面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学

张荫南　童裕孙　朱弘鑫　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

张荫南　童裕孙　朱弘鑫　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112号

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材.本书用现代数学的观念对经济管理类的高等数学进行处理.重点突出，通俗易懂，强调基本素质、技能、知识的培养及数学在经济管理领域中的应用.章后习题中有很多来自历年全国研究生和MBA的入学试题，并附有全部习题答案.

本书可作为高等学校经济、金融、管理类专业的教材，也可作为准备参加研究生考试的学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张荫南编.-北京:高等教育出版社,2000
ISBN 7-04-007893-7

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第77019号

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010—64054588	传　　真	010—64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2000年1月第1版
印　　张	28.25	印　　次	2000年1月第1次印刷
字　　数	510 000	定　　价	28.00元

前　言

近年来，我们在复旦大学经济学院上高等数学课.教学的实践，和同学的交流，与经济、金融、管理领域朋友们的讨论都使我们深深感到他们对数学的渴望.能否编写一本合适的高等数学教程以满足这种需要.这本书的风格是什么？什么是它的主线？这是我们经常在一起讨论和思索的问题.

我们需要 Newton - Leibniz 式的数学.综观数学发展的历史，在 Newton - Leibniz 时代，数学、力学、物理、天文学、……是综合在一起的.那时的数学非常朴素、生动和具体.它的概念和方法与产生它们的背景合而为一.只要读一读那个时代的大数学家们的原著，例如高斯的论文，就可领悟到这种数学的风格.后来，数学作为一门独立的学科得到长足的发展.应用数学和纯粹数学应运而生，并相继出现了几何、代数、微分方程、拓扑学…….这无疑是数学的一大进步，是科学发展的必然要求.但是，这也产生了数学及其教学和其它学科分离的危险.

在我们即将步入 21 世纪的时刻，科学、技术和社会都发生了巨大的变化.数学的本身也完全改观了.其特征之一，是应用数学和纯粹数学的关系已经密不可分.数学不但深入到物理、化学、生物等传统领域，而且深入到经济、金融、信息、社会等各领域中.现在大家都感到对数学的十分紧迫的需求.对大多数人而言，他们并不希望成为一个数学专业人员，他们希望有一种容易学、容易掌握并和各类应用背景相结合的数学，他们希望通过数学的训练提高自身的素养和能力.简而言之，他们希望的是 Newton - Leibniz 式的数学.这是摆在数学工作者面前的一大课题，恐怕也是高等数学课程改革的中心内容之一.从这个角度而言，我们应站在当代科学发展的高度对高等数学课程的基本观念、素材进行提升、消化和改造，使它变得更准确、更通俗、更生动.使学生通过这门课程的学习了解数学的本意和作用.这就是我们希望追求的风格.

高等数学的核心是微积分，应该按照何种思路来展开微积分的故事呢？在这本书中，我们采用数据作为切入点.数据有一元和多元之分，它们对应于一元微积分和多元微积分.数据有确定性和非确定性两类，它造成数学分析和概率论之间的区别.在数据的基础上产生了变量和函数的概念.研究诸变量之间的关系无疑是数学的一个重要任务.微分学提出了用研究自变量的变化增量和因变量相应的变化增量之间的关系来揭示变量间相依关系的方法，小增

量的研究导致了微分学的建立. 在积分学中我们可发现“原子论”思想的光辉,无数个简单的小量的叠加可得到千姿百态的各种复杂的对象. 高等数学课程面对的是刚刚进入大学之门的中学生,微积分对于他们是一种全新的思维理念,也是进一步学习的基础. 使学生接受微积分的思维方式和核心是一件十分困难而又必需做好的工作.

本教程共计十四章,分为一元微积分,多元微积分和线性代数三部份,第十章为概率论的基本概念,其目的是使学生对不确定性有一个正确的理解,以利于他们学习其他的经管类课程. 另外还介绍了积分在数学期望和方差计算中的应用.

