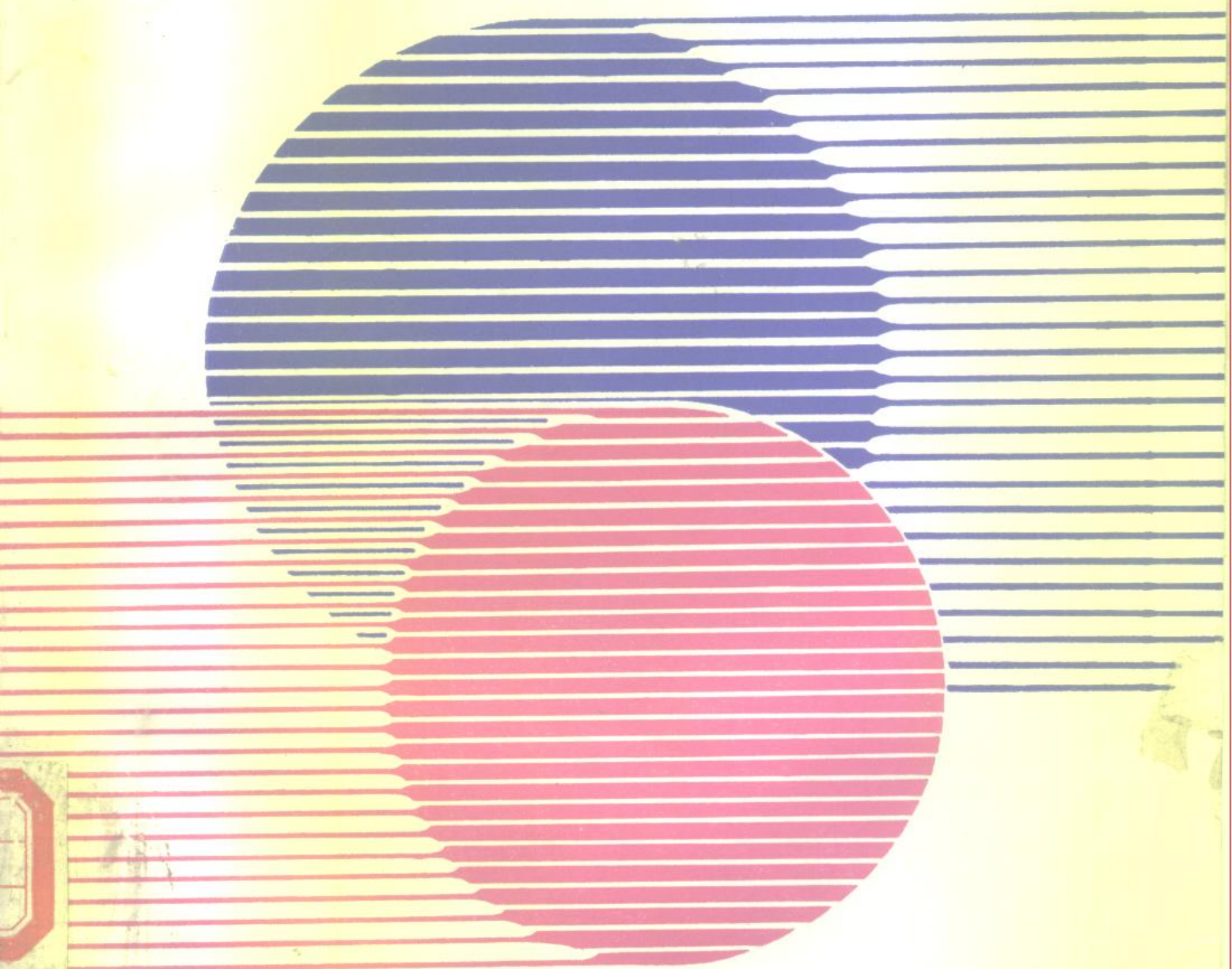


理论物理

—经典及现代概观

● G.H.达菲著 张福初 杨再石 译



● 上海科学技术出版社

理 论 物 理

——经典及现代概观

G. H. 达 菲 著

张福初 杨再石 译

上海科学技术出版社

477/3207
内 容 简 介

本书概括地介绍了用经典和现代观点研究粒子和连续介质性质的各种重要方法,共分二十章,内容包括矢量物理学的基础、经典力学所依据的概念和假设、相互作用质点系统的简单运动、矩阵运算、广义坐标、广义速度和广义力、振动坐标、频率和振幅、物理系统中的对称性、描述群的矩阵、运动的模式、广义动量、哈密顿原理和变分法、普通矢量算符、物质的连续体——流体、电场矢量和磁场矢量、等离子体和电磁波、时间与空间的联系、相对论力学、协变电动力学、旋量以及施瓦茨希尔德引力场。每一章都附有习题,以检验读者对内容的理解。同时还附有书籍和期刊参考文献。

