实变多项式函数

项武义

科学出版社

数学小丛书

实变多项式函数

项武义

科学出版社

1984

内 容 简 介

美国加利福尼亚大学数学系项武义教授，怀着为祖国四化贡献一份力量的满腔热情，为我国青年编写了一套供课外阅读的《数学小丛书》，本书是这套小丛书中的一本.

本书以多项式函数的观点来讨论多项式运算，详细地讨论了实数系的连续性和实变多项式函数的中间值定理，并以中间值定理为基础，进而建立解代数方程的基本定理与计算方法.

本书可供中学生、中学教师、自学青年及学生家长阅读.

数学小丛书

实变多项式函数

项武义

责任编辑 陈永锵 毕 颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1984年10月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1984年10月第一次印刷 印张：2 7/8

印数：0001—20,000 字数：52,000

统一书号：13031·2715

本社书号：3739·13—1

定价： 0.40 元

《数学小丛书》编写前言

为了普及和提高我国的现代科学技术知识水平，培养我国青年思考和解决问题的能力，我们试着把基础数学中的题材编写成一套便于自学的小册子——《数学小丛书》，希望能成为在广度和深度上进一步充实我国的基础数学方面的参考读物.

在着手编写这套小丛书时，我们有下面几点认识与想法：

（一）基础数学涉及的面比较广，在这里若把它编写成一部体系严整偏重推理的“巨著”，这对于初学者自学是很困难的，也是不切实际的. 因此，我们采取化整为零的方法，每一册只对某些中心课题做深入细致的讨论，使得它不仅是整套丛书的不可分割的一部分，而且其本身又自成独立完整的体系. 这样做，对自学者会更加方便些，也能使基础数学中丰富多彩的各个分支和广泛应用，得到应有的反映.

（二）理论与实际之间的关系，概括地说，从实际到理论是“由繁精简”，而从理论到实际则是“以简御繁”. 所以，基础理论必须对实际问题进行由浅入深的分析和由感性到理性的飞跃才能得到. 反过来，只有深刻地理解了基础理论的高度概括性，才能够运用它来解决各种繁复多样的实际问题. 这

套小丛书，虽然各册讨论的课题互不相同，但每册都按上述这种自然演变过程，作一次由实践到理论再回到实践的小循环.

（三）分析、综合、推理，这三种基本思考方法应该相互配合运用. 然而，在许多数学书里往往过于偏重推理而忽略了分析和综合的工作，使读者缺乏对实际问题进行分析和综合的训练，也就不善于把实际问题归纳成数学问题来加以解决了. 因此，在编写这套小丛书时，我们将着重讲述如何认识问题和解决问题的思路. 并通过一些实例来说明上述三种思考方法是怎样配合运用的，而不再过分追求形式的数理证明与逻辑体系.

最后我们建议由海内外热心数学教学的工作者们，同心协力为中国青年编好这套数学小丛书，为祖国的四个现代化贡献我们的一份力量.

项武义

于美国加州大学

目　　录

引　　子

多项式的概念，起始于解代数方程．设在一个数量问题中含有三个待求的未知量，而这三个未知量之间的数量关系是能用四则运算加以表达的“代数关系”，通常我们用未知数符号 x，y，z 分别表示那些待求的未知量，这样就可以把它们之间所满足的代数关系写成代数方程组．由给定的代数方程组求解它所含的未知数 x，y，$\cdots$等所应有的值，叫做解代数方程，它是代数学的基本功．在数学小丛书的《从算术到代数》中已详细地说明了解代数方程的基本原理，就是对于未知数有系统地运用数系通性．换句话说，在解代数方程中所做的运算就是把那些未知数 x，y，$z\cdots$想成是一种在运算上具有数系通性的符号的那种运算．把这种运算抽象化、形式化就产生了多项式的概念与运算，也就是说，多项式是一个含有不定元符号的代数式，不定元符号就是一些运算上具有数系通性（而其本身的意义则有待实际应用时再机动取定）的符号；多项式的运算所要掌握的唯一要点就是对不定元符号运用数系通性．

当我们把一个单元多项式 $f(x)$ 中所含的不定元 x 的意义看成是一个可以在实数系 $\mathbf{R}$ 中任意变动的变数符号时，则 $f(x)$ 就表示另一个随着 x 的变动而变的变数 $y=f(x)$．更

