现代数学译丛

几何

（第四卷）

二次型，二次超曲面与圆锥曲线

〔法〕M. 贝尔热 著

科学出版社

现代数学译丛

几　　何

（第四卷）

二次型，二次超曲面与圆锥曲线

〔法〕M. 贝尔热　著

陈志杰　周克布　译

科　学　出　版　社

1 9 8 9

内 容 简 介

《几何》是法国数学家 M. 贝尔热为大学生撰写的一套教学参考书. 全书共分五卷. 主要内容为：群在集合上的作用，仿射与射影空间；欧氏仿射空间；凸集与紧多面体；二次型、二次超曲面与圆锥曲线；球面与椭圆、双曲几何. 本书配有大量的图和例，并有许多知识性的注释、按语和历史文献介绍. 本书根据原书第二版翻译.

第四卷介绍二次型、二次超曲面与圆锥曲线.

本书可供高等院校数学系师生和有关的数学工作者参考.

M. Berger

GÉOMÉTRIE

4/ *Formes quadratiques, quadriques et coniques*

CEDIC/Fernand Nathan, 1979, 2^{e} édition

现 代 数 学 译 丛

几 何

(第四卷)

二次型、二次超曲面与圆锥曲线

[法] M. 贝尔热 著

陈志杰 周克希 译

责任编辑 杜小杨

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1989 年 9 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1989 年 9 月第一次印刷　　印张：6 1/2

印数：0001—1 425　　字数：171 000

ISBN 7-03-001160-0/O·263

定价：6.10 元

目　　录

第13章 二 次 型

欧氏空间的理论是在定义这种空间的正定二次型的基础上建立起来的．但在数学的丛林里，以及在力学或物理中，还会遇到很多其它种类的二次型．正如 Dieudonné 所说的，几乎没有一种数学理论不涉及二次型．举例说：

——分析中的 Hilbert 空间，Sobolev 空间；

——当维数是一个紧流形的维数的一半时，在这个流形的上同调上由上积所提供的二次型或交错型；

——在数论中，Riemann 几何或在相对论里所用到的 Lorentz 流形；

——在力学中，Liouville 型和统而言之的整个正在蓬勃发展的辛几何，以及挠量都涉及二次型．

本书中二次型除了出现在欧氏空间里，还出现在关于圆锥曲线及二次超曲面的各章中，而且在球面几何(第 20 章)与双曲几何(第 19 章)中，以及关于射影对射的 14.5.5 节里也稍有涉及．

这一章只涉及二次型理论的某几个方面，特别是着眼于刚才提及的各种几何应用．如要获得更多知识，可参看 [AN]，[S-T]，[Bl2]，[SE2]．

第一节是定义及例，其中 Artin 空间以后将经常用到．接着，13.2 节研究非欧氏二次型所表现的种种现象：迷向向量及奇异子空间；与所考虑的二次型相关联的、从 E 到它的对偶空间 E^* 内的线性映射 φ，在这里起着主要作用．13.3 节研究欧氏空间正交性的扩张．这一节证明了一个对以后几节有重要意义的技术性结论：可作出任意子空间的非奇异完备化空间．在 13.4 节内可看到任何二次型允许有正交基；当基域是 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 时，由此即可推导出这些二次型的分类．13.5 节专门讨论一个经典的重要问题：在欧氏

结构中，寻找一个二次型的轴．在 13.6 节内引进了二次型 q 的群 $O(q)$，它是欧氏向量空间中正交群的自然推广．我们还证明了有关 Artin 空间的一些技术性结论．可以这么说，Artin 空间是与欧氏空间偏离最大的空间．在 13.7 节证明了二次型的群由超平面对称生成，并且在等度量子空间上是可迁的．这个证明比在欧氏情形时困难得多．最后，13.8 节专门讨论在欧氏平面中所遇到的角及有向角的概念在实 Artin 平面内会变成怎样．在那里，将初次接触到双曲几何，而它是第 19 章的研究对象．

本章中 E 是在特征数不为 2 的域 K 上的有限 n 维向量空间（参见 3.3.2）．E 的向量子空间简称为子空间．

13.1 定义及例

13.1.1 定义． 向量空间 E 中的一个二次型就是 $\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$ 的一个元素 q（参见 3.3.1）．以 P 表示导出它的那个唯一的对称双线性型，并称为 q 的极型．

