(x)=6-3x+2x^2+4x^3+2x^4+3x^5-6x^6$.

上面算式中第四行的第一个 0 就是由 $g(x)$ 中的那个 0 系数得出的.我们把这一行其余的 0 都略去不写而接着计算下一行.因此必须注意，在计算再下面一行的时候，一定要把第一个数字写在这一行第 3 个数字下面.对此读者可以用数的乘法中乘数含有 0 的情形进行比较.

根据以上的方法，任意给了两个具体的多项式，都可以求出它们的和、差与积.但是为了统一地讨论多项式的问题，还需要将多项式的运算用一般公式表示出来.下面来给出和、差与积的公式.

设　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$.

首先写出 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 的表达式.因为在一个多项式中可以任意加入一些系数为 0 的项，如果 $m\leqslant n$，当 $m<n$ 时可设 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$. 于是

$$
\begin{aligned}
f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}\\
&\quad+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\\
f(x)-g(x)&=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}\\
&\quad+\cdots+(a_1-b_1)x+a_0
\end{aligned}
$$

如果 $m>n$，可以类似地处理.读者可以作为练习推导一下.

根据上面的 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 的表示式，可以看

出：$f(x)+g(x)$的 k 次项系数是 a_k+b_k；而 $f(x)-g(x)$的 k 次项系数是 a_k-b_k.

下面来推导 $f(x)g(x)$的公式.

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) \\ &\quad \cdot (b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0) \\ &= (a_nb_mx^{n+m} + a_{n-1}b_mx^{n+m-1} + \cdots + \\ &\quad + a_1b_mx^{m+1} + a_0b_mx^m) + (a_nb_{m-1}x^{n+m-1} \\ &\quad + a_{n-1}b_{m-1}x^{n+m-2} + \cdots + a_1b_{m-1}x^m \\ &\quad + a_0b_{m-1}x^{m-1}) + \cdots + (a_nb_0x^n + a_{n-1}b_0x^{n-1} \\ &\quad + \cdots + a_1b_0x + a_0b_0).\end{aligned}$$

在合并同次项以前，我们先来分析 $f(x)g(x)$中各个项的系数与 x 的幂次的关系. 由于 $f(x)g(x)$中各项是由 $f(x)$的一个项与 $g(x)$的一个项相乘而得. 所以可以表示成：

$$(a_ix^i)(b_jx^j) = a_ib_jx^{i+j}.$$

因此 $f(x)g(x)$中 $x^k(0\leqslant k\leqslant n+m)$的系数是

$$a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0.$$

其中，如果 $i>n$，则 $a_i=0$；如果 $j>m$，则 $b_j=0$.（以后遇到类似情况，都这么理解而不再重复说明.）因此

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= a_nb_mx^{n+m} + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x^{n+m-1} \\ &\quad + \cdots + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0.\end{aligned}$$

为了简便起见，我们常常把多项式的运算公式用和号来表示. 如果

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,\quad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_jx^j,$$

则
$$f(x) \pm g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i)x^i \quad (n \geqslant m);$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=k} a_ib_j\Big)x^k.$$

从多项式的运算公式，很容易得出下述次数公式：

命题 1 1) $\deg(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\deg f(x),\deg g(x))$；

2) $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$.

多项式的乘积的次数不仅满足上述公式，从乘积公式还可看出：

命题 2 如果 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$，那么 $f(x)g(x)\neq 0$. 而且 $f(x)g(x)$ 的首项就等于 $f(x)$ 的首项与 $g(x)$ 的首项之积；$f(x)g(x)$ 的首项系数等于 $f(x)$ 的首项系数与 $g(x)$ 的首项系数之积.