每章后面附有习题,并按基础与综合练习、应用题、思考与讨论三个类别配置,其中思考与讨论中的题目大部份来自历年的全国经济类研究生和 MBA 的入学试题. 根据我们的教学实践,如果每周有五学时的课程安排,可在两学期中教完. 该书亦可作为经管类的成人教育的参考书和准备参加研究生考试考生的参考书及自学用书.

本书的 1～10 章是我们三人合作编写,11～14 章由朱弘鑫独立完成,他还承担了全部习题的编写工作,作为一本高等数学教材,这是非常重要的,不可缺少的部分.

这本教材是教育部“面向 21 世纪高等数学课程改革”项目和复旦大学“高等数学课程建设”项目的产物. 在此,我们感谢以清华大学萧树铁教授为首的项目组的关怀和支持,感谢各兄弟院校老师提出的宝贵意见和热情鼓励,感谢复旦大学严绍宗教授的始终如一的鼓励和帮助,感谢复旦大学孙莱祥教授、方家驹教授和教务处其他领导的帮助,没有他们的支持这本书的完成是难以想象的,感谢复旦大学经济学院领导、老师和同学们的热情关心和合作. 当然,特别要感谢高等教育出版社,由于他们的帮助才使这本书能在 21 世纪来临之际问世,与读者见面.

要写好一本教材实非易事,我们希望得到全国同行的批评指正,更企盼着有机会和大家合作编写出更好地符合 21 世纪目标的新教材.

编者

1999 年 5 月 30 日

目　　录

第一章　实数与函数

本章要点

- 实数的十进制表示
- 函数及其图象
- 复合函数、反函数
- 初等函数
- 经济理论中的常用函数

在科学研究、工程设计、经济分析和金融业务中，人们常常要和各类数据打交道.

例如，商品的价格、商品的成本、市场需求量、国民收入的增长率及物价指数等都是作市场分析时必需涉及的数据.对这些数据进行科学的分析，揭示出它们之间的内在关系，人们才能作出正确的决策.例如，为即将上市的新产品制定一个合适的价格.

数据的表示和数据之间关系的研究是数据分析的基本问题.与此相对应，本章介绍实数的表示和函数的概念.它们是微积分的基石和出发点.

§1　实数的十进制表示

从事经济工作的人都关心成本、价格、利率、股票综合指数等数据.这类数据都是实数.实数系是最常见、最有用的数学结构之一.

对物品进行计数是人类文明史上最原始的数据分析工作，由此产生了正整数、零和负整数.用 $\mathbf{Z}$ 记它们的全体，则

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$$

对某一对象作等分的实践产生分数，记它们的全体为 $\mathbf{Q}$，则

$$\mathbf{Q}=\{p/q \mid p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N},q\neq 0\}$$

有理数集 $\mathbf{Q}$ 已经具有丰富的数学内涵.例如，$\mathbf{Q}$ 对于 $+$、$-$、$\times$、$\div$ 四则运算是“封闭”的，即 $\mathbf{Q}$ 中两元素经过四则运算(除数不为 0)后所得的结果仍属于 $\mathbf{Q}$.

我们把 $\mathbf{Q}$ 中的点画到一条直线上去，使 Q 和该直线上的点集一一对应，

这种几何方法非常直观，而且富有启发性. 作一条自左向右的有向直线，在此直线上取定一点 O 作为原点，并取定单位长度，称这条直线为数轴，记为 $\mathbf{R}$. 我们知道对 $p,q \in \mathbf{Z}, q \neq 0$，利用圆规和直尺可以作出长度为 p/q 的线段. 设有 $x \in \mathbf{Q}$，当 $x = p/q > 0$ 时，在数轴 $\mathbf{R}$ 上原点的右侧取定一个点，也记为 x，使线段 Ox 的长度为 p/q；当 $x = p/q < 0$ 时，在原点的左侧取定一个点 x，使 Ox 的长度为 $|p/q|$；当 $x = 0$ 时，令 x 与 O 点对应. 这样，我们得到有理数集 $\mathbf{Q}$ 和数轴 $\mathbf{R}$ 的子集 Q' 之间的一一对应.