以后也记 $Q(E)=\mathscr{P}_2^{\bullet}(E)$．

13.1.2 注． 我们有(参见 3.3.2.1)：

$$q(x)=P(x,x),\ P(x,y)=\frac{1}{2}\Big(q(x+y)-q(x)-q(y)\Big),$$

$$q(\lambda x)=\lambda^2 q(x).$$

用微分学的语言来说，若 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，则 $q:E\to K$ 是 C^∞ 级的，而且有 Euler 恒等式：

$$q(x)=\frac{1}{2}q'(x)(x),$$

这是因为 $P(x,y)=\dfrac{1}{2}q'(x)(y)$．对于坐标 $\{x_i\}$，特别可得

$$P(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}y_i\ \frac{\partial q}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n).$$

最后有

$$P(x, y) = \frac{1}{2} q''(0)(x, y).$$

只要 $q: E \to K$ 满足 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$（即它是二次齐次的）且在 0 点有二阶导数，上述公式即为有效．有了这两个条件就能使 q 成为一个二次型．这一切都是求导法则的结果，可参看 [CH1]．其思想仅仅是把 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ 对于 λ 求导．

13.1.3 例

13.1.3.1 欧氏结构，参看 8.1.1.

13.1.3.2 在相对论中会遇到二次型 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

13.1.3.3 设 $\varphi \in E^*$（E 的对偶空间），则 $q = \varphi^2$ 定义为 $q(x) = (\varphi(x))^2$ 是一个二次型，其极型是 $P(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$. 更一般地，若 φ, $\phi \in E^*$，可定义 $q = \varphi\phi$ 为 $q(x) = \varphi(x)\phi(x)$，它的极型是 $1/2(\varphi(x)\phi(y) + \varphi(y)\phi(x))$. 对于 $k_i \in K$ 及 $\varphi_i \in E^*$ 可类似地定义 $q = \sum_i k_i \varphi_i^2$.

13.1.3.4 若 $\{e_i\}$ 是 E 的基，$\{e_i^*\}$ 是 E^* 的对偶基，则有如下的二次型：

(i) $q = \sum_{i=1}^{r} (e_i^*)^2$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$，或者就记为 $q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$.

(ii) $q = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2$ $(1 \leqslant r \leqslant r + s \leqslant n)$.

若 $n = 2p$，且 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,p} \cup \{h_i\}_{i=1,\cdots,p}$ 为 E 的一组基，其相应的坐标记为 x_i, y_i，我们也考虑下述二次型：

(iii) $q = 2\sum_{i=1}^{p} x_i y_i$.

13.1.3.5 若 $F \subset E$ 是一个子空间且 $q \in Q(E)$，则 q 在 F 上的限制 $q|_F$ 是 F 上二次型．

13.1.3.6 **在基下的表示，相关联的矩阵．** 设 $\{e_i\}$ 是 E 的一个基，P 是 $q \in Q(E)$ 的极型，则 P（从而 q）被 $P(e_i, e_j)$ 的集合完全确定．把 n 阶方阵 $A = (P(e_i, e_j)) = (a_{ij})$ 称为 q 关于

基 $\{e_i\}$ 的矩阵，以 $q \longleftrightarrow A$ 记这种对应关系．若

$$x \cong X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y \cong Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则有：

$$\textbf{13.1.3.7} \begin{cases} P(x,\ y) = {}^tXAY = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_iy_j = \sum\limits_{i} a_{ii}x_iy_i \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{i<j} a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i), \\ q(x) = {}^tXAX = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j = \sum\limits_{i} a_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{i<j} a_{ij}x_ix_j. \end{cases}$$

从这些公式可以看出，不用进行 3.3.2.1 的计算就能从 q 得出 P：把 x_i^2 项换成 x_iy_i，把 x_ix_j 换成 $1/2(x_iy_j + x_jy_i)$ 即可．

如果作基的变换 $\{e_i\} \Rightarrow \{e_i'\}$，其过渡矩阵 S 由 e_i' 关于 $\{e_i\}$ 的坐标所构成（或 $S = M(f)$ 是 f 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵，这里 f 是使 $\forall_i$ 有 $f(e_i) = e_i'$ 的自同态），则

13.1.3.8 $\boxed{q \text{ 关于 } \{e_i'\} \text{ 的矩阵} = A' = {}^tSAS.}$

因此我们得到例 13.1.3.4 中的矩阵为

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } A = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_t 是 t 阶单位阵．

