随机数字信号处理

王宏禹 著

科学出版社

随机数字信号处理

王宏禹 著

科学出版社

1988

内 容 简 介

本书全面系统地论述了随机数字信号处理的基本原理. 它在随机过程与确定性数字信号处理的理论基础上,将信息论、统计估计理论、时间序列分析、系统辨识、自适应理论、优化理论及计算技术等学科的知识融为一体,对随机数字信号处理的基本原理进行论述.

全书共九章,内容包括: 离散随机信号分析、基本估计理论、随机信号的采样与量化、随机信号的最佳变换、随机信号的最优预测与滤波、随机信号的谱估计(侧重现代谱估计)、时变数字滤波器、自适应数字滤波器及随机数字信号处理中的一些专门问题.

本书取材广泛、内容新颖、理论联系实际、系统性强、条理清楚、深入浅出,既总结了随机信号处理的最新成果, 也包括了作者在这方面的一些工作,是随机信号数字处理方面的一本颇有参考价值的著作.

本书可供从事信号处理的高等院校教师、高年级学生及研究生、广大科技人员参考.

随机数字信号处理

王宏禹 著

责任编辑 刘兴民

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年 5月第 一 版 开本:787×1092 1/16

1988年 5月第一次印刷 印张:32 1/2

印数:精 1—820 插页:精 2

平 1—2,850 字数:757,000

ISBN 7-03-000172-9/TN·9

定价: 布脊精装 12.80 元

平 装 11.30 元

前　言

确定性信号可以准确地用一个确定性时间函数来描述，并可以准确地加以重现．随机信号不能用确定性的时间函数来描述，也不能准确地加以重现．连续随机信号可以用随机过程来描述，但对随机信号进行数字处理，需要讨论离散随机过程，即随机序列或时间序列．

随机信号必须用统计方法来研究．从本世纪四十年代初开始，由于第二次世界大战军事技术等方面的需要，人们将统计概念与方法应用于通信、雷达及自动控制中各种随机信号处理，提出了维纳滤波理论与匹配滤波理论，这便是早期随机信号处理的主要内容与方法．

大规模集成电路与电子计算机的迅速发展与应用，不仅推动了确定性信号数字处理的发展与应用，也有力地推动了随机信号数字处理的发展与应用，它们已在雷达、通信、水声、遥测、自动控制、地球物理、生物医学、图象处理、模式识别、随机振动分析等领域内广泛应用．随机信号数字处理现已突破各应用领域之间的界限，日益成为带有普遍性的处理方法，可以独立作为一门具有普遍意义的学科．

随机信号数字处理是在随机过程与确定性信号数字处理的理论基础上，融合了信息论、统计估计理论、时间序列分析、系统模型辨识、随机控制、现代控制理论、自适应理论、计算技术及优化方法等学科的知识，并与各种应用相结合，而发展起来的一种新的信号处理技术．正因为它是多种学科互相渗透新形成的，所以目前国内外还没有一本对之进行系统阐述的书籍．

根据数字信号处理应包括理论基础、离散变换、滤波与预测及谱估计四个基本部分，并考虑其特点，作者结合本人近年来对研究生多次讲授这门课程的经验及对随机信号数字处理理论和方法所进行的研究，写成此书．全书共九章，包括下列五个部分：

（1）理论基础．计有第一章离散随机信号分析，第二章基本估计理论，第三章随机信号的采样与量化．

（2）离散变换．第四章随机信号的最佳变换（卡亨南-洛厄维变换）．

（3）滤波与预测．计有第五章随机信号的最优预测与滤波，第七章时变数字滤波器，第八章自适应数字滤波器．

（4）谱估计．第六章随机信号的谱估计（侧重现代谱估计）．

（5）其它．第九章随机信号数字处理中的一些专门问题，仅讨论不适定问题与动态数据处理．

本书力图将各学科的有关知识融为一体进行系统阐述．注意理论联系实际，尽量介绍随机信号数字处理最近发表的新理论、新方法及各种新用途．作者希望本书能对从事信号处理的科学技术人员及高等院校有关师生有所裨益．

