流 体 力 学

上 册

吴望一 编著

北京大学出版社

内 容 简 介

本书叙述深入浅出，思路清晰细致；既阐明物理概念，又有严格的数学处理，可作为专业基础课教材。

上册主要内容：场论及张量初步，流体力学的基本概念，流体力学基本方程组，流体的涡旋运动，流体静力学，以及伯努利积分和动量定理。每章末附有习题，书末附有习题答案。

可供大学力学专业师生，航空、水利、造船、机械、化工、应用数学等专业师生，以及有关科技人员参考。

流 体 力 学（上册）

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
新华书店北京发行所发行
国防科委印刷厂印刷
850×1168毫米 32开本 10印张 253千字
1982年8月第一版 1982年8月第一次印刷
印数1—36,000册

统一书号：13209·44 定价：1.50元

序

作者曾多次为北京大学数学力学系力学专业的学生讲授流体力学课程，并于1965年编写了一本流体力学讲义，1979年该讲义再次铅印。本书是在流体力学讲义的基础上根据作者多年来的教学实践以及近年来国内外同行们的先进经验修改补充而成的。

本书并不企图详尽无遗地向读者介绍所有流体力学的内容，而只是在专业基础课教学大纲规定的范围内选择一些最基本的内容，力求深入浅出地讲深讲透，使读者比较容易地跨进流体力学这门学科的门槛，从而为学习粘性流体、气体力学、计算流体等专门化课程，并为今后的工作创造良好的条件。

在本书中作者试图建立一个比较严密比较完整的体系，并努力阐明流体力学中的基本规律、基本概念、基本物理现象以及处理问题的基本方法。全书内容共分四大部分。第一部分讲场论及张量初步。考虑到在流体力学中广泛地采用场论和张量的工具，而有些读者在学习流体力学之前并没有系统地学过这方面的知识，因此作者认为在流体力学中集中地讲授场论和张量是十分必要的。多年的教学实践证明凡是这样做的都取得了事半功倍的好效果，正因为如此我们愿意把这一部分纯属数学的内容放在正文中。第二部分的中心问题是建立流体力学基本方程组，使读者一开始就对反映流体运动基本规律的方程组有一个全面完整的了解。立足于一般形式的方程组考虑具体问题就能够站得高看得远，做到心中有数和条理清楚。这部分内容很基本，将长期起作用。无论是研究计算流体或是其他与流体接壤的边缘性学科，流体力学方程组始终是最基本的出发点之一。当然在课程初始阶段建立复杂的流体力学方程组会遇到难点较集中读者不易接受的困难，但是这些困难比起这样做带来的好处还是第二位的，而且也是不

难克服或减轻的。第三部分介绍流体力学中经常遇到的涡旋运动的产生、发展和消亡的规律，以及在理论研究和解决实际问题中都非常有用的伯努利积分和动量定理。第四部分介绍流体力学各个具体领域。我们不采取有些书采用的先讲粘性流体后讲理想流体，不可压缩流体和可压缩流体混合在一起讲解的做法，而是根据由浅入深，由简到繁的原则，先静止后运动，先理想后粘性，先不可压缩后可压缩，先定常后不定常地介绍具体内容。我们认为这样做比较符合人们的认识规律和流体力学发展历史，因而也易于为读者所接受。

在教学方法上我们力求既讲清直观的物理概念，又不忽略严格的数学处理，把物理概念和数学方法有机地结合起来。作者认为偏废任何一方面都会影响学生分析问题和解决问题能力的培养。为了便于自学我们在引进一个概念，介绍一种方法时，力求讲清来龙去脉，说明要解决什么问题，采用什么方法，方法的要点是什么等等，尽可能采用启发式的方法引导读者逐步深入，自然而然地找到正确的答案。在阐述上我们力求细致深入，多为读者着想。

迄今为止，国内外已出版不少流体力学教科书，其中有些写的很好，很有特色，但是作者认为它们都不很适宜于当作专业基础课的教材使用。作者希望本书的出版能有助于上述问题的解决。