13.1.3.9 逆象．设 E, E' 是（在同一个域上）两个向量空间，$f \in L(E,\ E')$ 是态射，且 $q' \in Q(E')$．q' 关于 f 的逆象记为 f^*q'，是如下定义的二次型 $q \in Q(E)$：

$$\boxed{q(x) = (f^*q')(x) = q'(f(x)).}$$

若 P' 是 q' 的极型，则 q 的极型 $P = f^*P'$ 定义为

$$P(x,\ y) = P'(f(x),\ f(y)).$$

特别，线性群 $\mathrm{GL}(E)$ 通过 $f \longmapsto \{q \longmapsto f^*q\}$ 作用在 $Q(E)$ 上（其实，$\mathrm{GL}(E)$ 内的运算应取作相反的运算：这是因为 $(g \circ f)^*q$

$=f^*(g^*q)!)$. 对于基 $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$, 若 $q'\longleftrightarrow A'$, U是 f 关于上述基的矩阵，则

13.1.3.10 $\boxed{f^*q'={}^tUA'U.}$

事实上由 13.1.3.7 有:

$$(f^*q')(x)={}^tXAX=q'(f(x))={}^tf(X)A'f(X)={}^tX{}^tUA'UX.$$

13.1.4 等价性;分类问题

13.1.4.1 定义. 设 q 和 q' 分别是 E 和 E' 上的二次型，若存在 $f\in\mathrm{Isom}\ (E;\ E')$ 使得 $q=f^*q'$，则称 q 与 q' 是等价的. 这时也称结构 $(E,\ q)$ 与 $(E',\ q')$ 是等度量的 (参见 8.1.5) 或同构的. 所谓在域 K 上把二次型分类，就是确定 K 上有限维向量空间中二次型(关于上述等价关系)的一切等价类.

13.1.4.2 对任一维数 n, K 上二次型分类问题可归结为确定 $Q(K^n)$ 在 $\mathrm{GL}(K^n)$ 作用下的所有轨道.

13.1.4.3 例. 与 13.1.3.4(iii) 等价的二次型称为中性二次型(这时 $\dim E$ 必须是偶数). 例如,若 $K=\mathbf{C}$, $n=2p$, 则二次型 $q=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 是中性的, 这是因为

$$\sum_{i=1}^{2p}x_i^2=\sum_{l=1}^{p}(x_l^2+x_{l+p}^2)=\sum_{l=1}^{p}(x_l+ix_{l+p})(x_l-ix_{l+p}).$$

同理,当 $r=s$, $n=2r$ 时, 例 13.1.3.4 (ii) 的二次型也是中性的.

13.1.4.4 定义. q 是中性二次型的 $(E,\ q)$ 称为 Artin 空间. $2p$ 维的 Artin 空间常记为 Art_{2p}; 当 $p=1$ 时称为 Artin 平面。因此同维 Artin 空间互相同构. 在文献中有时把 Artin 平面称为“双曲平面”;但我们不采用这种叫法,因为双曲平面的概念完全是另一回事. 我们将在第 19 章中研究双曲平面.

13.1.4.5 在 13.4.6 与 13.4.7 中我们将完整地解决当 $K=\mathbf{C}$ 及 $K=\mathbf{R}$ 时二次型分类问题. 这是一个简单的问题. 但对任意的 K, 这却是一个难题,目前我们几乎无法着手讨论. 已经解决的情形有: 对 $K=\mathbf{Q}$, [SE2] 用整个第 IV 章给出这个问题的

解法;对有限域,参看 [AN],第 143—148 页;对代数数域,差不多需要整整一本书,参见 [OM]. 在 [S-T] 里,读者可以发现许多关于二次型的初等的结果. 至于一般情形,只有一维时是容易解决的,我们可以在下面看到.

13.1.4.6 判别式. 13.1.3.8 表明 $\det A$ 依赖于所取的基,但它在商集 $K/(K^*)^2$ 内的象却与基的取法无关. 这个象被记为 $\operatorname{disc}(q)$,称为二次型 q 的判别式. 此外,13.1.3.10 表明两个等价二次型的判别式相等: $\operatorname{disc}(f^*q)=\operatorname{disc}(q)$. 但是,反过来却不正确,例如对 $K=\mathbf{R}$, $n=4$: $q=x^2+y^2+z^2+t^2$, $q'=x^2+y^2-z^2-t^2$ 有相同判别式,但据 13.4.7,它们不等价.