本书要求读者具有线性代数、概率论与数理统计、随机过程及确定性信号数字处理的知识．

本书写作过程中，得到了常迵、袁保宗、何振亚三位教授的关心和支持，他们对本书的写作提出了宝贵意见；特别在本书初稿完成后，又得到陈宗骘与何振亚两位教授的大力帮助，他们审阅了全部书稿，提出许多宝贵意见与建议；大连工学院信息工程教研室一些同志阅读过部分原稿并提出不少意见。特在此一并致以深切的谢意。

由于本书涉及面比较广，不少内容是新发展的，又由于作者水平所限，难免有不妥或错误之处，敬希读者指正。

作者

1986年3月于大连工学院

目　　录

第一章　离散随机信号分析

随机信号不能用确定性的时间函数来描述，只能用统计方法来研究．离散随机信号的统计特性通常用概率分布函数与概率密度函数来描述或用统计平均量（均值、方差、相关函数与协方差函数等)来表征．在平稳情况下，除了用这两种传统方法研究外，近年来随着时间序列分析在理论方面的发展及其广泛应用，还大量采用了线性信号模型的方法．本章对这些描述方法进行介绍．阐明它们的关系，以便把它们统一起来．此外，本章还对非平稳离散随机信号中的一些有意义和比较重要的问题进行了研究．

§1.1　离散随机过程

随机信号与噪声必须用随机过程的理论来研究．随机过程 $\mathbf{x}(t)$，如图 1-1 所示，可以看作是许多确定性函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，···的集合(总集)，即它不能只产生一种确定性函数，而是按照概率的规律产生许多个确定性函数．总集中任一确定性函数 $x_i(t)$称为随机过程 $\mathbf{x}(t)$的一个样本函数(样本)或实现．当 t 固定在某一时刻 t_n 时，各样本的取值为 $x_1(t_n)$，$x_2(t_n)$，···大小各不相同的值，这时，随机过程就是一般意义下的随机变量 $\mathbf{x}(t_n)$．所以，随机过程兼有随机变量与函数的特点．

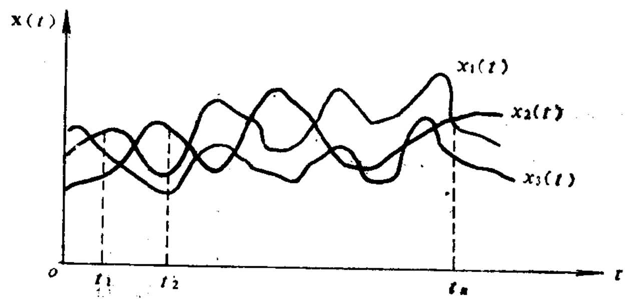

图　1-1

如果参量 t 取离散值 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 时，则这种随机过程称为离散随机过程．这时，$\mathbf{x}(t)$ 是一串随机变量 $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \cdots, \mathbf{x}(t_N)$ 所构成的序列，即随机序列．随机序列也用 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N$ 来表示，或用 $\{\mathbf{x}_n, n=1, 2, \cdots, N\}$ 表示．另外，因随机序列 $\{\mathbf{x}_n\}$ 的整数变量 n 代表等间隔的时刻增长量，故人们常称随机序列为时间序列．

应当指出，一个随机变量 $\mathbf{x}$ 与它的一个样本值 x，是两种不同意义的量，前者是对某一随机现象的总称，后者仅是这一随机现象的一个观测值(或试验值)．因此，在上面叙述这两个概念时，分别用粗黑体小写 $\mathbf{x}$、$\mathbf{x}_n$ 与普通体小写 x、x_n 表示，以示区别．熟习了这些概念后，自然会分清同一字母 x 或 x_n 何时代表随机变量，何时只是相应的样本值．因此，本书只在这一章中分别用不同字母 $\mathbf{x}$、$\mathbf{x}_n$ 与 x、x_n 表示，以示区别，其余各章如无特殊需要，都用相同的字母表示，请读者注意．