以上我们复习了多项式的运算，在以后的讨论以及一些实际问题中，我们不只简单地用到两个多项式的加法、减法或乘法，有时会遇到多个多项式的复杂运算. 因此为了简化运算，必须掌握一些运算的规律. 其实我们在算术与初等代数中，经常应用一些规律来比较巧妙地进行计算. 例如

$$
\begin{aligned}
&(a+1)(a+b-1)+(a+1)(a-b-1)\\
&\quad=(a+1)[(a+b-1)+(a-b-1)]\\
&\quad=(a+1)(2a-2)=2(a+1)(a-1)\\
&\quad=2(a^2-1).
\end{aligned}
$$

在上面的计算过程中，第 1 个等号我们应用了加法对乘法的分配律；第 2 个等号用到加法的交换律与结合律；第 3 个等号应用了乘法的交换律与结合律；最后一个等号用到了平方差公式（其实这个公式的证明也需应用好几个规律）. 与数的运算类似，多项式的运算也满足下列一些规律.

命题 3 多项式的运算满足：

加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x);$$

加法结合律：

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)];$$

乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x);$$

乘法结合律：

$$[f(x)g(x)]h(x)=f(x)[g(x)h(x)];$$

加乘分配律：

$$f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

这些规律是需要逐条验证的. 但是由于我们在初等代数中已经熟悉并经常运用这些规律，而且这些规律的证明又比较呆板和烦琐，因此我们不一一验证，而只是对其中的几条加以证明. 目的是想介绍一下如何验证这类规律，并通过这些规律的检验复习多项式的运算公式.

1) 加法交换律的证明　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

不妨设 $m\leqslant n$，于是

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}\\&\quad+\cdots+(a_1+b_1)x+a_0+b_0\\&=(b_n+a_n)x^n+(b_{n-1}+a_{n-1})x^{n-1}\\&\quad+\cdots+(b_1+a_1)x+b_0+a_0\\&=g(x)+f(x).\end{aligned}$$

因为多项式的加法比较简单，所以可以直接验证其交换律. 加法结合律及乘法交换律都可以类似地证明. 读者不妨自己证明一下. 至于其余几条规律，其中的系数比较复杂，要直接从等式左边推导到右边，写起来比较麻烦，再用上面的方法来证明就不大方便了，必须采用别的方法. 由于两个多项式相等的意思是指它们的同次项系数相等，因此为了证明某个等式，只要证明等式两边同次项的系数相等就行了. 下面我们以乘法结合律为例来说明这一方法.

2) 乘法结合律的证明　设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$
$$h(x) = c_l x^l + c_{l-1} x^{l-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

为了方便起见，我们再设

$$f(x)g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + \cdots + d_1 x + d_0;$$
$$g(x)h(x) = e_{m+l} x^{m+l} + \cdots + e_1 x + e_0,$$

其中

$$d_i = \sum_{s+t=i} a_s b_t, \quad i = 0, 1, \cdots, n+m,$$
$$e_j = \sum_{t+u=j} b_t c_u, \quad j = 0, 1, \cdots, m+l.$$

于是，$[f(x)g(x)]h(x)$的 $k(1 \leqslant k \leqslant n+m+l)$次项系数为

$$\sum_{i+u=k} d_i c_u = \sum_{i+u=k} \Big(\sum_{s+t=i} a_s b_t \Big) c_u$$
$$= \sum_{s+t+u=k} (a_s b_t) c_u = \sum_{s+t+u=k} a_s b_t c_u.$$

$f(x)[g(x)h(x)]$的 $k(1 \leqslant k \leqslant n+m+l)$次项系数为

$$\sum_{s+j=k} a_s e_j = \sum_{s+j=k} a_s \Big(\sum_{t+u=j} b_t c_u \Big)$$
$$= \sum_{s+t+u=k} a_s (b_t c_u) = \sum_{s+t+u=k} a_s b_t c_u.$$

所以$[f(x)g(x)]h(x)$与 $f(x)[g(x)h(x)]$的同次项系数都相等. 根据多项式相等的定义，即得

$$[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)].$$

乘法结合律得证.

多项式的乘法还满足消去律：

命题 4 如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，并且 $f(x) \neq 0$. 那么可以消去 $f(x)$而得 $g(x)=h(x)$.