本书可供高等院校物理系师生、研究生和有关物理研究所的研究人员参考。

Theoretical Physics
— Classical and Modern Views
George H. Duffey
Houghton Mifflin Company, 1973

理 论 物 理
——经典及现代概观

G. H. 达 菲 著

张福初 杨再石 译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 江苏深水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 28.5 字数 678,000
1987 年 1 月第 1 版 1987 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—3,000

统一书号: 13119·1359 定价: 5.80 元

序 言

《理论物理——经典及现代概观》概括地介绍了研究粒子和具体的连续介质性质的各种重要方法。本书只涉及到有限的几个中等水平的课题，但是对每个课题都作了相当详细的讨论，因此获得了有用的结果。至于某些偏重于数学的内容，如果读者对此已熟悉，或者不加详细证明就欣然承认与此有关的定理的话，那么便可以一翻而过。

在研究物质世界和进行各种测量时，我们发现物理性质可以是标量、矢量或多重矢量。一个矢量或一个多重矢量可以看作是：(a) 一个整体；或 (b) 按照某种方式进行变换的一系列数。本书首先采用前一种观点，并且用通常的黑体符号来表示矢量或多重矢量。然后再介绍分量符号，同时对包括求和约定与排列符号的使用在内的指标的用法作了说明。

在牛顿的理论中，我们假定时间是处处相同的，而空间用不着看作是绝对的。我们从头到底必须采用惯性系，只有相对惯性系惯用的方程才是成立的。本书分析了由单个质点或物体，以及由两个甚至多个质点或物体组成的系统，它们与外界产生的场之间所发生的相互作用。

矩阵可以用来变换能以适当的运算量来描述的几何性质和物理性质。因此，一个矩阵可以变换空间每一点的坐标，也可以改变各个部分和区域的序列，引起旋转、反射、甚至可能使参考轴或物理系统发生变形。另一方面，一个矩阵可以把诸如角速度分量和角动量分量之类不同物理量联系起来。

具有约束和(或)对称性的系统不能用普通的矢量和坐标有效地来描述，但是它们的某些功能则可能是有效的。为了正视这个事实，我们以包含广义坐标、广义速度和广义力的形式写出力学方程。我们还介绍一些简单的例子，借以说明实际可行的处理方法。

我们采用线性近似法来研究多维振动系统。先列出有关的久期方程，并解此方程求出简正频率。再把得到的每个解代回列出来的联立方程，于是导致了广义坐标的组合，这些广义坐标本身随时间的变化自然而然就表示了一个特定的简单的振动模式，即简正振动。振动模式中的非线性效应也得到了考虑。

然后本书阐述了把普通的对称系统变换成自身的操作群，并且建立了支配矩阵表示的有效定理和这些表示的基。这部分内容特别重要，因为它们适用于线性混合操作的任何表示式，而与所引用的物理理论无关。为了说明它们的应用，我们以此来简化振动系统的运动方程。

广义动量是作为拉格朗日函数对相应坐标的时间导数的导数引入的。只要拉格朗日函数中不出现相应的坐标，则这样一个表示式就是常数。因此，它的不变性表明了力学系统内存在某种对称性。

为了描述自然界的部分性质，我们可以采用联系近邻的或连续状态之间的关系式——微分定律。另一方面，我们也可以选用整体的或累加的特性——积分关系式。两者一样重要，但是交替地研究这两种表述会使我们增长见识和增加运算的机会。

力学本身可以用公式表示为哈密顿原理,它涉及到对一个积分的变分。作为研究哈密顿原理的准备,我们相当详细地说明变分的性质、变分函数和积分的变分。

作用在一个粒子或物质单元上的经典力可以归因于它们与邻近的同类单元的直接相互作用,以及归因于通过引力场及电磁场与远距离的粒子和物质单元间接发生的相互作用。本书还包括研究这些作用的数学方法。

书中颇为详尽地讨论了电磁场的性质,系统地阐述了麦克斯韦方程组,也讨论了其运动主要受电磁相互作用支配的带电粒子系统。

实验证明,时间与空间有密切关系。由于牛顿的时空分离观点实际上讲不通,所以阐述了闵可夫斯基空间-时间的性质。接着介绍了力学的必要的推广。

作者认为脱离经典传统的大飞跃不是出现在相对论产生的时候,而是出现在量子力学产生的时候。量子力学的一些经典基础安排在有关旋量的一章阐述,最后提一下广义相对论的某些非张量表示。

