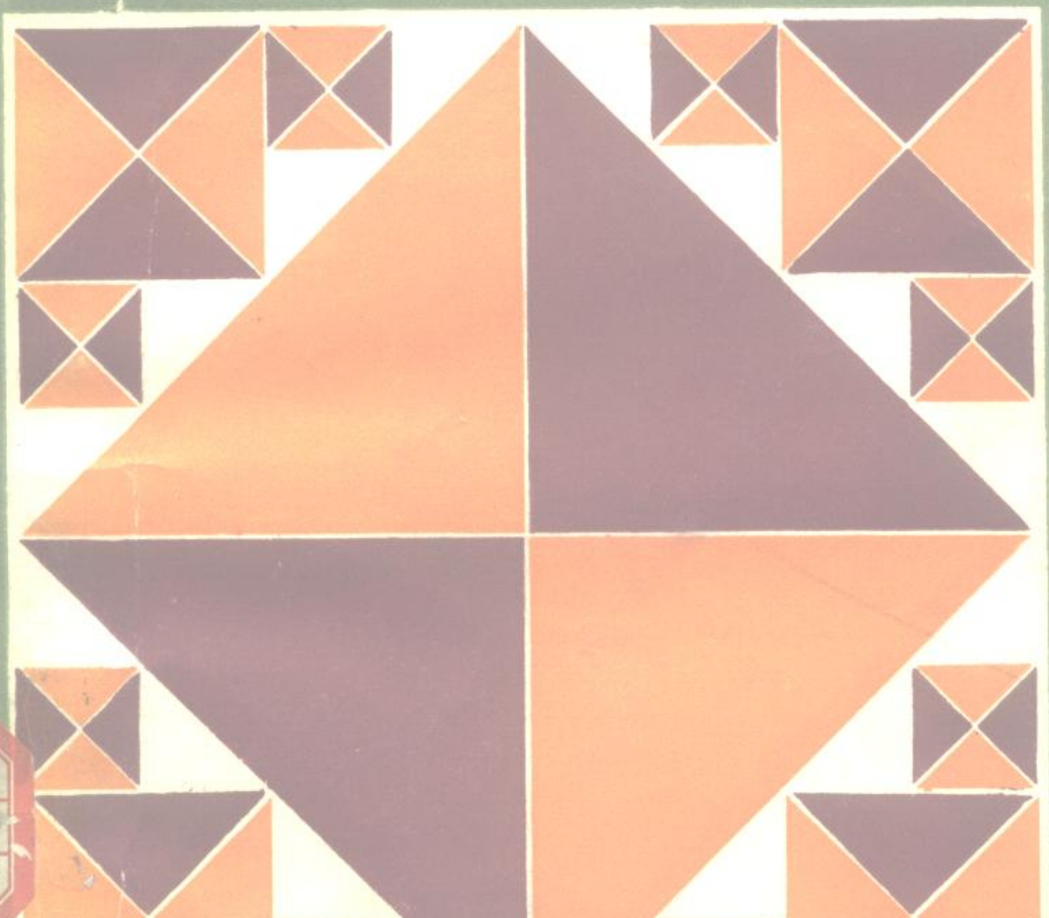
概率论及数理统计导论

上　册

V. K. 洛哈吉 著　高尚华 译



高等教育出版社

概率论及数理统计导论

上　册

V.K.洛哈吉　著
高尚华　译

高等教育出版社

内容提要

本书根据洛哈吉(V. K. Rohatgi)所著《概率论及数理统计导论》1976年版译出. 该书结构严密,处理方法新颖,并包括许多不常见的、有实用价值的结论. 本书可作为高等院校数学专业及其它开设概率统计课程的各专业学生的参考书,也可供有关专业的教师及科技工作者参考. 其内容主要包括: 概率,随机变量及其分布函数,矩与母函数,随机向量,特殊分布,极限定理,样本矩及其分布,点估计理论,奈曼-皮尔逊引理,置信估计,线性假设,非参数统计推断,序贯分析等.