本书承蒙吴林襄教授审阅原稿并提出宝贵意见，作者愿意趁此机会向他表示衷心的感谢。作者还要感谢丁霭丽、鲍慧云、钮珍南、温功碧等同志，他们在精选习题，绘制插图，校阅清样上给予了很大的帮助。作者特别要感谢北京大学出版社邱淑清同志，由于她严肃认真和过细的工作，极大地减少了书中的错误和疏漏之处。

由于作者学识有限，谬误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以便再版时修正。

吴望一

1981年11月5日于北京大学

上 册 目 录

第一章　场论和张量初步

(A)　场　　论

1.1　场的定义及分类

设在空间中的某个区域内定义标量函数或矢量函数，则称~~定~~定义了相应函数的空间区域为场。~~义在此空间区域内的函数为场~~. 如果研究的是标量函数则称此场为标量场；如果研究的是矢量函数则称之为矢量场. 在场内定义的函数可以随时间改变，此时时间作为参数出现. 设 $\boldsymbol{r}$ 是空间点的矢径，x,y,z 是 $\boldsymbol{r}$ 的直角坐标，t 是时间，则标量场和矢量场内的函数 φ 或 $\boldsymbol{a}$ 可分析地表为：

$$\varphi=\varphi(\boldsymbol{r},t)=\varphi(x,y,z,t)$$
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{a}(x,y,z,t)$$

在物理及力学中我们经常碰到各种不同的标量场及矢量场. 温度场、压力场、密度场等都是标量场，而速度场、力场、电磁场等都是矢量场. 流体力学中研究的对象就是这些标量和矢量场. 因此场论的知识对于学习流体力学是必不可少的工具.

如果同一时刻场内各点函数的值都相等，则称此场为均匀场. 反之称为不均匀场. 如果场内函数值不依赖于时间，即不随时间 t 改变则称此场为定常场. 反之称为不定常场. 均匀场和定常场分析地可表为

$$\varphi(t),\ \boldsymbol{a}(t)$$

及

$$\varphi(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$$

场论是研究标量场及矢量场数学性质的一门数学分支. 本章只研究场的部分性质.

1.2 场的几何表示

用几何方法即用图形表示一个场有助于直观理解问题，并且具有实用意义.

我们先来研究如何用几何方法表示一个标量场 $\varphi(r, t)$：如果在每一个时刻，场的几何表示都已知道，则整个场的几何表示也就知道（如果所研究的场是定常的，那么只须研究场 $\varphi(r)$ 的本身即可）. 因此，只须取任一固定时刻 t_0 研究场 $\varphi(r, t_0)$ 的几何表示. 令

$$\varphi(r, t_0) = \text{常数} = \varphi_0$$

得到与之对应的曲面称之为等位面. 在等位面上 φ 的值都相等. 取一系列不同的 φ_0 值我们得到空间中一组与之对应的等位面，于是整个标量场被等位面分成很多区域（参阅图 1.2.1）.

作出等位面后，我们可以从等位面的相互位置，它的疏密程度看出标量函数的变化状况. 例如等位面靠得近的地方函数变化得快，靠得远的地方，变化得慢. 函数值的改变主要在等位面的法线方向发生，沿等位面切线方向移动时，函数值并不改变等等.

等位面在气象学上有重要应用，例如气候图上的等压线、等温线等都是标量场的等位面.