每一章都安排了习题,用以检验读者对内容的理解情况,而且精选了一些习题以帮助读者掌握处理问题的方法。各章之末还列有参考书目,既有书籍也有期刊文献,从中可以找到一些补充材料和其他的观点。

作者谨向衣阿华州立大学的 S. A. 威廉斯博士致以谢意,他仔细地阅读了手稿,提出了具体的建议和意见。还应该向内布拉斯加大学的 J. H. 麦赛克博士和明尼苏达大学 F. T. 安德森博士致谢,他们提出了有价值的意见。

G. H. 达菲

目 录

序言

1. 矢量物理学的基础	1
§ 1.1 一般原理	1
§ 1.2 定义矢量运算: 加法和减法	1
§ 1.3 乘法	3
§ 1.4 矢量的合成和分解	6
§ 1.5 关于笛卡儿坐标分量的标准运算	7
§ 1.6 另外两种坐标系	8
§ 1.7 多重并矢和多重并矢多项式	9
§ 1.8 计算和处理方法的系统化	10
§ 1.9 笛卡儿分量的变换	13
§ 1.10 旋向性	14
§ 1.11 微积分对含有矢量的表示式的应用	15
§ 1.12 常见的非恒定基矢	18
§ 1.13 分量的任意性	19
讨论题	19
习题	20
2. 牛顿质点的运动	23
§ 2.1 经典力学所依据的概念和假设	23
§ 2.2 基本假设的讨论	23
§ 2.3 开普勒定律	25
§ 2.4 牛顿引力定律	27
§ 2.5 有心力场中的运动	29
§ 2.6 线性的结论	31
§ 2.7 反平方力场	33
§ 2.8 卢瑟福散射	35
§ 2.9 高斯定律	38
§ 2.10 地球表面附近的引力	40
§ 2.11 动量定理和能量定理	41
§ 2.12 本章要点	42
讨论题	43
习题	43
3. 相互作用质点系统的简单运动	47
§ 3.1 引言	47
§ 3.2 两个相互作用的质点所遵循的运动方程	47
§ 3.3 两个质点的动量积分和能量积分	49
§ 3.4 设在质心上的非转动参照系中的关系式	51

§ 3.5 N 个相互作用质点的运动方程	53
§ 3.6 绕质心的转动	54
§ 3.7 线动量、角动量和能量变化的原因	55
§ 3.8 角动量与角速度间的函数关系	57
§ 3.9 转动惯量矩阵	58
§ 3.10 转动遵循的二次关系式	60
§ 3.11 刚体转动的欧勒方程	61
§ 3.12 自由对称陀螺的转动	63
§ 3.13 本章要点	65
讨论题	65
习题	66
4. 矩阵运算	69
§ 4.1 描述线性变换的数的集合	69
§ 4.2 集合构成矩阵的组合法则	69
§ 4.3 重新取向矩阵	71
§ 4.4 表示对称操作的置换矩阵	74
§ 4.5 一般的齐次线性变换	76
§ 4.6 逆矩阵	78
§ 4.7 并矢的重新取向	79
§ 4.8 其他方矩阵的相似变换	80
§ 4.9 分块矩阵和约化矩阵的相乘	82
§ 4.10 矩阵对角化	83
§ 4.11 具有实数本征值的矩阵	87
§ 4.12 本征矢量的性质	88
§ 4.13 保持厄密标积不变的变换	89
§ 4.14 本章要点	91
讨论题	92
习题	93
5. 广义坐标、广义速度和广义力	96
§ 5.1 运动定律的重新表述	96
§ 5.2 变换为广义坐标	98
§ 5.3 广义力	100
§ 5.4 拉格朗日力方程中的函数和变量	104
§ 5.5 显含约束的处理	105
§ 5.6 势	108
§ 5.7 正则动量的时间变化率	109
§ 5.8 瑞利耗散函数	110
§ 5.9 规范变换	112
§ 5.10 合适的独立变量	113
讨论题	113
习题	114
6. 振动坐标、频率和振幅	118
§ 6.1 一给定系统中质点集体运动对最终模式求解的影响	118
§ 6.2 模型振子	118