仔细审视上面的过程，我们会发现一些有趣的事情. 其中之一是有理数点在实轴上“到处稠密”，这就是说，在任意两个不同的有理数之间必定还可以找到另外的有理数. 例如，当 x, y 是有理数时，$\frac{1}{2}(x+y)$ 便是介于 x 与 y 之间的一个有理数.

另一个值得注意的事实是 $\mathbf{Q}' \neq \mathbf{R}$. 例如，在 $\mathbf{R}$ 上的 0 的右侧取一点 x，使 Ox 与边长为 1 的正方形的对角线长度相等，则 $x \,\overline{\in}\, \mathbf{Q}'$.

符合理性的认识是认为 $\mathbf{R}$ 上的每一点都唯一地对应于一个数，这种对应便把有理数集合扩大为实数集合. 任一实数，不是有理数，便是无理数. 例如单位正方形对角线长度为 $\sqrt{2}$，它是一个无理数(见图 1.1)；又如半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆周长也对应于一个无理数，这就是我们熟悉的 π. 与有理数相同，无理数在实轴 $\mathbf{R}$ 上也是到处稠密的.

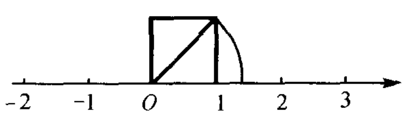

图 1.1 实 轴

利用几何方法可将 $\mathbf{Q}$ 中元素间的 +、- 运算直接推广到 $\mathbf{R}$ 上去，同样，也可以合理地定义实数的顺序关系：如果 x, y 是两个实数，若点 x 在点 y 的左边，称 $x < y$，若点 x 与 y 重合，称 $x = y$，但是，这种几何方法有很大的局限性，主要是不便于进行数值分析及运算，所以人们必须寻找实数表示的代数方法，其中，最常见的就是实数的十进制表示.

实数的十进制表示

为了叙述的方便，我们引入几个集合的符号：设 $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$，记

$$[a,b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x < b\}$$

$$[a,b)=\{x|x\in\mathbf{R},a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x|x\in\mathbf{R},a<x\leqslant b\}$$

统称它们是以 a 为左端点,b 为右端点的区间,特别地,称 $[a,b]$ 为闭区间,(a,b) 为开区间.

同样地,记无限区间

$$[a,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R},x\geqslant a\}$$
$$(a,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R},x>a\}$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\in\mathbf{R},x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,b)=\{x|x\in\mathbf{R},x<b\}$$
$$(-\infty,\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$$

记不小于 0 的实数集合为 $\mathbf{R}_+$,则

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_+&=[0,+\infty)\\&=[0,1)\cup[1,10)\cup[10,10^2)\cup\cdots\\&=\bigcup_{n=0}^{\infty}[10^n,10^{n+1})\cup[0,1)\end{aligned}$$

设 $x\in\mathbf{R}$,如果 $x>0$,则 $x\in\mathbf{R}_+$,故存在唯一的非负整数 n,使得

$$10^n\leqslant x<10^{n+1}$$

或者

$$0\leqslant x<1$$

在第一种情况下,由于

$$\begin{aligned}&[10^n,10^{n+1})\\&=[10^n,2\times10^n)\cup[2\times10^n,3\times10^n)\cup\cdots\cup[9\times10^n,10^{n+1})\end{aligned}$$

故存在唯一的正整数 a_n,$1\leqslant a_n\leqslant9$,使得

$$a_n10^n\leqslant x<(a_n+1)10^n$$

当 $n\geqslant1$ 时,对区间 $[a_n10^n,(a_n+1)10^n)$ 作长度为 10^{n-1} 的等分,我们又可以找到整数 a_{n-1},$0\leqslant a_{n-1}\leqslant9$,使得

$$a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}\leqslant x<a_n10^n+(a_{n-1}+1)10^{n-1}$$