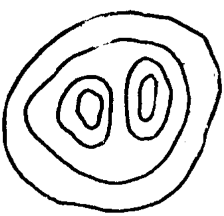

图 1.2.1

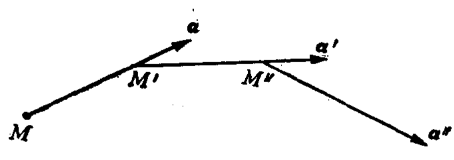

图 1.2.2

现在研究矢量场的几何表示. 矢量场的几何表示较标量场复杂，因为矢量是一个有大小及方向的量，须要分别对大小及方向

作几何表示．由于矢量的大小是一个标量，所以可以用上述等位面的概念来几何地表示它．至于矢量的方向则采用矢量线来几何地表示它．所谓矢量线就是这样的线，线上每一点的切线方向与该点的矢量方向重合．我们可以用下面的方法作出同一时刻通过场内任一点M的矢量线．如图 1.2.2 所示，过 M 点作该点的矢量 $\boldsymbol{a}$，在 $\boldsymbol{a}$ 上取一与 M 邻近的点 M'，过 M' 作其上的矢量 $\boldsymbol{a}'$，然后再在 $\boldsymbol{a}'$ 上取一与 M' 邻近的 M''，如此继续下去我们就得到一个折线 $MM'M''\cdots$，折线上每一小段的方向和该段起点上矢量的方向重合．令 MM'，$M'M''$，…趋于零，可得一条极限曲线，显然极限曲线上每一点的切线方向与该点的矢量方向重合．按照定义，它就是矢量线．下面我们写出确定矢量线的方程．设 $d\boldsymbol{r}$ 是矢量线的切向元素，则根据矢量线的定义有

$$\boldsymbol{a}\times d\boldsymbol{r}=0$$

写成直角坐标分量形式则为

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{a_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{a_z(x,y,z,t)}$$

其中 t 是一个参数．a_x, a_y, a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的三个分量．这就是确定矢量线的微分方程．积分此微分方程，在积分时将 t 看成参数，即得矢量线的分析表达式．

有了矢量线后，场内每一点的矢量方向可由矢量线的切线方向定出．

有时，我们也可以从矢量线的疏密程度估计矢量在各点的大小．

在场内取任一非矢量线的封闭曲线 C，通过 C 上每一点作矢量线．则这些矢量线所包围的区域称为矢量管．

上面我们研究了标量场和矢量场的几何表示．下面我们将讲述如何表征任一时刻场内每一点邻域内的函数变化状况．换句话说，研究每一点上由于场的不均匀性而引起的函数变化．我们先讲标量场的情形．

1.3 梯度——标量场不均匀性的量度

给定一标量场 $\varphi(r,t)$（以后为了讲述方便，将场内的函数简称为场）．我们的任务是在任一时刻描写标量场中每点邻域内的函数变化．

和以往一样，我们在某一固定时刻 $t=t_0$ 研究标量场 $\varphi(r,t_0)$（为了方便起见今后将 t_0 省略）．在场内任取一点 M，过 M 点作曲线 s．我们用下列极限值

$$\lim_{MM'\to 0}\frac{\varphi(M')-\varphi(M)}{MM'} \tag{1.3.1}$$

表征标量函数 φ 在 M 点上沿曲线 s 方向的函数变化，其中 M' 是在 s 上与 M 无限邻近的点，$\varphi(M')$ 是 M' 点上的函数值（参看图 1.3.1）．以符号 $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ 表示(1.3.1)式中的极限值，称为函数在 M 点上沿曲线 s 方向的方向导数．于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\lim_{MM'\to 0}\frac{\varphi(M')-\varphi(M)}{MM'} \tag{1.3.2}$$

过 M 点可以作无穷多个方向，每个方向都有对应的方向导数，如果所有方向上的方向导数都已知道，那么函数 φ 在 M 点邻域内的变化状况便完全清楚了．研究表明，各个方向上的方向导数并不是相互独立的．事实上只要知道过 M 点的等位面法线方向 n 上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 后，所有其他方向 s 上的方向导数都可以通过 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 及方向 n,s 表示出来，这样矢量 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}n$ 已完全描写了 M 点邻域函数 φ 的变化状况．现在我们来证明上述事实．