§ 6.3 动能	119
§ 6.4 一个合适的势	120
§ 6.5 久期方程	121
§ 6.6 矩阵 A 和 B 的同时对角化	124
§ 6.7 纯受迫振动	125
§ 6.8 有阻尼的自由振动	126
§ 6.9 有阻尼的受迫振动	128
§ 6.10 非谐运动	129
§ 6.11 分谐波的激发	132
§ 6.12 势的非对称性的影响	133
§ 6.13 转动运动与振动模式的不完全分离	134
§ 6.14 附加的评注	135
讨论题	136
习题	136
7. 物理系统中的对称性	139
§ 7.1 物理特性的一致性和连续性	139
§ 7.2 对称操作	139
§ 7.3 对称群	140
§ 7.4 几何群的分类	140
§ 7.5 描述晶体的点阵	141
§ 7.6 物质的亚原子组分	144
§ 7.7 超荷和同位旋	147
§ 7.8 强相互作用粒子的假想的基本态	147
§ 7.9 交换性质	150
§ 7.10 杨氏盘和杨氏图	151
§ 7.11 重子多重态	153
§ 7.12 介子多重态	156
§ 7.13 本章要点	158
讨论题	158
习题	159
8. 描述群的矩阵	161
§ 8.1 矩阵表示的构成	161
§ 8.2 群和基	161
§ 8.3 由运算对象产生表示的方法	163
§ 8.4 振动系统的合适的运算对象	163
§ 8.5 可约性和舒尔引理	166
§ 8.6 对表示的矩阵元的限制	168
§ 8.7 矩阵元矢量的大小和相互正交性	170
§ 8.8 特征标矢量的大小和相互正交性	171
§ 8.9 一个给定可约表示中的不可约表示	172
§ 8.10 不可约表示的基的构成	174
§ 8.11 不可约子集中基本运算对象的相互正交性	177
§ 8.12 本章要点	178
讨论题	178
习题	179

9. 运动的模式	182
§ 9.1 运动方程的分离	182
§ 9.2 合适的坐标和力	182
§ 9.3 适用于对称性的运动方程	183
§ 9.4 一个方列阵的基矢	184
§ 9.5 对应的运动	186
§ 9.6 许多质量的小幅振动的联立方程	188
§ 9.7 线性运动方程中表示的分离	191
§ 9.8 对称性的减少	193
§ 9.9 D_{2h} 列阵的小幅振动	194
§ 9.10 本章要点	197
讨论题	197
习题	198
10. 广义动量	201
§ 10.1 连续对称性	201
§ 10.2 广义动量	201
§ 10.3 哈密顿函数	202
§ 10.4 守恒定律	205
§ 10.5 简单的相图	205
§ 10.6 刘维定理	207
§ 10.7 热力学平衡	208
§ 10.8 正则变换	209
§ 10.9 哈密顿主函数	210
§ 10.10 谐振子向自由平移子的变换	211
§ 10.11 无限小变换	213
§ 10.12 泊松括号	213
§ 10.13 本章要点	215
讨论题	215
习题	216
11. 哈密顿原理和变分法	219
§ 11.1 定律的微分形式和积分形式	219
§ 11.2 有关的运算	219
§ 11.3 单一的未知函数	221
§ 11.4 更一般的路径	225
§ 11.5 有几个未知函数的情况	227
§ 11.6 哈密顿原理	228
§ 11.7 多重积分的极大或极小	229
§ 11.8 局部约束	232
§ 11.9 积分约束	233
§ 11.10 多重积分中坐标的变化	235
§ 11.11 理论的延伸	238
讨论题	238
习题	239
12. 普通矢量算符	242
§ 12.1 场	242

§ 12.2	标量函数的梯度	242
§ 12.3	矢量函数的散度	243
§ 12.4	高斯定理	245
§ 12.5	绕一线段的环路积分	246
§ 12.6	矢量函数的旋度	246
§ 12.7	斯托克斯定理	247
§ 12.8	倒三角算符对合成函数的作用	248
§ 12.9	一般的基矢和度规张量	249
§ 12.10	物理矢量的偏导数	251
§ 12.11	牛顿第二定律的协变形式	252
§ 12.12	用广义坐标表示的倒三角算符	254
§ 12.13	散度的普遍公式	255
§ 12.14	两个倒三角算符点乘的公式	256
§ 12.15	有关基矢的附加关系式	257
§ 12.16	矢量场的旋度	259
§ 12.17	本章要点	259
讨论题		260
习题		260
13.	物质的连续体——流体	263
§ 13.1	分子效应的消除	263
§ 13.2	质量守恒	263
§ 13.3	涡度和应变速率张量(并矢式)	265
§ 13.4	力的积分	268
§ 13.5	应力并矢式	269
§ 13.6	普遍的运动方程	271
§ 13.7	应力对应变速率的依赖关系	271
§ 13.8	纳维-斯托克斯方程	274
§ 13.9	能量耗散率	276
§ 13.10	通过球体的缓慢稳定流动	277
§ 13.11	沿着对称的毛细管的缓慢稳定流动	278
§ 13.12	本章要点	280
讨论题		280
习题		281
14.	电场矢量和磁场矢量	283
§ 14.1	电荷	283
§ 14.2	库仑定律	283
§ 14.3	电位标量场	285
§ 14.4	极化	286
§ 14.5	标量势	288
§ 14.6	安培定律	289
§ 14.7	磁感应强度	290
§ 14.8	静磁场中 $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ 的回路积分	291
§ 14.9	作用在单位试验电荷上的功的回路积分	293
§ 14.10	位移电流	295
§ 14.11	能量储存和辐射的速率	296