依次类推可以确定 $n+1$ 个整数 a_j,$0\leqslant j\leqslant n$,$0\leqslant a_j\leqslant9$,使得

$$\begin{aligned}&a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_0\\&\leqslant x<a_n10^n+a_{n-1}0^{n-1}+\cdots+a_0+1\end{aligned}$$

记 $[x]=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_0$,称它为 x 的整数部分,则

$$x=[x]+x_1,0\leqslant x_1<1$$

由于

$$[0,1)=[0,10^{-1})\cup[10^{-1},2\times10^{-1})\cup\cdots\cup[9\times10^{-1},1)$$

故对 x_1，我们可以找到唯一的的整数 b_1，$0 \leqslant b_1 \leqslant 9$，使得

$$b_1 10^{-1} \leqslant x_1 < (b_1 + 1)10^{-1}$$

依次进行下去，对任何一个正整数 m，都有唯一的整数 b_m，$0 \leqslant b_m \leqslant 9$，使得

$$\begin{aligned} & b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \cdots + b_m 10^{-m} \\ \leqslant & x_1 < b_1 10^{-1} + b_2 10^{-2} + \cdots + (b_m + 1)10^{-m} \end{aligned}$$

我们称满足上述不等式的 b_m 为 x 的第 m 位小数. 总之，我们可依次将 x 的整数部分的每一位数字 a_j 和小数部分的每一位数字 b_m 找出来. 记

$$x = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$$

这就是 x 的十进制表示，这里，x 的小数位数可以是无限的，而且可能不循环.

自然地，对上述 x，记

$$-x = -a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$$

反之，如果给定一个十进制表示的正数 x，即

$$x = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$$

其中 $0 \leqslant a_j \leqslant 9, j = 1,2,\cdots,n, a_n \neq 0, 0 \leqslant b_j \leqslant 9, j = 1,2,\cdots$，令

$$x_m = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m$$

$$x'_m = a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m + 10^{-m}$$

容易看出区间列 $\{[x_m, x'_m]\}$ 逐渐收缩为 $\mathbf{R}_+$ 上的一点 x，显然 x 的十进制表示即为 $a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$，易知 $-x$ 的十进制表示即为 $-a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$.

总结上述讨论，我们得到

定理 1.1　设 $x \in \mathbf{R}$，则 x 具有十进制的展开

$$x = \pm a_n a_{n-1} \cdots a_0 . b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$$

反之，任何一个十进制的展开必对应于一个实数.

实数的十进制表示中体现的无限逼近的思想是建立严密的微积分学的基础，它所涉及的极限概念将在下一章中作进一步的讨论.

如果用一个不等于 1 的正整数 k 代替 10，我们可类似地得到实数的 k 进制表示. 常用的有二进制、八进制和十六进制等. 特别要指出的是实数的二进制表示法是计算机工作的基础.

§2　函数和图象

分析数据之间的相依关系是数据分析的重要内容. 有些数据之间是完全独立、互不相关的，例如：上海的日平均气温 t 和北京的电影院上座率 r 之间显

然是完全无关的.然而,另外有很多数据之间却是相互依赖,相互确定的.例如:顾客购买某一商品的数量和该商品的市场价格有关;城区空气的污染指标受道路上汽车的数量的影响;同一品牌的葡萄酒的价格很大程度上取决于其生产年份和产地.分析这种数据间的依赖关系对于指导实践活动有十分重要的意义.

例 2.1 设某厂生产一种产品,产品价格为 P,厂家根据 P 的大小决定其产量.如果用 Q 表示生产数量,则 Q 依赖于 P.一般说来,产量 Q 随着价格 P 的增加而增加.为了直观地描述 P,Q 之间的关系,我们作一个平面直角坐标系 POQ,由反映价格与产量对应关系的点(P,Q)的变化,可以得到一条供应曲线 S.