§1.2　离散随机过程的统计描述

如前所述，离散随机过程传统上是用概率与统计平均量两种统计方法研究，现在我们

先来介绍这两种方法。

一、概率描述

离散随机过程是随 n 而变化的随机变量序列 $\{\mathbf{x}_n\}$。因随机变量是用概率分布函数来描述的，故随机变量序列 $\{\mathbf{x}_n\}$ 的概率分布知识，可以构成对离散随机过程的完全刻画。对于单独一个随机变量 $\mathbf{x}_n$，它是用下列概率分布函数来描述：

$$F_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = P(\mathbf{x}_n \leqslant x_n) \tag{1.2.1}$$

式中 P 表示概率。如果 $\mathbf{x}_n$ 在连续的值域上取值，则 $\mathbf{x}_n$ 也可等价地由概率密度函数规定

$$p_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \frac{\partial F_{\mathbf{x}_n}(x_n, n)}{\partial x_n} \tag{1.2.2}$$

或

$$F_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = \int_{-\infty}^{x_n} p_{\mathbf{x}_n}(x, n)dx \tag{1.2.3}$$

对两个随机变量 $\mathbf{x}_n$ 和 $\mathbf{x}_m$，则用下列联合概率分布函数来描述：

$$F_{\mathbf{x}_n\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = P(\mathbf{x}_n \leqslant x_n, \mathbf{x}_m \leqslant x_m) \tag{1.2.4}$$

若是连续随机变量，也可用联合概率密度函数描述：

$$p_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m)}{\partial x_n \partial x_m} \tag{1.2.5}$$

以此类推，对 N 个随机变量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N$，有

$$F_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N) = P(\mathbf{x}_1 \leqslant x_1, \mathbf{x}_2 \leqslant x_2, \cdots, \mathbf{x}_N \leqslant x_N) \tag{1.2.6}$$

$$p_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N} \tag{1.2.7}$$

其中 $F_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N)$ 为 N 维概率分布函数，$p_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N)$ 为 N 维概率密度函数。

对于任何 N 个随机变量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N$，如果下列等式成立：

$$F_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N) = F_{\mathbf{x}_1}(x_1, 1)F_{\mathbf{x}_2}(x_2, 2)\cdots F_{\mathbf{x}_N}(x_N, N) \tag{1.2.8}$$

则称这些随机变量是统计独立的。

如果一个离散随机过程经过时间平移 k（k 为整数）后，其概率统计特性保持不变，即

$$\begin{aligned}&F_{\mathbf{x}_{1+k},\mathbf{x}_{2+k},\cdots,\mathbf{x}_{N+k}}(x_{1+k}, 1+k, x_{2+k}, 2+k, \cdots, x_{N+k}, N+k)\\ &= F_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N}(x_1, 1, x_2, 2, \cdots, x_N, N)\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

则该离散随机过程称为严格平稳的。由此可以得到平稳离散随机过程的一维概率函数与时间无关，即

$$F_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) = F_{\mathbf{x}_n}(x_n) \tag{1.2.10}$$

而二维概率函数与时间差有关，即

$$F_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) = F_{\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m}(x_n, x_m, n-m) \tag{1.2.11}$$

二、统计平均量描述

对于随机变量，用一些重要统计平均量或数字特征——均值、均方值、方差等来刻画，

往往是非常有效的．同样，我们可以利用构成离散随机过程的随机变量的各种统计平均值或数字特征来刻画这个随机过程．

1．均值或数学期望

离散随机过程的均值定义为

$$m_{\mathbf{x}_n} = E[\mathbf{x}_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathbf{x}_n}(x, n) dx \tag{1.2.12}$$

式中 E 表示数学期望．由式（1.2.12）可见，均值通常与 n 有关．若随机过程是平稳的，则均值与 n 无关，是一个常数．均值有下列性质：

（1）$E[\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_m] = E[\mathbf{x}_n] + E[\mathbf{y}_m]$，即和的均值等于均值的和．