本书即使在讨论相当艰深的课题时,也避免涉及实变函数,复变函数,测度等理论. 因此,读者只要掌握了线性代数、微积分课程的内容,就可顺利地阅读全书.

概率论及数理统计导论

上 册

V. K. 洛哈吉 著

高尚华 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 13.125 字数 310,000

1983年7月第1版 1984年12月第1次印刷

印数 00,001—15,700

书号 13010·0905 定价 2.80 元

译者的话

本书是根据美国约翰·威利父子公司(John Wiley & Sons, Inc.)1976年出版的《概率论及数理统计导论》(An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics) 一书翻译而成的. 原书是V. K. 洛哈吉 (Rohatgi) 在他的大学讲课笔记基础上编著出来的，是国外一本较完整地讲授概率论与数理统计的教科书.

本书具有结构严密、说理透彻的特点. 作为一本不用测度论知识的概率统计教科书，它的理论水平比较高，讨论问题也比较深刻. 很多例题、附注反复地向读者阐明了书中命题的因果关系，绝大部分章节精心选配了习题. 特别是统计部分，不少内容及其处理方式在国内概率统计书籍中见得不多. 译者希望本书的翻译出版，对高等院校教学概率统计的师生，以及概率统计方面的工作人员，能起到良好的参考作用.

考虑到学习本书的方便，对书中提到的常见外国人名，使用了中文译名；对不常见的外国人名，由于国内的中文译名极不统一，所以就保留了原文.

高等教育出版社的邓应生、朱美琨同志对本书译稿提了不少中肯意见，译者谨此表示衷心感谢. 由于水平所限，译文中错误不妥之处在所难免，恳请读者批评指正.

高尚华

1983. 5.

前　言

这本概率论与数理统计方面的教材是为每周讲授四学时的三学季课程或每周讲授三学时的两学期课程编写的．它主要供学数学的四年级大学生和一年级研究生使用，但也可以供学物理和工程的、具有扎实数学基础的学生使用．在此，我强调一下，这是一本数学课本，并不是一本“烹调书”，它不能当作一本职业课程的课本来使用．

本书必备的数学知识是适中的．仅假定读者已学过了集合论、线性代数的基本课程和高等微积分的完整课程，并假定读者不具有概率与统计的预备知识．

我的目的是提供一本完整的、取材恰当的概率论与数理统计入门书．对于希望在概率论与数理统计方面做研究生工作的学生来说，如果他们还不具备分析方面的测度论知识，那么在学习本教程的同时，建议他们学习这门课程，以便学完这本教程以后可以继续学习概率论或数理统计的高级课程．

本书实质上由三部分组成，虽然在正文中并没有给出这种形式上的划分．第一部分包括第一章至第六章，它们构成了这本教程概率论部分的核心．第二部分从第六章至第十一章，其中包括了统计推断的基础部分．第三部分包括论述特殊课题的其余三章．对于可以分成概率与数理统计的教程系列，本书的第一部分可用作概率论教程，第二部分，也许还加上论述特殊课题的一章或几章，可用作接下来的数理统计教程．