§ 14.12 主要公式	297
讨论题	298
习题	299
15. 等离子体和电磁波	302
§ 15.1 等离子体的性质	302
§ 15.2 组分运动	302
§ 15.3 磁场引起的回转	303
§ 15.4 B 随时间缓慢瞬时变化的影响	305
§ 15.5 对称会聚的磁场的作用	306
§ 15.6 表征等离子体的变量	309
§ 15.7 一个近似的运动方程	310
§ 15.8 线性结果	311
§ 15.9 等离子体中小幅波的代数方程	313
§ 15.10 等离子体中小幅波存在的条件	314
§ 15.11 零阶色散方程	315
§ 15.12 等离子体对横波的影响	317
§ 15.13 电磁场对纵波的影响	318
§ 15.14 外加磁场的影响	320
§ 15.15 等离子态	320
讨论题	320
习题	321
16. 时间与空间的联系	324
§ 16.1 构成闵可夫斯基几何学基础的基本概念	324
§ 16.2 不同惯性坐标系公式的线性关系	324
§ 16.3 基本速率	326
§ 16.4 关键的协变函数和协变微分	327
§ 16.5 变换定律中的系数	328
§ 16.6 长度和周期在运动惯性系上的投影	330
§ 16.7 速度在运动方向与它相同的运动惯性系中的投影及其反演操作	334
§ 16.8 闵可夫斯基坐标系	335
§ 16.9 闵可夫斯基空间中线段的意义	337
§ 16.10 双曲世界线的意义	338
§ 16.11 刚性	339
§ 16.12 本章要点	341
讨论题	342
习题	343
17. 相对论力学	346
§ 17.1 空间和时间的相互作用	346
§ 17.2 四维矢量运动	346
§ 17.3 允许的齐次线性变换	347
§ 17.4 4-矢量速度	349
§ 17.5 4-矢量动量	351
§ 17.6 动量守恒定律和质量守恒定律的推广	352
§ 17.7 $m_0 c^2$ 的意义	353
§ 17.8 动能转变为势能或静止能量	353

§ 17.9 二元碰撞	356
§ 17.10 康普顿散射	358
§ 17.11 本章要点	360
讨论题	360
习题	361
18. 协变电动力学	363
§ 18.1 磁和电的联系	363
§ 18.2 静止电荷	363
§ 18.3 运动电荷	364
§ 18.4 场张量	366
§ 18.5 场张量的对偶性	367
§ 18.6 带电粒子运动所遵循的方程	370
§ 18.7 场的 4-势函数	371
§ 18.8 一个运动电荷的哈密顿函数和拉格朗日函数	373
§ 18.9 场的分量对 4-势的依赖关系	374
§ 18.10 补充说明	375
讨论题	376
习题	376
19. 旋量	379
§ 19.1 表示物理性质的几种可能形式	379
§ 19.2 由坐标构成的旋量	379
§ 19.3 线性变换的表示方法	381
§ 19.4 保持 r 不变的变换	382
§ 19.5 变换的参数化	384
§ 19.6 4-矢量的表示方法	385
§ 19.7 4-矢量和旋量微分算符	387
§ 19.8 4-矢量和旋量的特性	388
§ 19.9 旋量导数为零的函数	389
§ 19.10 最简单的耦合旋量微分方程	390
§ 19.11 狄喇克方程	392
§ 19.12 本章要点	393
讨论题	395
习题	395
20. 施瓦茨希尔德引力场	398
§ 20.1 等价性原理及其意义	398
§ 20.2 两个相邻事件之间的时间元和空间元	398
§ 20.3 球对称区域	400
§ 20.4 球对称区域中粒子运动的微分方程	401
§ 20.5 粒子的能量	403
§ 20.6 一个合适的引力定律	404
§ 20.7 球对称场的引力系数	404
§ 20.8 施瓦茨希尔德场中行星的轨道	406
§ 20.9 巨大物体引起的光线偏折	409
§ 20.10 引力场引起的时间膨胀效应	411