（2）$E[a\mathbf{x}_n] = aE[\mathbf{x}_n]$，即 $\mathbf{x}_n$ 乘以一个常数 a 的均值等于 $\mathbf{x}_n$ 的均值乘此常数．

（3）
$$E[\mathbf{x}_n\mathbf{y}_m] = E[\mathbf{x}_n]E[\mathbf{y}_m] \tag{1.2.13}$$

称为 $\mathbf{x}_n$ 与 $\mathbf{y}_m$ 线性独立，其充分条件是

$$p_{\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m}(x_n, n, y_m, m) = p_{\mathbf{x}_n}(x_n, n) p_{\mathbf{y}_m}(y_m, m) \tag{1.2.14}$$

即 $\mathbf{x}_n$ 与 $\mathbf{y}_m$ 是统计独立的，它的独立性比式（1.2.13）的条件更强一些．统计独立的随机过程必定是线性独立的，而线性独立的并不意味着统计独立．

2．均方值与方差

离散随机过程的均方值定义为 $|\mathbf{x}_n|^2$ 的平均，即

$$P_{\mathbf{x}_n} = E[|\mathbf{x}_n|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p_{\mathbf{x}_n}(x, n) dx \tag{1.2.15}$$

均方值也就是 $\mathbf{x}_n$ 的平均功率．

离散随机过程的方差定义为（$\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}_n}$）的均方值，即

$$\sigma_{\mathbf{x}_n}^2 = E[|\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}_n}|^2] \tag{1.2.16}$$

因为和的均值等于均值的和，所以容易证明，式（1.2.16）可写为

$$\sigma_{\mathbf{x}_n}^2 = P_{\mathbf{x}_n} - |m_{\mathbf{x}_n}|^2 \tag{1.2.17}$$

一般说来，均方值与方差都是 n 的函数，但对平稳离散随机过程，它们与 n 无关，都是常数．

3．相关函数与协方差函数

均值、均方值及方差都是简单的统计平均量，它们仅能提供少量有关随机过程的信息．相关函数与协方差函数是更有用的统计平均量．

（1）自相关函数与自协方差函数．自相关函数是描述随机过程在不同时刻的值与值之间的依赖性的一个量度，它定义为

$$r_{xx}(n, m) = E[\mathbf{x}_n \mathbf{x}_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{\mathbf{x}_n \mathbf{x}_m}(x_n, n, x_m, m) dx_n dx_m \tag{1.2.18}$$

式中星号“*”表示复共轭．随机过程的自协方差函数定义为

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) = E[(\mathbf{x}_n - m_{\mathbf{x}_n})(\mathbf{x}_m - m_{\mathbf{x}_m})^*] \tag{1.2.19}$$

上式也可写成

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) = r_{xx}(n, m) - m_{\mathbf{x}_n} m_{\mathbf{x}_m}^* \tag{1.2.20}$$

对于零均值随机过程 $m_{\mathbf{x}_n}=m_{\mathbf{x}_m}=0$，则

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_n,\ \mathbf{x}_m)=r_{xx}(n,\ m) \tag{1.2.21}$$

即自协方差函数与其自相关函数相同．自协方差函数与自相关函数一般都是二维的．若随机过程是平稳的，则定义

$$r_{xx}(m)=r_{xx}(n,n+m)=E[\mathbf{x}_n\mathbf{x}^*_{n+m}] \tag{1.2.22}$$

式中m表示时间差(时延)．显然有

$$r_{xx}(-m)=r^*_{xx}(m) \tag{1.2.23}$$

由式(1.2.22)可见，平稳过程的自相关函数是一维的，它只是时间差m的函数．

有许多随机过程，按严格的定义，它们不是平稳随机过程；但它们的均值与方差不依赖于时间n，它们的自相关函数仅依赖于时间差m，这样的随机过程称为广义平稳的，也简称为平稳的．对于均值与方差均存在的严格平稳随机过程必同时也是广义的平稳随机过程，反之则不然，但对正态随机过程，它们是一致的．既不是严格平稳的又不是广义平稳的随机过程，称为非平稳随机过程．