另一方面,产品的市场需求量也随着价格的升降而变动.如果也用 Q 表示市场需求量,一般说来,需求量 Q 随着价格 P 的增加而减少.这样,由反映需求与价格两因素的点(P,Q)在坐标系里又组成一条需求曲线 D.

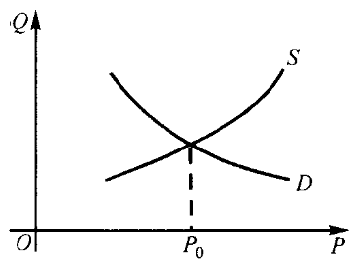

图 2.1 供需曲线

分析上述两条曲线的关系在实际工作中起相当重要的作用.例如,我们可以由此确定两条曲线交点的坐标(P_0,Q_0),当 $P > P_0$ 时,显然是供过于求,产品将积压,不利于资金周转;当 $P < P_0$ 时,又出现供不应求的现象,而定价过低使厂方和销售方的利益受损.合理的定价应取 $P = P_0$,我们称交点(P_0, Q_0)为供需平衡点.

从这个实例可知,在经济分析中确定数据间的相依关系,将反映它们之间相依关系的曲线描绘出来,或将它们满足的代数关系式确定出来,并据此进行经济要素的定量分析是十分重要的.与这一宗旨相对应的数学概念是函数及其图象,实际上,微积分的主要作用是教会大家如何分析函数,并从中得出所要求的结论.

函数及其图象

定义 2.2 设 $A \subset \mathbf{R}$,如果有一个规则 f,使得对 A 中的每一点 x,有唯

一的实数 $f(x)$ 与之对应,则称 f 是定义在 A 上的函数,记为

$$f: x \longrightarrow f(x), x \in A$$

称 x 为自变量, $f(x)$ 为 f 在 x 处的值, 称 A 为 f 的定义域, 记为 $D(f)$, 称 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 为 f 的值域,记为 $R(f)$.

定义 2.3 设 f 是定义于 A 上的一个函数,在平面直角坐标系中,记

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

称 G_f 为函数 f 的图象.

例 2.4 某工厂生产电视机,每台成本是 500 元,当每台售价是 x 元时,市场需求量为 $8\,000 - x$,又记生产电视机的利润为 C.

显然,C 是由 x 确定的,它们之间满足关系式

$$C = (8\,000 - x)(x - 500)$$

即 C 是 x 的由上述关系式确定的函数,其定义域应为 $500 \leqslant x \leqslant 8\,000$,这个函数的图象如下:

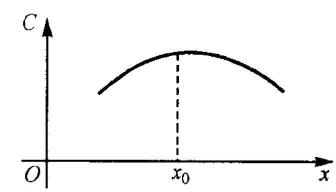

图 2.2 $C = (8\,000 - x)(x - 500)$ 的图象

从上图可知,厂家售价 x 有一个最佳值 x_0,当且仅当 $x = x_0$ 时才能获得最大利润,我们将用微分学的方法求出 x_0.

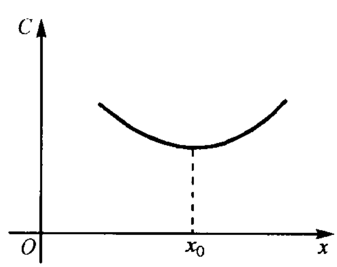

图 2.3 $C = 30x + \dfrac{2\,500}{x}$ 的图象

例 2.5 某工厂订购一批原料,为此必需支付两部分费用:第一部分是购买原料和运输的费用,订购数量 x 越大,在运费上得到的优惠越多,这部分的

费用为 $20x+\dfrac{2\,500}{x}$；第二部分是贮存和仓库费用，它与 x 成正比，费用为 $10x$，这样，总的费用 C 的函数表达式是：

$$C = 30x + \frac{2\,500}{x}, \qquad 0 < a \leqslant x \leqslant b$$

其中 a 和 b 分别是订购数量的最小和最大限额.画出它的图象，可知订购数 x 要慎重确定，以 $x = x_0$ 为最佳.