§ 20.11 自由下落的速率	412
§ 20.12 施瓦茨希尔德场的完善化	413
§ 20.13 电荷	416
讨论题	417
习题	418
附录	421
习题答案	434

1. 矢量物理学的基础

§ 1.1 一般原理

在一本儿童杂志上有一幅图案画，它包含有各种各样物体局部外形的图案。这幅图案画绘制得极其巧妙，以致没有任何一个图案一看就会立刻辨认出来。然而只要观察者留意将其中的每一图案与其周围图案区分开来，那么肯定就会看清楚每个图案是什么物体。

同样地，自然界中存在着许多简单的图式，其中大多数都与其他交织在一起，所以即便人们可以作出许多相应的观测，但仍不会察觉出一个特定的图式。不过，一旦某个图式被确认并得到充分详细的描述，那么它对于我们每个人来说都变得一清二楚了。

在物理学的研究中，观测总是作得尽量精确，并对所获得的结果进行分析。各种图式表示成为方程式。于是这些方程式可以联系新的数据，并作出预言。

系统的任何一个由单个数来描述的性质，称之为标量。例如，我们发现质量、电荷、时间、温度、能量这些性质都是标量。研究这些量的数学，包括算术、代数和微积分，这些内容读者已是熟知的。

其他一些性质相应于有向线段。例如，这些性质有粒子的位移、速度、动量、加速度、力。这些性质称为矢量。在使用矢量时，我们主要关心普通空间中各点间的联系。本章将复习一下计算这些对象所需要的代数知识。

把不同矢量联系起来的那些性质则更加复杂得多。例如，转动惯量的作用是把物体的角速度变换成它的角动量，电介质电容率的作用是把电场强度变换成电位移矢量。这些算符包含有并矢或多重矢量，它们可以用按规定方式起作用的数列来表示。

用来描述这些性质中的任何一个量的集合称为张量。标量、矢量、并矢、三重矢量都可称为张量，其秩分别为 0、1、2、3。秩大于或等于 2 的张量称为多重矢量。

古代埃及人、巴比伦人、迦勒底人和希腊人曾研究了空间几何学。他们的结果由亚历山大的欧几里得加以收集并使之系统化。我们将使用的黑体符号则应归功于柯巴斯特罗；缩写符号则归功于赖西、特略、莱维-西维塔和阿尔伯特·爱因斯坦。

§ 1.2 定义矢量运算：加法和减法

物理系统的任何一种性质，或任何一种抽象，只要其作用如一个单纯的数一样，那么就称它为标量。如果其作用与“一”有向线段一样，就称为矢量。在我们的讨论中，每个标量、数字分量和各个量均用斜体符号来表示；每个矢量则以黑体字母表示。因为人们能直接看清和理解简单的几何关系，所以我们把基本的矢量运算定义为用线段进行的运算。

我们首先指出，任何线段都可以缩短或延长而并不会改变它的方向。可以将一给定矢

量的几分之一长或几倍长取为单位长度，于是该矢量或其他矢量的长度就可以用这个单位长度表示出来。用标量乘以一给定矢量就是用这个标量乘以该矢量的长度。

此外，可以把一线段移至与其自身平行的一个新的位置上。在谈到爱因斯坦的理论之前，我们将一直采用欧几里得空间，在欧几里得空间中线段沿任一闭合路径平移必然回到原来的线段。可见每个位移线段只是位置与原来的线段不同，因此我们把它们看成相同的矢量。但是，符号的改变则被看成为方向反向，参见图 1.1 和 1.2。

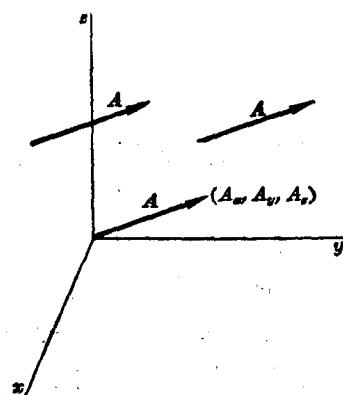
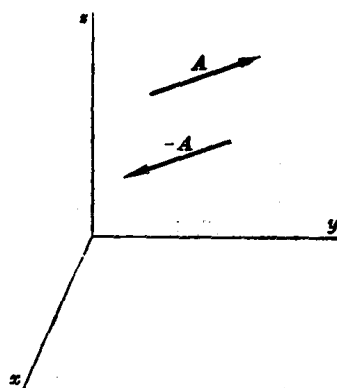
图 1.1 矢量 A 的表示