13.1.4.7 若 $\dim E=1$,则 q 与 q' 等价的充要条件是 $\operatorname{disc}(q)=\operatorname{disc}(q')$. 这可以从 13.1.3.10 立即得出. 例如若 $K=\mathbf{C}$: $\mathbf{C}/(\mathbf{C}^*)^2=\{0,1\}$,故有两类二次型: $q=0$, $q=x^2$. 若 $K=\mathbf{R}$: $\mathbf{R}/(\mathbf{R}^*)^2=\{-1,0,1\}$,则有三类二次型: 0, x^2, $-x^2$. 这是 13.4.6 及 13.4.7 的特殊情形.

今后,(E,q) 表示带有二次型 q 的向量空间,q 的极型是 P.

13.2 奇异元及迷向元,根基,退化性及奇异性

13.2.0 如 8.1.8.1 所示,P 诱导了一个 $\varphi\in L(E,E^*)$: $\varphi(x)(y)=P(x,y)$. 若 $\{e_i\}$ 是 E 的基,$\{e_i^*\}$ 是对偶基,A 是 q 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵,则 A 也是 φ 关于基 $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$ 的矩阵,因为

$$a_{ij}=P(e_i,e_j)=\varphi(e_i)(e_j)=e_j^*(\varphi(e_i)).$$

我们记得,$\varphi\in\operatorname{Isom}(E;E^*)$ 是等价于 $\operatorname{Ker}\varphi=0$ 的.

13.2.1 定义. 称 $q^{-1}(0)$ 为迷向锥面(或光锥). 使 $x\in q^{-1}(0)$ 的向量 $x\in E$ 称为迷向向量. 若 $q^{-1}(0)=0$,称二次型 q 为非迷向的.

q 的根基是 $\operatorname{rad}(q)=\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in E: P(x,y)=0\ \forall\, y\in E\}$; q 的秩就是 φ 的秩: $\operatorname{rang}(q)=\dim(\varphi(E))$. 若 $\operatorname{rad}(q)=0$,则称 q 是非退化的,这等价于 $\operatorname{rang}(q)=\dim E$ 或 $\varphi\in\operatorname{Isom}(E;E^*)$.

若 $\mathrm{rad}(q) \neq 0$ 则 q 称为退化的.

对 E 的子空间 F，F 的根基是

$$\mathrm{rad}(F)=\mathrm{rad}(q/F)=\{x\in F:\ P(x,y)=0\ \forall\, y\in F\}.$$

若 $q|_F$ 是非退化的(或退化的)，则称子空间 F 是非奇异的(相应

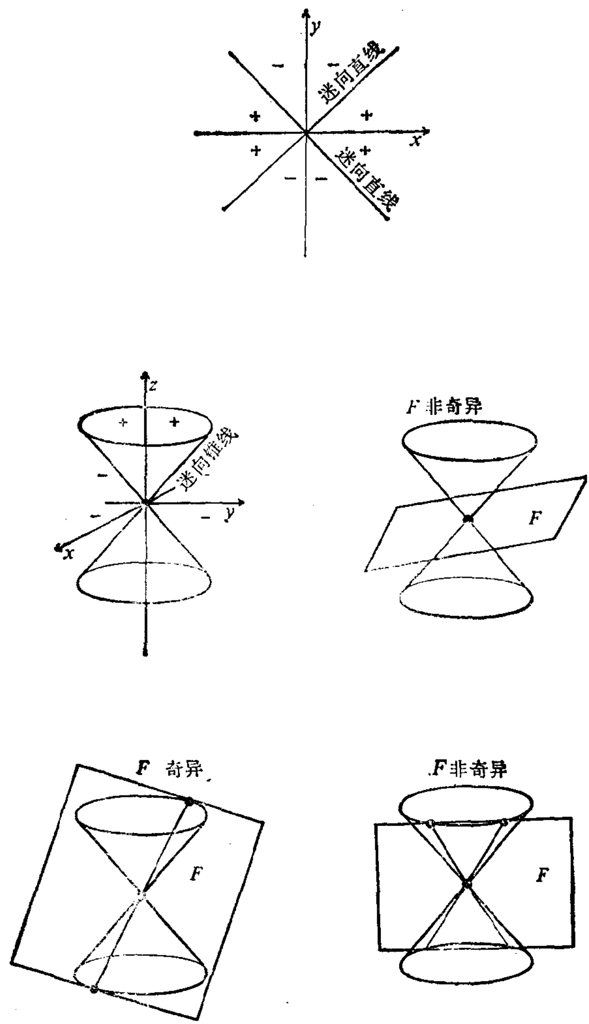

图 13.2.1.