(2) 互相关函数与互协方差函数．互相关函数是描述两个不同的随机过程之间的依赖性的一个量度，它定义为

$$r_{xy}(n,\ m)=E[\mathbf{x}_n\mathbf{y}^*_m]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy^*p_{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_m}(x,\ n,\ y,\ m)dxdy \tag{1.2.24}$$

式中 $p_{\mathbf{x}_n\mathbf{y}_m}(x,\ n,\ y,\ m)$ 是 $\mathbf{x}_n$ 与 $\mathbf{y}_m$ 的联合概率密度．互协方差函数定义为

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_n,\ \mathbf{y}_m)=E[(\mathbf{x}_n-m_{\mathbf{x}_n})(\mathbf{y}_m-m_{\mathbf{y}_m})^*]=r_{xy}(n,\ m)-m_{\mathbf{x}_n}m^*_{\mathbf{y}_m} \tag{1.2.25}$$

当 $m_{\mathbf{x}_n}=m_{\mathbf{y}_m}=0$，则

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{x}_n,\ \mathbf{y}_m)=r_{xy}(n,\ m) \tag{1.2.26}$$

对于两个各自平稳且联合平稳的随机过程，其互相关函数定义为

$$r_{xy}(m)=r_{xy}(n,n+m)=E[\mathbf{x}_n\mathbf{y}^*_{n+m}] \tag{1.2.27}$$

显然，有

$$r_{xy}(m)=r^*_{yx}(-m) \tag{1.2.28}$$

若对所有m，有

$$r_{xy}(m)=0 \tag{1.2.29}$$

则称它们是不相关的．统计独立的两个随机过程必然是不相关的，但不相关的两个随机过程不一定是统计独立的．

(3) 相关函数的性质．若随机过程是实平稳的，其自相关函数 $r_{xx}(m)=E[\mathbf{x}_n\mathbf{x}_{n+m}]$，互相关函数 $r_{xy}(m)=E[\mathbf{x}_n\mathbf{y}_{n+m}]$，则不难证明，它们有下列性质：

(a) $r_{xx}(0)=E[\mathbf{x}_n^2]=P_{\mathbf{x}_n}\geqslant 0$

(b) $r_{xx}(m)=r_{xx}(-m)$

$r_{xy}(m)=r_{yx}(-m)$

(c) $|r_{xx}(m)|\leqslant r_{xx}(0)$

$|r_{xy}(m)|\leqslant|r_{xx}(0)r_{yy}(0)|^{1/2}$

(d) 对大多数平稳随机过程来说，它们的各个随机变量之间的相关性，随着这些随机变量在时间上离开得越来越远而变得越来越弱，因此

$$\lim_{m\to\infty}r_{xx}(m)=(E[\mathbf{x}_n])^2=m_{\mathbf{x}}^2$$

$$\lim_{m\to\infty} r_{xy}(m) = m_x m_y$$

(4) 相关函数的不同定义方式． 自相关函数与互相关函数除式 (1.2.22) 与 (1.2.27) 定义方式外，通常还有下列两种：

(a) 自相关函数．定义为

$$r'_{xx}(m) = r'_{xx}(n, n-m) = E[\mathbf{x}_n \mathbf{x}^*_{n-m}] \tag{1.2.30}$$

和

$$r''_{xx}(m) = r''_{xx}(n, n+m) = E[\mathbf{x}^*_n \mathbf{x}_{n+m}] \tag{1.2.31}$$

它们与式 (1.2.22) 所定义的自相关函数 $r_{xx}(m)$ 的关系为

$$r_{xx}(m) = r'_{xx}(-m) = r'^*_{xx}(m) = r''^*_{xx}(m) = r''_{xx}(-m) \tag{1.2.32}$$

在实平稳情况下，由相关函数性质 (b) 有

$$r_{xx}(m) = r'_{xx}(m) = r''_{xx}(m) \tag{1.2.33}$$

即这三种定义方式是一致的，可不必区别．

(b) 互相关函数．与自相关函数时相对应，定义为

$$r'_{xy}(m) = r'_{xy}(n, n-m) = E[\mathbf{x}_n \mathbf{y}^*_{n-m}] \tag{1.2.34}$$