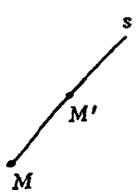

图 1.3.1

过 M 点作等位面

$$\varphi(r)=\varphi(M)=C$$

及等位面的法线方向 n,n 指向 φ 增长的方向. 在法线 n 上取一与 M 点无限邻近的点 M_1,过 M_1 点作等位面

$$\varphi(r)=\varphi(M_1)=C_1$$

现在我们过 M 点作任一方向 s,它和等位面 $\varphi=C_1$ 交于 M' 点. 显然

$$\varphi(M')=\varphi(M_1)$$

根据方向导数的定义, n 方向和曲线 s 方向的方向导数是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\lim_{MM_1\to 0}\frac{\varphi(M_1)-\varphi(M)}{MM_1} \tag{1.3.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\lim_{MM'\to 0}\frac{\varphi(M')-\varphi(M)}{MM'} \tag{1.3.4}$$

从图1.3.2上可以看出,MM' 和 MM_1 之间存在着下列关系

$$MM_1=MM'\cos(n,s) \tag{1.3.5}$$

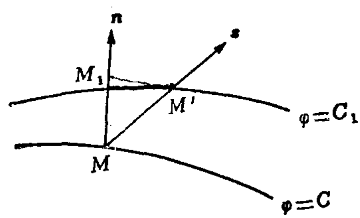

图 1.3.2

将(1.3.5)式代入(1.3.4)式,并考虑到(1.3.3)式及

$$\varphi(M')=\varphi(M_1)$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial s}&=\lim_{MM'\to 0}\frac{\varphi(M')-\varphi(M)}{MM'}\\&=\cos(n,s)\lim_{MM_1\to 0}\frac{\varphi(M_1)-\varphi(M)}{MM_1}\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(n,s)\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

上式表明, s 方向上的方向导数可以通过 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 及 s 与 n 两方向之

间夹角的余弦表示出来．也就是说，知道等位面 $\varphi=C$ 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 及其上的方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$后，则任一方向 s 上的方向导数即可按(1.3.6)式求出．

大小为$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，方向为 $\boldsymbol{n}$ 的矢量称为标量函数 φ 的梯度，以

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{1.3.7}$$

表之，它描写了M点邻域内函数 φ 的变化状况，是标量场不均匀性的量度．考虑到(1.3.7)式，(1.3.6)式可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=|\operatorname{grad}\varphi|\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{s})=\boldsymbol{s}_0\cdot\operatorname{grad}\varphi \tag{1.3.8}$$

其中 s_0 是 s 方向的单位矢量．于是 s 方向的方向导数等于梯度矢量在 s 方向的投影．此外，无论从 (1.3.6) 式或图 1.3.2 中都可以看出

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|<\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| \tag{1.3.9}$$

即函数 φ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数值最大，φ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向变化最快．而在等位面切线方向的方向导数等于零，因此沿等位面方向 φ 全然不改变．

我们现在求梯度在直角坐标系中的表达式．根据(1.3.8)式梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 在 x,y,z 轴方向上的投影分别等于 x,y,z 轴上的方向导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

于是梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1.3.10}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 x,y,z 轴上的单位矢量.

总结起来，梯度的主要性质是：

(1)梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 描写了场内任一点 M 邻域内函数 φ 的变化状况，它是标量场不均匀性的量度；

(2)梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向与等位面的法线重合，且指向 φ 增长的方向，大小是 $\boldsymbol{n}$ 方向上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$；

(3)梯度矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 在任一方向 s 上的投影等于该方向的方向导数；

(4)梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向，即等位面的法线方向是函数 φ 变化最快的方向；

(5)梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式是

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

下面我们证明两个实际上常常采用的梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 的性质.

定理1 梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 满足关系式

$$d\varphi=d\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\varphi$$

反之,若 $d\varphi=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 必为 $\mathrm{grad}\varphi$.

证 标量函数 φ 的全微分是

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

考虑到

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$$

我们得到

$$d\varphi=d\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\varphi$$

即 $\mathrm{grad}\varphi$ 满足关系式 $d\varphi=d\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\varphi$.反之，若 $d\varphi=d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$，另一方面 $d\varphi=d\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\varphi$,两式相减后得

$$dr\cdot(\mathbf{a}-\mathrm{grad}\varphi)=0$$

但因 dr 是任意选取的方向，故有

$$\mathbf{a}=\mathrm{grad}\varphi$$

即得证明.