地称为奇异的). 若 $q|_F=0$, 即 $\mathrm{rad}(F)=F$, 则称 F 是完全奇异的.

在图 13.2.1 中,第一个图表示 $\mathbf{R}^2$ 中的 $q=x^2-y^2$, 其余几个表示 $\mathbf{R}^3$ 中的 $q=-x^2-y^2+z^2$. $x^2+y^2-z^2-t^2$ 已经无法图示了, 但我们还是部分地画出了它的迷向锥面在射影空间 $P^3(\mathbf{R})$ 内的投影: 参看图 13.7.10 及 14.4.6.

13.2.2 评注

13.2.2.1 迷向这个词是与 8.8.6.1 相符的. 此外,被我们称为奇异或完全奇异的子空间往往也有人称为迷向或完全迷向的子空间. 但那些称法似易引起混淆.

13.2.2.2 根据初等线性代数, 恒有下式成立:

$$\mathrm{rang}(q)+\dim(\mathrm{rad}(q))=\dim E.$$

13.2.2.3 请注意非迷向与非退化并不等价. 例如 $E=\mathbf{R}^2$ 及 $q=x^2-y^2$. 当然,非迷向蕴含非退化. 若 $K=\mathbf{C}$ (或是代数闭域),则当 $\dim E\geqslant 2$ 时,一个二次型永远不会是非迷向的,这正是 13.7.6 的结果.

13.2.2.4 根据 13.2 的开始部分及 13.1.4.6, 可以看出 q 退化的充要条件是 $\mathrm{disc}(q)=0$; 特别,这个充要条件就是关于某个基有 $\det A=0$.

13.2.2.5 与欧氏空间的情形相反, 甚至 q 非退化时某些子空间也可能是奇异的: 见图 13.2.1 或者更简单地取 $F=Kx$, 这里 x 是迷向的.

13.2.2.6 若 $E=\mathrm{rad}(q)\oplus G$ 是直和, 则 $q|_G$ 非退化 (见 13.9.1).

13.2.3 例

13.2.3.1 若 $(E,q)=\mathrm{Art}_2$, 则 $q^{-1}(0)$ 由 E 的两条不同直线构成, 这两条直线称为迷向直线. 没有附加结构是无法区分这两条直线的(参看 13.7.10 及 13.8.2.1). 它们可确定 q 到相差一个常数倍,这是因为如果取迷向直线上的向量作为基, q 可写成 kxy 的形式.

13.2.3.2 若 $q\longleftrightarrow A$ (参见 13.1.3.6), 则 $\mathrm{rang}(q)=\mathrm{rang}(A)$. 因此例 13.1.3.4 中的秩为: 在 (i) 中等于 r, 在 (ii) 中等于 $r+s$, 在 (iii) 中等于 $2p$. 特别, (iii) 总是非退化的, (i) 是非退化的充要条件是 $r=n$, (ii) 是非退化的充要条件是 $r+s=n$.

13.2.3.3 仍考察例 13.1.3.4, 以下子空间是完全奇异的: 在情形 (i), 若 $K=\mathbf{C}$:

$$F=\mathbf{C}(e_1+ie_2)\oplus\mathbf{C}(e_3+ie_4)\oplus\cdots\oplus\mathbf{C}(e_{2p-1}+ie_{2p}),$$

$$p=\left[\frac{n}{2}\right],\quad \dim F=p;$$

在情形 (ii), 若 $K=\mathbf{R}$:

$$F=\mathbf{R}(e_1+e_{r+1})\oplus\mathbf{R}(e_2+e_{r+2})\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}(e_r+e_{2r}),$$

$$\text{若 } r\leqslant s,\ \dim F=r;$$

在情形 (iii), 对任一个 K:

$F=Ke_1\oplus\cdots\oplus Ke_p$, $F'=Kh_1\oplus\cdots\oplus Kh_p$, $\dim F=\dim F'=p$. 其逆可参看 13.7.6. 这里给出一个带有技巧性的引理.