图 1.2 符号改变的影响

两个矢量的加法是在第一个矢量的终点作出第二个矢量来描述的。它们的和就是自第一个矢量的起点到第二个矢量的终点所画的直线。因此，图 1.3 中的实线表示 $A+B$ ，虚线则表示 $B+A$ ，两者均自一个给定的起点作出。注意，这两种方法都得到了相同的合矢量 R 。

$$A+B=B+A=R. \quad (1-1)$$

由于两个元素按照任何一种次序组合都给出同一个结果，所以矢量加法遵从交换律。

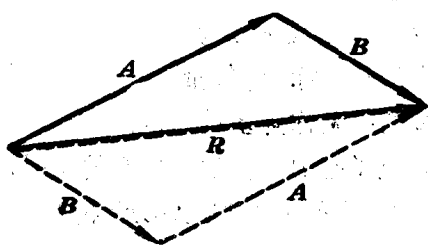


图 1.3 实线矢量 A 加上实线矢量 B 构成的和 $A+B=R$ ，以及虚线矢量 B 加上虚线矢量 A 构成它的置换式 $B+A=R$

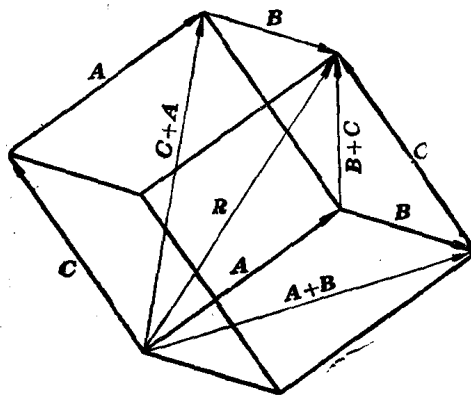


图 1.4 三个矢量的相加

在图 1.4 中，矢量 A 、 B 、 C 构成平行六面体的棱。加法的定义意味着其中任意两个矢量之和给出一个侧面上的对角线，而该对角线与在构成它时未用到的那个矢量之和给出一个通过六面体的对角线。对角线 R 可由三种方法得到。

$$(A+B)+C=A+(B+C)=(C+A)+B=R. \quad (1-2)$$

在进行加法运算时无论这三个元素如何结合并不影响其结果: 所以结合律适用, 而括号可以省略.

为了得出由 A 减去 B 的结果, 我们把负 B 与 A 相加:

$$A-B=A+(-B), \quad (1-3)$$

把 B 的方向反向就能得到负 B , 如图 1.2 所示.

[例 1.1] 利用矢量证明平行四边形两对角线彼此平分.

作出如图 1.5 所示的带有对角线的平行四边形. 由于对边互相平行且长度相等, 它们就代表同一矢量, 所以用同一个符号来标记. 由于每条对角线都是单一直线, 所以其上面线段是下面线段所代表的矢量的一定倍数.

现在将左边三角形中的矢量 C 和 dD 相加,

$$C+dD=B;$$

将右边三角形中的矢量 D 和 cC 相加,

$$D+cC=B;$$

消去 B , 得

$$C+dD=D+cC;$$

再将上式整理使方程左边为 C 的倍数, 右边为 D 的倍数:

$$(1-c)C=(1-d)D.$$

但是因为 C 和 D 不平行, 则 C 不可能是 D 的倍数. 所以

$$1-c=0; \quad 1-d=0,$$

于是

$$c=1; \quad d=1,$$

即两对角线平分.

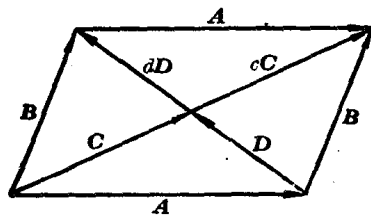


图 1.5 对边及对角线各段已标明的平行四边形

§1.3 乘法

我们能用三种十分有用的方法将矢量相乘, 而分别得到标量、矢量或重矢量.

现在来考虑两个不同的矢量 A 和 B , 并把一给定长度取作长度单位. 在 A 中, 这种长度单位的个数取为 A , 在 B 中取为 B . 于是我们把量 A 称作是 A 的大小, 量 B 称作是 B 的大小.