确切地说，y 是一个随着 x 的取值而按 $f(x)$ 这个给定方式取定其相应值．在数学中，用来表示在某一范围中任意变动的数值的符号叫做变数符号，那个范围则叫做该变数的变域． 在关系式 $y=f(x)$ 的两个变数 x, y 之间的关系，显然具有"y 随着 x 的取值而取定其相应值"这种特征，在数学中把具有这种特征的关系叫做函数关系，即表示 y 是 x 的一个函数．例如 $y=x^2$, $y=5x-\sqrt{2}$ $y=\sin x$ 等等都是函数关系的常见实例． 多项式函数在函数运算中，是最简单的运算，例如 $y=\sqrt{2}x^3$, $y=x^2-10x+1$, $\cdots$ 等等，它们都是由"x 的值"按照该多项式所给定的方式去算出"y的相应值"．虽然多项式函数是最简单的函数，但是从以简御繁这个治学原则的实践经验来看，往往简单的事物也就是基本有用的事物． 从实用的观点来看，多项式函数不仅是简单易算的函数，而且也是实用上和理论上重要的基本函数，例如在微积分学中所讨论的高阶可微函数的局部逼近，其实也就是用多项式函数作为基本函数去局部逼近一个高阶可微函数．

假如我们把 x, y 分别想成一个平面直角坐标系中的横坐标和纵坐标，则一个函数关系 $y=f(x)$，就可以用图示曲线加以形象化地表示，这时多项式 $f(x)$ 的实根(即方程式 $f(x)=0$ 的实数解)就是多项式函数 $y=f(x)$的图示曲线和 x 轴的交点，从几何直观来看，x 轴把平面分割成不相连的两侧，任何一条连续不断的曲线(即连续通路的抽象化)要从 x 轴的一侧走到它的另一例，它和 x 轴至少有一个交点． 设有一多项式函数 $y=f(x)$，在 $x=a, b$ 两处所取之值异号，即 $f(a)f(b)<$

0，则 $y=f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 这一段图示曲线就是这样一条由 x 轴一侧走到另一侧的连续曲线．所以它和 x 轴至少有一个交点． 换句话说 $f(x)=0$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 中至少有一解，这也就是我们在第二章要详加研讨的连续性与中间值定理，它是求解代数方程的根本出路．在第三章中，我们将以中间值定理为基础，进而建立解代数方程的基本定理与计算方法．

第一章　多项式与多项式函数

在数学小丛书《从算术到代数》中已详细讨论了多项式的源起和基本运算，例如多项式的加、乘与单元多项式所特有的除法．本章将从多项式函数的观点来讨论多项式运算．从运算的观点来看，多项式函数则是各种函数中最简单也是最基本的函数．例如我们可以用直接代入展开所得的局部展式（参看本章第二节），很容易地讨论一个多项式函数的局部性质．在微积分学中，一般高阶可微函数的局部展式，其实也就是用多项式函数去做局部逼近所得的结果．

第一节　基本概念与基本性质

现实世界中的种种事物与现象，是在不断地变化着的，在一个变动的事物中，往往包含着好些"变量"，它们的数值是随着该事物的变动而改变的，再者，该变动事物的内部关联则往往表现成它的某些变量之间的相互关联．在数学中，我们用变数符号去表示"变量"，用函数关系去表示变量之间的相互关联．多项式函数则是各种函数中既简单又很有用的基本函数．

(一) 基 本 概 念

首先，让我们给变数和函数这两个基本概念下定义：

变量与变数 在某个所要讨论的问题中，那种能取许多不同数值的量叫做变量，用来表示变量的符号叫做变数. 通常我们习惯用 x, y, z 等字母来表示变数，从数学的观点来说，一个变数就是在所讨论的问题中，一个能取许多不同数值的符号，它所能取的那些可能数值构成一个集合，叫做该变数的变域.

函数的定义 设 x, y 是两个相互关联的变数. 若两者之间的关系是使得 y 的值随 x 的取值而取定其相应值，则称这种关系为：y 是 x 的一个函数，通常用符号 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 等来表示说明 y 是 x 的函数. 再者，设 $x, y, \cdots, z$ 都是变数，若它们之间所具有的关系是使得 z 的值随着其他变数 $x, y, \cdots$ 的取值而取定其相应值，则称 z 为 $x, y, \cdots$ 这些变数的一个函数. 通常用 $z=f(x, y, \cdots)$ 这种符号表示.

[例子]

(i) 设 A, l, w 分别表示长方形的面积、长度和宽度. 则三者之间具有关系 $A=l\cdot w$，上述关系就是一个 A 是 l, w 的函数的例子.

(ii)胡克定律说：一个弹性体(例如弹簧秤就是一个弹性体)的应变和它所受的应力成正比. 数学的表达方式是：设 x, y 分别表示应力和应变，则 y 是 x 的函数，其函数关系为

$y=kx$，其中 k 叫做该弹性体的弹性模量.