和

$$r''_{xy}(m) = r''_{xy}(n, n+m) = E[\mathbf{x}^*_n \mathbf{y}_{n+m}] \tag{1.2.35}$$

它们与式 (1.2.27) 所定义的互相关函数 $r_{xy}(m)$ 的关系为

$$r_{xy}(m) = r'_{xy}(-m) = r'^*_{xy}(m) = r''^*_{xy}(m) = r''_{xy}(-m) \tag{1.2.36}$$

在实平稳情况下，由相关函数性质 (b) 有

$$r_{xy}(m) = r'_{yx}(m) = r''_{yx}(m) \tag{1.2.37}$$

即第一种定义方式与后面两种不一致，应注意它们的区别．

本书对平稳随机过程的自相关函数与互相关函数主要采用式 (1.2.22) 与 (1.2.27) 第一种定义方式，但在个别情况，为了使分析所得结果能与通常书中一致起见，亦采用了式 (1.2.30) 与 (1.2.34) 第二种定义方式，请读者注意．

(5) Z 变换表示法．由上述性质 (d)，相关函数是非周期的序列，并且当 $m_x = 0$ 时，m 值增大，它们逐渐消失，故 $r_{xx}(m)$ 与 $r_{xy}(m)$ 的 Z 变换存在．设 $r_{xx}(m)$ 的 Z 变换为 $S_{xx}(z)$，则

$$S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m) z^{-m} \tag{1.2.38}$$

而

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C S_{xx}(z) z^{m-1} dz \tag{1.2.39}$$

并且由上述性质 (b) 有

$$S_{xx}(z) = S_{xx}(z^{-1}) \tag{1.2.40}$$

由此得知，$S_{xx}(z)$ 的收敛区域必为下列形式：

$$R_a < |z| < \frac{1}{R_a} \tag{1.2.41}$$

此外，由于 $r_{xx}(m)$ 在 $m\to\infty$ 时接近于零，所以其收敛域必然包括单位圆，即 $0 \leqslant R_a \leqslant 1$．

类似地，$r_{xy}(m)$ 的 Z 变换为 $S_{xy}(z)$，有

$$S_{xy}(z)=S_{yx}(z^{-1}) \tag{1.2.42}$$

4. 功率谱密度函数

由于 $r_{xx}(m)$ 的收敛域包含单位圆，若 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}|r_{xx}(m)|<\infty$，令 $z=e^{j\omega T}$，则式(1.2.38)与(1.2.39)可写成

$$S_{xx}(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_{xx}(m)e^{-jmT\omega} \tag{1.2.43}$$

$$r_{xx}(m)=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}S_{xx}(\omega)e^{jmT\omega}d\omega \tag{1.2.44}$$

式中 $\Omega=\pi/T$. 对任何序列，常数 T 没有特殊意义，而可以令 $T=1$，这时 $\Omega=\pi$. 若 $r_{xx}(m)$ 由对模拟自相关函数 $r_{xx}(t)$ 采样得到，则 T 等于采样间隔.

当 $m=0$ 时，由相关函数性质(a)与式(1.2.44)得

$$r_{xx}(0)=P_{x_n}=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}S_{xx}(\omega)d\omega \tag{1.2.45}$$

可见 $S_{xx}(\omega)$ 在某一频带上的积分与信号在该频带上的功率成正比. 由于这个缘故，将函数 $S_{xx}(\omega)$ 称为功率谱密度，或简称为功率谱. 由于自相关函数与功率谱存在式(1.2.43)傅里叶变换关系，故人们也常常把功率谱定义为自相关函数的傅里叶变换. 功率谱并不会比自相关函数提供更多的信息，仅所给出的信息形式不同而已.