证明：由 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$可得

$$f(x)[g(x) - h(x)] = 0.$$

如果 $g(x)-h(x)\neq 0$. 那么由于 $f(x)\neq 0$,故由命题 2 有

$$f(x)[g(x)-h(x)]\neq 0,$$

与假设矛盾,所以 $g(x)-h(x)=0$,即

$$g(x)=h(x). \qquad |$$

以上介绍了有关多项式的基本概念及运算. 在多项式的定义中,$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的系数 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是一些常数. 如果这些系数都是复数,就称 $f(x)$是一个复系数多项式;如果这些系数都是实数,就称 $f(x)$是一个实系数多项式;如果这些系数都是有理数,就称 $f(x)$是一个有理系数多项式. 在我们讨论多项式的某些理论和求解高次方程时,有时需要在复数范围内进行,有时需要在实数范围内进行,有时还需要在有理数或其他指定的范围内进行. 但是有些问题,不论在复数或实数或有理数范围,都可得到同样的结论,因此为了统一地进行研究,我们可以取定一个数域 **P** 来讨论系数在 **P** 中的多项式.

设 **P** 是一个数域,用 **P**$[x]$表示系数在 **P** 中的所有一元多项式组成的集合。**P**$[x]$称为**数域 P 上的一元多项式环**,**P** 称为 **P**$[x]$的**系数域**.

例如:**Q**$[x]$表示全体有理系数多项式所成的集合;**R**$[x]$表示全体实系数多项式所成的集合;**C**$[x]$表示全体复系数多项式所成的集合.

系数在数域 **P** 中的多项式也称为数域 **P** 上的多项式. 在这定义中应用了一个"上"字是没有什么意义的. 由于这种说法在代数学中已经是根深蒂固了,我们也就沿用了这个习惯的名称.

因为多项式的加法、减法与乘法可以通过系数的加法、减法与乘法来进行,所以如果 $f(x)$,$g(x)$是 **P**$[x]$中两个多项式,那么它们的和、差与积也都在 **P**$[x]$中,因此我们可以像以前讨论线性方程组以及矩阵的时候一样,取定一个数域 **P** 来讨论 **P**$[x]$中的多项式.

习　题　6.1

1. 计算 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ 以及 $f(x)g(x)$.

(1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$,

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

(2) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+2x+1$,

$g(x)=x^2-x+1$;

(3) $f(x)=x^4-2x^3-6x^2+5x+9$,

$g(x)=-x^4+2x^3-x^2-2x+2$;

(4) $f(x)=2x^4-x^3+2x^2-x+1$

$g(x)=x^2-3x+1$;

(5) $f(x)=x^3+(1+\mathrm{i})x^2-(1-\mathrm{i})x-1$,

$g(x)=x^3-2\mathrm{i}x+1-2\mathrm{i}$.

2. 计算

(1) $(x^3+x^2-x-1)(x^3-2x-1)-8x(x^2-5)$;

(2) $(x^3+ax-b)(x^2-1)+(x^3-ax+b)(x^2-1)$.

3. 求 k,l,m，使 $(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1$.

4. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是两个非零多项式且 $f(x)+g(x)\neq 0$. 问 $f(x)$, $g(x)$ 的系数满足什么条件时，次数公式

$$\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max(\deg f(x),\deg g(x))$$

中等号成立？满足什么条件时，小于号成立？

5. 假设 $\deg f_1(x)\leqslant\deg g_1(x)$, $\deg f_2(x)\leqslant\deg g_2(x)$,

(1) 求证：$\deg f_1(x)f_2(x)\leqslant\deg g_1(x)g_2(x)$.

(2) 问：是否一定有 $\deg(f_1(x)+f_2(x))\leqslant\deg(g_1(x)+g_2(x))$?

举例说明您的结论.

6.2　整除性理论

1. 带余除法

上一节我们介绍了多项式的加法、减法和乘法. 现在来讨论多