13.2.3.4 **引理**. 设 $(E,\ q)$ 是任意取定的, $x\neq 0$ 是迷向向量, $x\notin\mathrm{rad}(q)$, 则存在平面 $P\subset E$ 使得 $x\in P$ 并且 $(P,\ q|_P)$ 是 Artin 平面. 特别若 $(E,\ q)$ 中 $\dim E=2$, q 非退化且不是非迷向的,则 $(E,\ q)$ 是 Artin 平面.

由于 $x\notin\mathrm{rad}(q)$, 故 $\varphi(x)\in E^*$ 非零 (见 13.2.0), 因而存在 z 使得 $P(x,\ z)=1$. 但不难找到一个

$$y\in Kz+Kx$$

使 $q(y)=0$, 例如 $y=z-\dfrac{q(z)}{2}x$. $q|_{Kz+Kx}$的矩阵是$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,这正是我们所需要的.

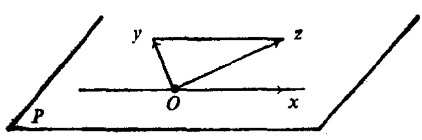

图 13.2.3.

13.2.4 伴随自同态

设 (E, q) 中的 q 非退化，由于 $\varphi \in \mathrm{Isom}(E; E^*)$，我们可仿照 8.1.8.6 的办法来做. 对任一 $f \in L(E; E) = \mathrm{End}(E)$，定义它的伴随自同态 ${}^t f$ 为：

13.2.4.1
$$\begin{cases} \forall x, y \in E: P(f(x), y) = P(x, {}^t f(y)), \text{ 或} \\ {}^t f = \varphi^{-1} \circ f^* \circ \varphi, \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E^* \\ {\scriptstyle {}^t f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ E & \xrightarrow[\varphi]{} & E^* \end{array} \end{cases}$$

其中 f^* 是 f 的普通意义下的转置. 关于互相对偶的基 $\{e_i\}$，$\{e_i^*\}$，若 $q \longleftrightarrow A$，U 是 f 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵，由于 f^* 关于 $\{e_i^*\}$ 的矩阵是 ${}^t U$，我们有

13.2.4.2 $\boxed{U^* = {}^t f \text{ 关于 } \{e_i\} \text{ 的矩阵} = A^{-1}\,{}^t U A.}$

特别，$\det {}^t f = \det f^* = \det f$.

13.3 正交性，子空间的非奇异完备化

仿照欧氏空间的模式，我们给出下列定义.

13.3.1 定义. 设 A 是 E 的子集；置

$$A^\perp = \{x \in E: P(x, y) = 0 \ \forall y \in A\} = \bigcap_{y \in A} \mathrm{Ker}(\varphi(y)),$$

并称为 A 的正交补. 这总是一个向量子空间. 两个子集 A 和 B 若满足 $B \subset A^\perp$，即 $P(x, y) = 0 \ \forall x \in A, \forall y \in B$，则称 A 和 B 正交，记为 $A \perp B$. 关系 $A \perp B$ 是对称的. 若 $E_i \perp E_j \forall i \neq j$，则称直和 $E = \bigoplus_i E_i$ 是正交的，且记为 $E = \overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i$. 若 $e_i \perp e_j \ \forall i \neq j$，则基 $\{e_i\}$ 称为正交基，若还有 $q(e_i) = 1 \forall i$，则称为标准正交基.

例如 $\mathrm{rad}(q) = E^\perp$. 一般说来对一个子空间 F，$\dim F + \dim F^\perp \neq \dim E$，因为 q 可能是退化的. 反过来，有以下的初等结果，它们可与 8.1.8.3 一样借助于 2.4.8.1 来进行证明.

13.3.2 命题. 对任一子集 A，有 $A^{\perp}=\langle A\rangle^{\perp}$ 及 $A\subset A^{\perp\perp}$. 假设 q 非退化，则对 E 的任一子空间 F 有 $F^{\perp\perp}=F$，$\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E$，$\operatorname{rad}F=F\cap F^{\perp}$. 子空间 F 是完全奇异的充要条件是 $F\subset F^{\perp}$. 我们还有以下等价关系：F 非奇异 $\Longleftrightarrow F\cap F^{\perp}=0\Longleftrightarrow E=F\oplus F^{\perp}\Longleftrightarrow F^{\perp}$ 非奇异. 对两个子空间 F 和 F'，有

$$(F\cap F')^{\perp}=F^{\perp}+F'^{\perp},\ (F+F')^{\perp}=F^{\perp}\cap F'^{\perp}.$$