对实随机信号，功率谱有以下两个性质：

(1) $S_{xx}(\omega)$ 是对称的函数，即

$$S_{xx}(\omega)=S_{xx}(-\omega)$$

(2) $S_{xx}(\omega)$ 是非负函数，即

$$S_{xx}(\omega)\geqslant 0$$

类似地，互功率谱定义为

$$S_{xy}(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_{xy}(m)e^{-jmT\omega} \tag{1.2.46}$$

而

$$r_{xy}(m)=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega}S_{xy}(\omega)e^{jmT\omega}d\omega, \tag{1.2.47}$$

且

$$S_{xy}(\omega)=S_{yx}(-\omega) \tag{1.2.48}$$

5. 遍历性与时间平均量描述

上面介绍了离散随机过程的各种统计描述，现在再介绍另一种时间平均量描述. 若 $x(n)$ 为离散随机过程 $\mathbf{x}(n)$ 的任一样本数据序列，则其时间平均为

$$\langle x(n)\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n) \tag{1.2.49}$$

类似地，时间自相关函数为

$$\langle x(n)x^*(n+m)\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x^*(n+m) \tag{1.2.50}$$

式中⟨ ⟩表示时间平均算子.

如果一个平稳离散随机过程，上述时间平均量等于常数，还等于其相应的统计平均量,即

$$\langle x(n)\rangle = E[\mathbf{x}_n] = m_{\mathbf{x}} \tag{1.2.51}$$

与

$$\langle x(n)x^*(n+m)\rangle = E[\mathbf{x}_n\mathbf{x}^*_{n+m}] = r_{xx}(m) \tag{1.2.52}$$

则称该平稳随机过程为遍历性的. 这时，时间平均算子⟨ ⟩与统计平均算子 $E[\ ]$ 具有相同的特性,不必区分随机变量 $\mathbf{x}_n$ 和它在样本数据序列中的值 $x(n)$. 例如表示式 $E[x(n)]$ 应解释为 $E[\mathbf{x}_n]=\langle x(n)\rangle$.

平稳随机过程虽有遍历性的和非遍历性的两种，但在实际中表示平稳物理现象的随机信号,一般都是遍历性的. 因此,对于平稳离散随机信号，我们可以研究总集中一个样本数据序列,而代替研究无限样本数据序列的总集,通过这单个样本序列的时间平均完全可以描述一平稳离散随机信号的统计特性;且按时间平均时,用任何一个样本序列都是可以的. 这样,给研究平稳离散随机信号带来很大方便.

§1.3 具有随机输入信号的线性系统

设所研究的离散线性系统是稳定非移变的，其脉冲响应为 $h(n)$，当有实随机信号 $x(n)$ 输入时,则线性系统的输出为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-k)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \tag{1.3.1}$$

其均值与自相关函数为

$$m_y = E[y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)E[x(n-k)] \tag{1.3.2}$$

$$\begin{aligned} r_{yy}(n_1,n_2) &= E[y(n_1)y(n_2)] \\ &= E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)x(n_1-k)x(n_2-l)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)E[x(n_1-k)x(n_2-l)] \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

一、输入随机信号是平稳时的情况

令 $n_1=n,\ n_2=n+m$，代入式(1.3.3)，得

$$\begin{aligned} r_{yy}(n,n+m) &= E[y(n)y(n+m)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)E[x(n-k)x(n+m-l)] \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

由于输入随机信号是平稳的,故

$$E[x(n-k)] = m_x$$

$$E[x(n-k)x(n+m-l)] = r_{xx}(m+k-l)$$

将上述关系代入式 (1.3.2) 与 (1.3.4)，得

$$m_y = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \tag{1.3.5}$$

$$r_{yy}(n, n+m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \cdot r_{xx}(m+k-l) = r_{yy}(m) \tag{1.3.6}$$

由上可见，输出均值是常数，输出自相关函数仅与时间差 m 有关. 因此当输入随机信号是平稳时，线性系统输出的随机信号也是平稳的. 令 $i = l - k$，代入到式 (1.3.6) 中，得

$$r_{yy}(m) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m-i) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(i+k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} r_{xx}(m-i)u(i) \tag{1.3.7}$$