读者在这里将找到大量材料．虽然本书所包含的课题是很传

统的，但本书的讨论方式与所包含的特殊课题并不常见．很多内容，远比同一水平的书中所介绍的情况要深刻．本书的一些特点如下：

1. 有一章预备知识可作很好的参考．

2. 有大约550道问题、350多道解好的例题、大约200个附注、大约150个参考书目．

3. 每当细节过于复杂时都提出了预告．读者在初次阅读时可以跳过该节的后面部分，而绝不会影响他继续阅读以后的内容．

4. 有很多关于分布特征的结果(第五章)．

5. 有用算子方法给出的中心极限定理的证明与强大数定律的证明(第六章)．

6. 有一节极小充分统计量(第八章)．

7. 有一章特殊检验(第十章)．

8. 详细地介绍置信区间的理论，其中包括了贝叶斯区间与最短长度置信区间(第十一章)．

9. 有一章一般线性假设，其中包括线性模型直至它们在方差基本分析上的应用(第十二章)．

10. 有几节非参数估计与稳健性(第十三章)．

11. 有两节序贯估计(第十四章)．

我曾在美国的Catholic大学把本书的内容作为一年(两学期)的课程教过三次，曾在Bowling Green州立大学把它作为三学季的课程教过一次．1973年秋季，我的同事E.勒克斯教授在我的笔记的基础上教了这一门课程的第一学季，我的笔记最后成了这本书．作为一星期讲三小时课的一年的课程，我总是能教完这本书(只作很少的删节)．另外，每星期有一小时习题课由一位高年级的研究生来进行指导．

在这样规模的一本书中，一定会有一些印刷错误、疏漏以及叙述得含糊的地方。我感谢读者把它们指出来。

V. K. Rohatgi

于俄亥俄州 Bowling Green

1975 年 2 月

定理与参考书的说明

这本书分成编号为一至十四的十四章，还有一章不编号的预备知识．每一章分成若干节．每一节中引理、定理、等式、定义、附注、插图等都是按次序编号的．这样，定理 $i.j.k$ 是指第 i 章第 j 节的第 k 个定理，节 $i.j$ 是指第 i 章的第 j 节等．定理 j 是指它所出现的那一节的第 j 个定理．类似的约定适用于等式，唯一的不同是等式的号码写在圆括号内．每一节的后面有一组问题，这组问题使用与该节相同的编号方法．

关于预备知识的参考章是用字母P来开头的．这一章包括三节：P.1, P.2 与 P.3．每一节中定理与等式的编号如上所述．这样，定理P.2.14 是指预备知识的一章中第2节定理14.

本书末尾给出了参考书目，它们在正文里是用写在方括号[ ]内的数字来表示的．如果引用了一本书，那么记号([i], j)是指第 i 本参考书的第 j 页．

V.K.R.

目　录

下 册 目 录

绪　言

在这一章中我们陈述集合论、高等微积分以及线性代数的一些基本的结果，在本书的其余部分将经常提到它们. 下面的讨论并不意味着是自成体系的，它主要是为以后各章建立要用到的记号.

P.1　集合与类

在本书中，每当使用集合这个词时，除非另作说明，总假定是指某一给定集合Ω的一个子集. 与通常所说的一样，符号$\cup$与$\cap$分别作为集合论中的并与交. A^c 表示集合 A (在Ω中)的余集. $A-B$是两个集合 A 与 B 的差集，即$A\cap B^c$. $A\subseteq B$ 意味着 A 是 B 的子集. $A=B$意味着$A\subseteq B$并且$B\subseteq A$. 空集或零集用$\varnothing$来表示. 对于不相交集合A. B的并$A\cup B$，我们记成$A+B$.

通常，大写字母(A, B, C等)表示集合，小写字母(x, y, z等)表示集合的点或元素. 德文或英文的花体字母($\mathfrak{U}$,$\mathfrak{B}$,$\mathscr{S}$等)一般表示集合类，我们只涉及非空的集合类.

我们把集合类$\mathfrak{U}$的交记成$\cap\mathfrak{U}=\bigcap\limits_{A\in\mathfrak{U}}A$，把集合类$\mathfrak{U}$的并记成$\cup\mathfrak{U}=\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{U}}A$. 集合的不相交类$\mathfrak{U}$是指类$\mathfrak{U}$的任何两个不同的集合都是不相交的. 下面的恒等式称为德·摩尔根律:

(1)
$$(\cup\mathfrak{U})^c=\bigcap_{A\in\mathfrak{U}}A^c$$

(2)
$$(\cap\mathfrak{U})^c=\bigcup_{A\in\mathfrak{U}}A^c$$

设$\{A_n\}$是集合序列．对于 n 的无穷多个值，属于A_n的所有点$\omega\in\Omega$的集合称为序列$\{A_n\}$的上极限，并用

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \quad 或 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