将一个矢量用其大小来除, 即把它化为一个单位长度的矢量, 即单位矢量. 因此, A/A 是具有 A 方向的单位矢量; B/B 是具有 B 方向的单位矢量.

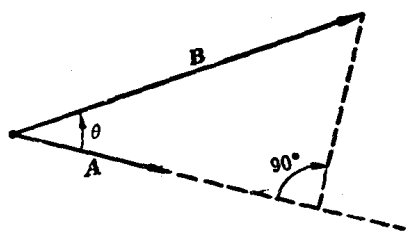


图 1.6 矢量 B 在矢量 A 上的投影

我们可用下述方法将任一矢量投影到另一个矢量上: (a) 自同一原点画出这两个矢量; (b) 由待投影矢量的终点向通过另一矢量的直线上作垂直线 (图 1.6). 由原点至垂直线交点的长度称为投影. 根据余弦的定义, B 在 A 上的投影是

$$B \cos \theta; \quad (1-4)$$

同理, A 在 B 上的投影是

$$A \cos(-\theta) = A \cos \theta. \quad (1-5)$$

B 与 A 的标积(或点乘)的定义是 B 在 A 上的投影与 A 的大小的乘积。因此,

$$B \cdot A \equiv (B \cos \theta) A = AB \cos \theta = (A \cos \theta) B = A \cos(-\theta) B \equiv A \cdot B. \quad (1-6)$$

上述推导中的第二步和第三步是正确的,因为代数乘法中代数量是可交换的。我们看到, $B \cdot A$ 也等于 A 在 B 上的投影与 B 的大小的乘积,即表示式 $A \cdot B$ 。标量乘法或点乘是可交换的。

每当 A 和 B 相平行, θ 即为 0 或 π , 而且

$$A \cdot B = AB \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm AB. \quad (1-7)$$

但是它们互相垂直时, θ 即为 $\pm \frac{\pi}{2}$, 则

$$A \cdot B = AB \cos\left(\mp \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (1-8)$$

这时,这两个矢量就称为是正交的。

任何两个矢量 A 和 B 都可由同一原点作出。然后可以自每一矢量的终点作出另一个矢量,从而构成一个平行四边形。只要这两个矢量不取相同的方向,我们就能构成一垂直于 A 和 B 所在平面的单位矢量 n ,使得 A 、 B 、 n 组成一右手坐标系,如图 1.7 所示。

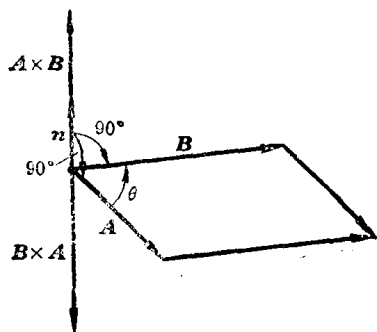


图 1.7 表示 $A \times B$ 和 $B \times A$ 的平行四边形和矢量

A 与 B 的矢积(或叉乘)定义为这样的矢量,其方向为 n ,而其大小等于平行四边形的标量面积。由于这个面积等于该平行四边形的底乘高,而高是 B 与 θ 的正弦的乘积,故根据正弦的定义,我们有

$$A \times B \equiv nAB \sin \theta. \quad (1-9)$$

因为平行四边形所在平面面积的方向由 n 规定,以及其大小是 $AB \sin \theta$,所以可用它表示矢量 $A \times B$ 。

将这个定义应用于 $B \times A$,则得到一个方向为 $-n$ 的矢量,如图 1.7 所示。因此,

$$B \times A = -A \times B. \quad (1-10)$$

只要交换两个元素组合的次序,其结果总要改变符号,故称这个二元运算是反对易的。式(1-10)告诉我们,叉乘遵从反对易定律。

每当 A 和 B 相平行,角 θ 即为 0 或 π ,于是式(1-9)便为零:

$$A \times B = nAB \sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (1-11)$$

只要 A 和 B 相垂直, θ 即为 $\pm \frac{\pi}{2}$, 于是

$$A \times B = nAB \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm nAB. \quad (1-12)$$

三个不共面的矢量 B 、 C 、 D 能组成如图 1.8 所示的平行六面体的棱。我们还能画出矢量 A 作为矢积 $C \times D$ 。这样,由 C 和 D 为边的底的面积就是 A 的大小,而由该底面到相对平面(顶面)的距离是 $B \cos \theta$ 。将该底面积和这一距离相乘便得到体积

$$V = AB \cos \theta = A \cdot B = B \cdot A. \quad (1-13)$$

考虑了 A 的定义,该式便展为三重标积