式中

$$u(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(i+k)$$

$u(i)$ 通常称为 $h(n)$ 的非周期自相关序列，它是 $h(n)$ 与 $h(-n)$ 的离散褶积. 因此线性系统输出的自相关函数是输入的自相关函数与线性系统脉冲响应的自相关函数的褶积. 将式 (1.3.7) 写成 Z 交换形式，有

$$S_{yy}(z) = U(z)S_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1})S_{xx}(z) \tag{1.3.8}$$

将上式表示成功率谱，得

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \tag{1.3.9}$$

线性非移变系统输入与输出间的互相关为

$$r_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)] = E\left[x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+m-k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)r_{xx}(m-k) \tag{1.3.10}$$

可见输入与输出之间的互相关函数是线性系统脉冲响应与输入自相关函数的褶积. 若假设 $m_x = 0$，以便它的 Z 变换存在，得

$$S_{xy}(z) = H(z)S_{xx}(z) \tag{1.3.11}$$

或用功率谱表示为

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_{xx}(\omega) \tag{1.3.12}$$

由上，$r_{xx}(m)$、$r_{xy}(m)$、$r_{yy}(m)$、$S_{xx}(\omega)$、$S_{xy}(\omega)$、$S_{yy}(\omega)$、$h(m)$ 及 $H(e^{j\omega T})$ 的关系可表示成图 1-2。

$$\begin{tikzcd}
r_{xx}(m) \arrow[r, "*h(m)"'] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[d, bend right, leftrightarrow] & r_{xy}(m) \arrow[r, "*h(-m)"'] \arrow[d, leftrightarrow] & r_{yy}(m) \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[d, bend left, leftrightarrow] \\
S_{xx}(\omega) \arrow[r, "H(e^{j\omega})"] & S_{xy}(\omega) \arrow[r, "H(e^{-j\omega})"] & S_{yy}(\omega)
\end{tikzcd}$$

图 1-2

二、输入随机信号是非平稳时的情况

这时,将输入随机信号的自相关函数

$$r_{xx}(n_1,n_2)=E[x(n_1)x(n_2)]$$

的双重傅里叶变换定义为

$$S_{xx}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}r_{xx}(n_1,n_2)e^{-j(\omega_1n_1-\omega_2n_2)} \tag{1.3.13}$$

同理,输出随机信号的自相关函数

$$r_{yy}(n_1,n_2)=E[y(n_1)y(n_2)]$$

的双重傅里叶变换定义为

$$S_{yy}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}r_{yy}(n_1,n_2)e^{-j(\omega_1n_1-\omega_2n_2)} \tag{1.3.14}$$

将式(1.3.3)代入式(1.3.14)并利用式(1.3.13)的关系,得

$$\begin{aligned}S_{yy}(\omega_1,\omega_2)&=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(k)h(l)r_{xx}(n_1-k,n_2-l)e^{-j(\omega_1n_1-\omega_2n_2)}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega_1k}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l)e^{j\omega_2l}\\&\quad\cdot\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}r_{xx}(n_1-k,n_2-l)e^{-j[\omega_1(n_1-k)-\omega_2(n_2-l)]}\\&=H(\omega_1)H^*(\omega_2)S_{xx}(\omega_1,\omega_2)\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

这种结果与平稳时所得

$$S_{yy}(\omega)=H(\omega)H^*(\omega)S_{xx}(\omega)$$

相似。

§1.4 特定的离散随机过程

§1.2 中所述的离散随机过程是非常一般的,在实际应用中,为了研究和处理方便起见,对随机过程加以较强的特定限制。现在,我们对信号处理比较重要的某些特定的离散随机过程进行讨论。

一、正态(高斯)随机序列

如果一个随机变量序列 $\{\mathbf{x}_n\}$,其任意有限个随机变量 $\mathbf{x}_n(n=1,2,\cdots,N)$ 的联合概率密度都是正态的,则称为正态(高斯)随机序列。这时

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\mathrm{Var}\mathbf{x}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T(\mathrm{Var}\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right] \tag{1.4.1}$$

式中