来表示它．对于 n 除有限个外的所有值，属于 A_n的所有点的集合称为序列$\{A_n\}$的下极限，并用

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \quad 或 \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

来表示它．如果

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

我们便说极限存在，并把这同一个集合记成$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$，称之为极限集合．

我们有

$$(3) \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

如果序列$\{A_n\}$，对于$n=1, 2, \cdots$，满足$A_n\subseteq A_{n+1}$，则称之为非减序列，如果对于$n=1, 2, \cdots$，$A_n\supseteq A_{n+1}$，则称之为非增序列．如果A_n的序列是非减的，我们记成$A_n\downarrow$；如果 A_n 的序列是非增的，我们记成$A_n\uparrow$．显然，如果$A_n\downarrow$或$A_n\downarrow$，则极限存在并有

$$(4) \qquad \lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad （如果A_n\downarrow）$$

与

$$(5) \qquad \lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad （如果A_n\uparrow）$$

如果一个Ω的非空子集类关于可数并与余的运算封闭，并且包含$\varnothing$，则称之为一个σ-域（或一个σ-代数）．

容易证明：Ω所有子集所成的集合类是一个σ-域．并且如果$\mathscr{S}$是一个 σ-域，则$\mathscr{S}$关于可数交的运算封闭，并且包含集合Ω．此

外，给定一个非空的集合类$\mathfrak{U}$，则存在唯一的包含$\mathfrak{U}$的σ-域$\mathscr{S}_0$满足：如果$\mathscr{S}$是任何其它包含$\mathfrak{U}$的σ-域，便有$\mathscr{S}\supseteq\mathscr{S}_0$. 换句话说，$\mathscr{S}_0$是包含$\mathfrak{U}$的最小$\sigma$-域；$\mathscr{S}_0$称为由$\mathfrak{U}$生成的$\sigma$-域.

在学习概率论时很重要的一个σ-域是实线$\mathscr{R}$上的子集所成的波莱尔σ-域，它是由所有形式为$(a, b]$的有界半闭区间所成的集合类生成的σ-域，我们用$\mathfrak{B}$来表示它. $\mathfrak{B}$中的集合称为波莱尔集. 下面的结果起着关键的作用.

定理 1 (Halmos [45], 62). 实数的每个可数集合是波莱尔集.

定理 2 (Halmos[45],63). $\mathfrak{B}$与由实线上所有开区间或所有区间的集合类生成的σ-域相重合.

由此得出，每个实数的波莱尔集合都可以由区间进行可数次并、差以及交的运算而得到.

设A与B是两个集合(不一定是同一个集合Ω的子集). 我们把笛卡儿乘积记成$A\times B$，所谓笛卡儿乘积$A\times B$是指所有有序偶(a, b)的集合，其中$a\in A$，$b\in B$. 笛卡儿乘积的最熟悉的例子是n维欧几里得空间$\mathscr{R}_n$，它是n个集合的笛卡儿乘积，其中每个集合都等于$\mathscr{R}$. 由形式为

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n):\ a_i<x_i\leqslant b_i,\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

的矩形生成的$\mathscr{R}_n$中的子集所成的σ-域称为$\mathscr{R}_n$上的波莱尔σ-域，用$\mathfrak{B}_n$来表示. 这个σ-域$\mathfrak{B}_n$也可以由形式为$B_1\times B_2\times\cdots\times B_n$的乘积集合来生成，其中$B_i\in\mathfrak{B}$, $i=1, 2, \cdots, n$.

设Ω为非空集合，$\mathfrak{U}$为Ω的子集类，一个具有定义域$\mathfrak{U}$而且值域在$\mathscr{R}$内的函数P称为实值集合函数.