(iii) 波义耳定律说：一个保持常温的气体，它的体积 V 和它的压力 p 成反比．数学的说法是 $V\cdot p=k$（常数），所以 V 是 p 的一个函数，即 $V=k\cdot\frac{1}{p}$. 同样的 p 也是 V 的函数，即 $p=k\frac{1}{V}$.

(iv) 对于一个给定的多项式 $f(x)$，若把不定元"取成"是一个可以在实数系 $\mathbf{R}$ 中任意变动的变数，则得一多项式函数 $y=f(x)$，例如 $y=x$, $y=kx$, $y=\sqrt{2}x^2-100x+1$ 等等，都是多项式函数的实际例子.

(v) 设 $f(x,y,z)$ 是一个三元多项式，同样的可以把 x, y, z 都"取成"变域为 $\mathbf{R}$ 的实变数，即得一个 x,y,z 的函数 $w=f(x,y,z)$. 例如以 x,y,z 分别表示一个长方体的长、宽、高，则其体积 $w=xyz$ 就是三元多项式函数的一个实例.

函数的图示 对于一个给定的函数 $y=f(x)$，若将 x,y 看成是一个平面直角坐标系中的横坐标和纵坐标，则两个坐标 (x,y) 之间所有满足函数关系 $y=f(x)$ 的点构成一条曲线，叫做函数 $y=f(x)$ 的图示曲线. 一个函数的图示曲线可以看成是这个函数的一种几何表达方式. 它的用途是使我们对于这个函数的变化趋势，有一个形象化的掌握.

[例 1] $y=x$ 的图示曲线是 x,y 轴的角平分线（直线是曲线的特例），$y=-x$ 的图示曲线则是 x,y 轴的另一角平

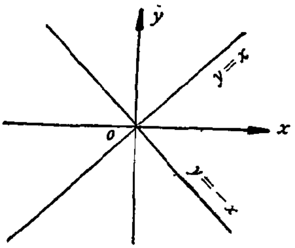

图 1

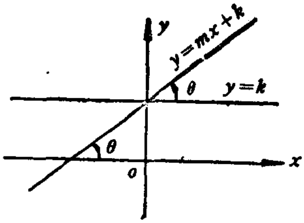

图 2

分线.

[例 2]　$y=k$（常数）的图示曲线是一条和 x 轴平行的直线，$y=mx+k$ 的图示曲线则是一条斜率为 m，截距为 k 的直线，$m=\mathrm{tg}\theta$. 见图 2.

[例 3]　$y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图示曲线都是和 x 轴相切，以 y 轴为对称轴的曲线，它们分居于 x 轴的上侧和下侧. 见图 3.

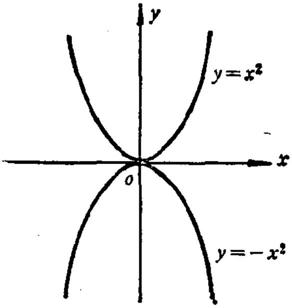

图 3

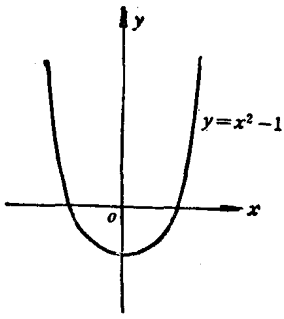

图 4

[例 4]　$y=x^2-1$ 和 $y=|x^2-1|$ 的图示曲线见图 4、图 5.

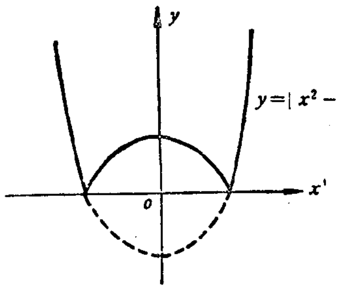

图 5

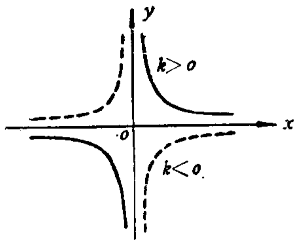

图 6

[例 5]　$y=k\dfrac{1}{x}$. 见图 6.