定理2 若 $\mathbf{a}=\mathrm{grad}\varphi$,且 φ 是矢径 r 的单值函数，则沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L \mathbf{a}\cdot dr$$

等于零，反之，若矢量 $\mathbf{a}$ 沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int \mathbf{a}\cdot dr=0$$

则矢量 $\mathbf{a}$ 必为某一标量函数 φ 的梯度，即 $\mathbf{a}=\mathrm{grad}\varphi$.

证 若 $\mathbf{a}=\mathrm{grad}\varphi$,则

$$\int_L \mathbf{a}\cdot dr=\int \mathrm{grad}\varphi\cdot dr$$

由上一定理知

$$d\varphi=dr\,.\mathrm{grad}\varphi$$

于是

$$\int_L \mathbf{a}\cdot dr=\int_L d\varphi$$

因 φ 是 r 的单值函数，L 是封闭曲线，故

$$\int_L d\varphi=0$$

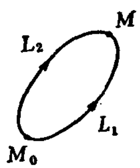

图 1.3.3

这样我们得到

$$\int_L \mathbf{a}\cdot dr=0$$

反之，若矢量 $\mathbf{a}$ 沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L \mathbf{a}\cdot dr=0$$

现证 $\mathbf{a}$ 必为 $\mathrm{grad}\varphi$.

首先证明，从某一定点 M_0 到任一变动点 $M(r)$的线积分与

积分路线无关．为此任取两个从 M_0 到 M 的积分曲线 L_1及 L_2组成一封闭曲线，如图 1.3.3 所示．根据假定，沿此封闭曲线的线积分为零，

$$\int_{M_0(L_1)}^{M} \mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{M(L_2)}^{M_0} \mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

即

$$\int_{M_0(L_1)}^{M} \mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{M_0(L_2)}^{M} \mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r}①$$

因为从 M_0 到 $M(\boldsymbol{r})$的线积分与积分路线无关，因此积分值只是 $\boldsymbol{r}$ 的函数，以 $\varphi(\boldsymbol{r})$表之，于是

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_{M_0}^{M} \mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

由此得

$$d\varphi=\mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

根据上一定理的结果推出

$$\mathbf{a}=\mathrm{grad}\varphi$$

定理证毕．

定理 1 及定理 2 反映了梯度的同一个性质，定理 1 是微分形式，而定理 2 是积分形式．

定理 1 和定理 2 将单值函数 φ 的梯度和 φ 的全微分以及线积分联系了起来，而全微分及线积分的运算和性质我们是熟悉的，因此就有可能利用定理 1 和定理 2，通过全微分和线积分求函数 φ 的梯度及研究梯度的某些性质．

下面我们举一个例子说明如何利用梯度的性质求某给定函数的梯度．

例 计算仅与矢径大小r有关的标量函数$\varphi(r)$的梯度 $\mathrm{grad}\varphi$．

现在我们利用梯度的不同性质求 $\varphi(r)$的梯度．

---

① 另外一种更直观的证法是这样的

$$\int_{M_0(L_1)}^{M}=\int_{M_0(L_1)}^{M}+\int_{M_0(L_2)}^{M}+\int_{M(L_2)}^{M_0}=\int_{M_0(L_2)}^{M}$$

i) 利用性质(2)，标量函数 $\varphi=\varphi(r)$ 的等位面是以坐标原点为心的球面，而球面的法线方向，即矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向，故 $\operatorname{grad}\varphi$ 的方向就是矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向；其次 $\operatorname{grad}\varphi$ 的大小是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\varphi'(r)$$

于是

$$\operatorname{grad}\varphi=\varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ii) 利用性质(5)，显然

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}$$

因

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

故

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

于是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{d\varphi}{dr},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dr},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dr}$$

而

$$\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r}\frac{d\varphi}{dr}$$

$$=\varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

iii) 利用定理1，

$$d\varphi(r)=\varphi'(r)dr=\frac{\varphi'(r)}{r}rdr$$

因

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=r^2$$