例 2.6　某商店对一种商品的售价规定如下：购买量不超过 5 千克时，每千克 0.8 元；购买量大于 5 千克而小于 10 千克时，其中超过 5 千克部分优惠价每千克 0.6 元；购买量大于 10 千克时，超过 10 千克部分每千克 0.4 元，若购买 x 千克的费用记为 $f(x)$，则

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0.8 \times 5 + 0.6(x-5), & 5 < x \leqslant 10 \\ 0.8 \times 5 + 0.6 \times 5 + 0.4(x-10), & x > 10 \end{cases}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 1 + 0.6x, & 5 < x \leqslant 10 \\ 3 + 0.4x, & x > 10 \end{cases}$$

这是定义在 $[0,\infty)$ 上的一个分段函数，见图 2.4.

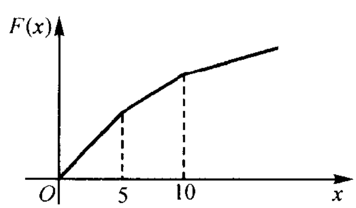

图 2.4　分段函数 f 的图象

例 2.7　出租车在 5 千米内收费为起步价 14.4 元，在 5 千米和 10 千米之间的每千米收费 1.8 元，超过 10 千米的部分每千米收费 2.7 元，这样，它的计价函数 f 是

$$f(x) = \begin{cases} 14.4, & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 14.4 + 1.8(x-5), & 5 < x \leqslant 10 \\ 23.4 + 2.7(x-10), & x > 10 \end{cases}$$

请读者画出这个分段函数的图象.

函数的性质

在初等数学中,我们已经学习过函数的单调性、奇偶性、周期性.从图象上看,单调增加函数(图 2.5)、单调减少函数(图 2.6)、奇函数(图 2.7)、偶函数(图 2.8)、周期函数(图 2.9) 具有各自明显的几何特征.

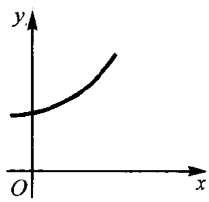

图 2.5　单调增加函数

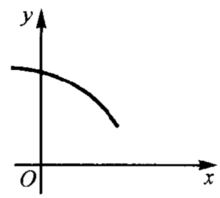

图 2.6　单调减少函数

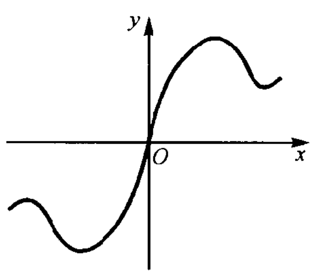

图 2.7　奇函数

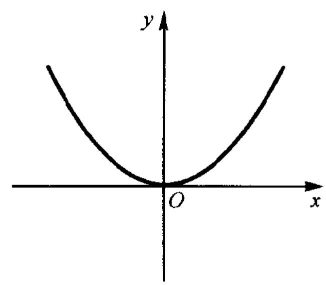

图 2.8　偶函数

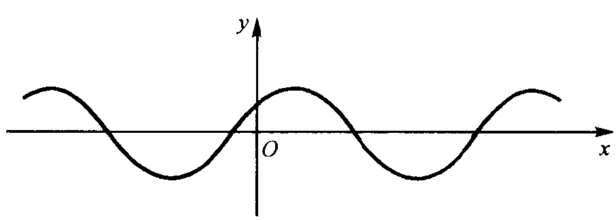

图 2.9　周期函数

在微积分的讨论中,我们还要用到函数的有界性.如果函数 f 在 D 上有定义,而且存在实数 M,使得

$$f(x) < M, x \in D$$

则称 f 在 D 上有上界(见图 2.10);如果

$$f(x) > -M, x \in D$$