[例 6]　$y=\cos x$ 和 $y=\sin x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$的图示曲线如下：

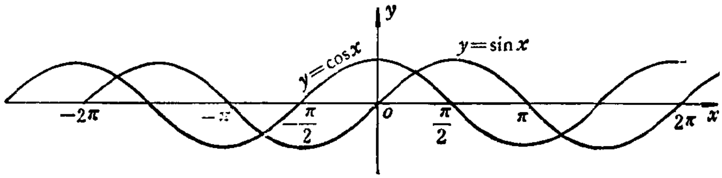

图 7

[例 7]　$y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right.$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

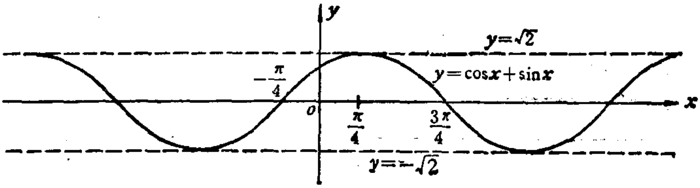

图 8

（二） 多项式函数的基本特性

前面的例 2 说明了一次多项式函数 $y = mx + k$ 的图示曲线是一条直线，其斜率是 $m = \mathrm{tg}\,\theta$，它和 y 轴的截距为 k. 一个熟知的几何事实是“两点定一直线”. 从函数图示的观点来说，也就是一个一次多项式函数，被它在两点的值所唯一决定. 更一般地来说，数学小丛书，《从算术到代数》中的余式定理的推论 4 证明了“一个次数 $\leqslant n$ 的多项式函数被它在 $(n+1)$ 个不同的值所唯一确定”，几何式的说法是：“一个次数 $\leqslant n$ 的多项式函数曲线被其上的 $(n+1)$ 个点所唯一决定，即 $(n+1)$ 个点决定一条次数 $\leqslant n$ 的多项式函数曲线”这就是多项式函数的基本特性.

［例 1］ 试求过 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 这两点的一次曲线，$x_1 \neq x_2$.

［解］ 设所求的一次函数为

$y = mx + k$，则有

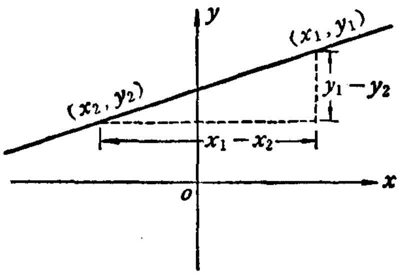

图 9

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + k, \\ y_2 = mx_2 + k. \end{cases}$$

解之即得

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$k = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

所以
$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

[例 2]　试求一个 k 次多项式函数 $y = f(x)$，它在 $x = 0, 1, 2, \cdots, k$ 的函数值分别是 $y = 0, 0, 0, \cdots, 0, 1$.

[解]　因为 $f(0) = f(1) = f(2) = \cdots = f(k-1) = 0$，所以由余式定理得知 $f(x)$ 可以被 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$所整除，又因为两者的次数都是 k，所以只差一个常数因子，即：

$$f(x) = c \cdot x \cdot (x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),$$

其中 c 是待定系数．再把 $x = k$ 代入上式，即得

$$1 = f(k) = c \cdot k \cdot (k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1 = c \cdot k!$$

(通常用符号 $k!$ 表示由 $k, (k-1), (k-2), \cdots$ 一直到 1 的连乘积，叫做 k 的阶乘.)

所以 $c = \dfrac{1}{k!}$，$y = \dfrac{1}{k!} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$.

[例 3]　试求一个 k 次多项式函数 $y = f(x)$，它在 $x = a_0, a_1, a_2, \cdots a_{k-1}, a_k$ 的函数值分别是 $y = 0, 0, 0, \cdots, 0, 1$.

[解]　同样地由余式定理，

$$y = f(x) = c \cdot (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{k-1}).$$

其中 c 是待定系数，再以 $x = a_k$ 代入，即得

$$\begin{aligned} 1 &= f(a_k) \\ &= c \cdot (a_k - a_0)(a_k - a_1)(a_k - a_2)\cdots(a_k - a_{k-1}), \end{aligned}$$

求得 $c = \dfrac{1}{(a_k - a_0)(a_k - a_1)\cdots\cdots(a_k - a_{k-1})}$，

所以

$$y = f(x) = \frac{(x - a_0)(x - a_1)\cdots(x - a_{k-1})}{(a_k - a_0)(a_k - a_1)\cdots\cdots(a_k - a_{k-1})}.$$

（三） 插　值　法

余式定理的推论 4 说明了一个 n 次函数被它在 $(n+1)$ 个数上所取的函数值所唯一决定．这个重要的多项式函数基本性质提供了“由一个多项式函数在足够多（即多于其次数）处的给定函数值去反求这样一个多项式函数的理论基础．”上述代数问题的实际计算法通称为插值法．例如：

[例 1]　试求一个 3 次多项式函数，它在 0，1，2，3 的函数值分别是 0，0，1，5.

[解]　由 $f(0) = f(1) = 0$，用余式定理即得

$$y = f(x) = x(x - 1) \cdot [Ax + B],$$

其中 A，B 是待定系数．再分别以 $x = 2, 3$ 代入，即得 A，B 的方程组