P.2 微 积 分

在这一节中，我们叙述微积分的一些结果. 下面出现的这些

结果的次序，不一定是微积分传统教程中的这些课题的次序.

每当积分$\int_A f(x)dx$出现时，不熟悉勒贝格积分理论的读者可以假定$\int_A f(x)dx$是在黎曼意义下所定义的. 为了保证有定义，读者可以假定f在除去有限个点外的所有点上有定义并且连续，还可以假定A是一个区间或有限个(不相交的)区间的并.

1. 积分运算的中值定理

定理 1 (Courant 和 John[16], 143). 如果f与g在$[a, b]$上连续，并且g在$[a, b]$上恒正，则在$[a, b]$上存在x_0使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx$$

特别地，在$[a, b]$上存在x_0使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$$

2. 洛必达法则

定理 2 (Courant 和 John[16], 464). 设f与g分别有连续的一阶导数f'与g'，并且设$f(a)=g(a)=0$. 如果$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$也存在，并且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

如果$f'(a)=g'(a)=0$, f''与g''存在并且连续，则可继续应用定理 2. 这个过程可以不断地进行下去.(这里f''表示二阶导数.)

3. 凸性与极值

凸性. f是一个实值函数，如果对于所有x_1与x_2的值，不等式

(1) $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

成立，则f称为凸函数. 如果$-f$是凸函数，我们便称f为凹函数.

如果对于 $x_1 \neq x_2$，不等式(1)是严格不等式，我们便说 f 是严格凸函数. 我们仅对连续凸函数感兴趣. 如果二阶导数存在，则凸性的判别准则归结为 $f''(x) \geqslant 0$.

一个函数 f 定义在区间 I 上，$x_0 \in I$ 如果存在一个函数 $h(x)$，其定义为 $h(x)=f(x_0)+m(x-x_0)$，这里 m 是实数，使得对于任何 $x \in I$ 有 $h(x) \leqslant f(x)$，则称 f 在 x_0 上有支柱. h 的图形称为 f 在 x_0 上的支柱线.

极值. 设 f 定义在 $D \subseteq \mathscr{R}$ 上，$x_0 \in D$. 如果存在一个包含 x_0 的开区间 I_{x_0}，使得对于任何 $x \in D \cap I_{x_0}$ 都有 $f(x_0) \geqslant f(x)$，我们便说 f 在 x_0 上有相对极大值. 如果对于所有的 $x \in D$ 有 $f(x_0) \geqslant f(x)$，我们便说 f 在 x_0 上有极大值. 可以给出相对极小值与极小值的类似定义. 术语相对极值通常包括相对极小值与相对极大值这两个术语，术语绝对极大值(绝对极小值) 则指 f 在 D 上的极大值(极小值).

微积分不提供任何直接的方法确定一个函数的极值，它只允许我们可以求出相对极值点来.

定理 3 (Courant 和 John[16], 240). 如果 f 在 D 的内点 x_0 上有相对极值，并且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$.

定理 4 (Courant 和 John[16], 242). 设 f 是区间 D 上的连续函数，x_0 是 D 的内点，而 $f'(x_0)$ 或者不存在或者等于零.

(a) 如果存在一个包含 x_0 的区间 $(a, b) \subseteq D$，使得当 $x \in (a, x_0)$ 时 $f'(x)>0$，当 $x \in (x_0, b)$ 时 $f'(x)<0$，则 f 在 x_0 点有相对极大值. 如果当 $x \in (a, x_0)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x \in (x_0, b)$ 时 $f'(x)>0$，则 f 在 x_0 上有相对极小值.

(b) 如果存在一个区间 $(a, b) \subseteq D$ 有 $x_0 \in (a, b)$，使得当 $x \in (a, x_0)$ 以及 $x \in (x_0, b)$ 时 $f'(x)>0$；或者当 $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ 时 $f'(x)<0$，则 f 在 x_0 点没有相对极值.