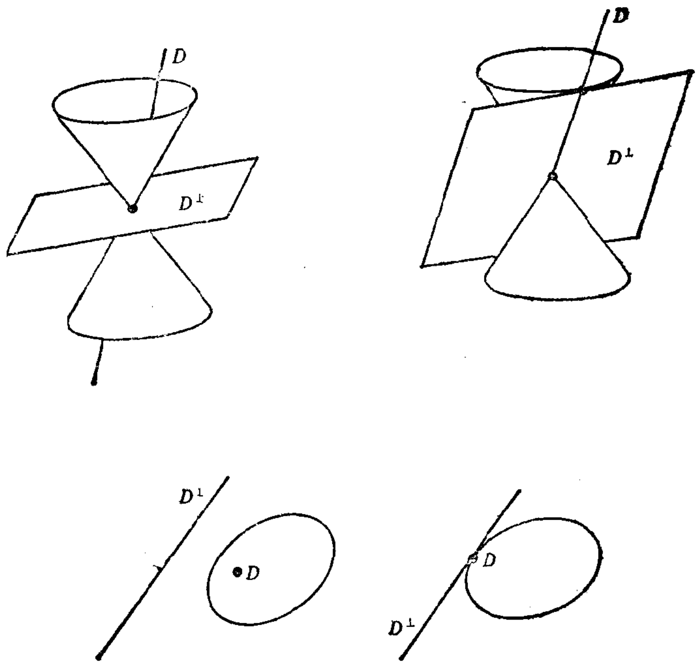

图 13.3.2.

图 13.3.2 表示了仿射平面的截线，它们使人想到一个点关于一条圆锥曲线的“点-配极直线”对偶. 实际上情形正是如此，但我们遵循的步骤与历史发展过程恰恰相反：我们在 14.5 中将利用关于圆锥曲线的定义二次型的对偶性，把它诱导到射影空间中来定义关于圆锥曲线的对偶性.

13.3.3 例

13.3.3.1 若对 (E, q) 有 $E=\overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i$，我们可以说 (E, q) 是 $(E_i, q|_{E_i})$ 的直和. 反之，若给出了 $E=\bigoplus_i E_i$ 以及每个 E_i 上的一个二次型 q_i，则可通过极型 P 来定义 $q=\overset{\perp}{\bigoplus_i} q_i$:

$$P\left(\sum_i x_i, \sum_j y_j\right)=\sum_i P_i(x_i, y_i),$$

这里 P_i 是 q_i 的极型. 因此

$$E=\overset{\perp}{\bigoplus_i} E_i, \ q|_{E_i}=q_i \forall i.$$

13.3.3.2 在上述意义下，对任一 Artin 空间 Art_{2p} 有:

$$\mathrm{Art}_{2p}=\mathrm{Art}_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Art}_2 \ (p \text{ 个项}),$$

再采用 13.1.3.4 (iii) 的记号，有: $E_i=Ke_i \oplus Kh_i \forall i$.

13.3.4 非奇异完备化空间

这是简单的、技术性的，但对后面内容又是基本的.

13.3.4.1 命题. 设 q 非退化，F 是 E 的子空间，$s=\dim(\mathrm{rad}(F))$，G 是 $\mathrm{rad}(F)$ 在 F 内的任一补空间，$\{x_i\}_{i=1,\cdots,s}$ 是 $\mathrm{rad}(F)$ 的一个基，则存在 s 个平面 $P_i \subset E$ 使得对任一 i，$(P_i, q|_{P_i})$ 是一个 Artin 平面，对所有的 i 有 $x_i \in P_i$，对所有的 $i \neq j$ 有 $P_i \perp P_j$，而且 $G \perp P_i \forall i$. 此外，正交直和

$$\bar{F}=G \overset{\perp}{\oplus} P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_s$$

是非奇异子空间且 $(\bar{F}, q|_{\bar{F}})$ 同构于 $G \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Art}_{2s}$. 这样的 $\bar{F}$ 被称为 F 的非奇异完备化空间.

证明是容易的，只要对 $s=\dim(\mathrm{rad}(F))$ 作递推即可. 作为起点可如下进行: $s=1$，$\mathrm{rad}(F)=Kx_1$，$F=G \overset{\perp}{\oplus} Kx_1$. 根据 13.3.2，子空间 $G^{\perp}$ 非奇异; 由于 $x_1 \in G^{\perp}$，可应用 13.2.3.4: 存在